MATHEMATISCHE ANNALEN.

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN.

Unter Mitwirkung der Herren

PAUL GORDAN, ADOLPH MAYER, CARL NEUMANN, MAX NOETHER,
KARL VONDERMÜHLL, HEINRICH WEBER

gegenwärtig herausgegeben

von

Felix Klein
in Göttingen

Walther v. Dyck
in München

David Hilbert
in Göttingen.

55. Band.

Mit 59 Figuren im Text.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1902.

Inhalt des fünfundfünfzigsten Bandes.

(In alphabetischer Ordnung.)

Zur Integration der Potentialgleichung vermittelst *C. Neumann*'s Methode des arithmetischen Mittels.

Von

Ernst Richard Neumann in Halle.

Erster Aufsatz.

Hilbert's Modification von *C. Neumann*'s Convergenzbeweis.

Die von *Carl Neumann* angegebene „Methode des arithmetischen Mittels“ war wohl in erster Linie dazu berufen, einen Ersatz zu gewähren für das *Dirichlet'sche Princip*, d. h. für beliebig gestaltete ebene und räumliche Bereiche die *Existenz einer Fundamentalfunction**) *mit willkürlich vorgeschriebenen Randwerthen* darzuthun. Diese principiell wichtige Aufgabe hat die Methode längst gelöst in Verbindung mit gewissen *combinatorischen Methoden.***)

Doch die Methode leistet noch mehr, sie gestattet nicht allein den *Existenz*beweis zu führen, sondern sie liefert uns auch einen fertigen *analytischen Ausdruck* für die gesuchten Fundamentalfunctionen in Form gewisser unendlicher Reihen, der sogenannten *Neumann'schen Reihen* —, und darin besteht eben ihre Ueberlegenheit über die anderen Ersatzmethoden für das *Dirichlet*'sche Princip, wie sie von *H. A. Schwarz* und *Poincaré* angegeben sind.

*) Wir verstehen unter dieser Bezeichnung eine Function U, welche in dem betreffenden Bereiche den bekannten Potentialbedingungen genügt, d. h. nebst ihren Differenzialquotienten stetig ist und der Laplace'schen Gleichung $\Delta U = 0$ Genüge leistet. — Wegen der genaueren Definition vergleiche weiter unten § 3, pag. 13.

**) Die einschlägigen Arbeiten von *C. Neumann* findet man niedergelegt in seinen „Untersuchungen über das logarithmische und Newton'sche Potential“ (Leipzig bei Teubner 1877) und in der ersten Abhandlung „Ueber die Methode des arithmetischen Mittels“ in den Abhandlungen der Kgl. Sächs. Gesellschaft d. Wiss. Bd. XIII (Leipzig bei Hirzel 1887). — Diese beiden Werke, auf die ich mich öfters zu berufen habe, will ich immer kurz folgendermassen citiren: „C. N. Unters.“ und „C. N. Abhandl. I“.

Zwar konnte *C. Neumann* nur die Anwendbarkeit seiner Methode auf *convexe*, oder richtiger gesagt, *nirgend concave* Gebiete verbürgen; wenn es ihm aber nach Entdeckung dieser seiner Methode, wie gesagt, gleichwohl gelang, auch für *beliebige* Bereiche das *Dirichlet*'sche Problem zu lösen, d. h. wenigstens die *Existenz* einer Fundamentalfunction mit vorgeschriebenen Randwerthen zu beweisen, so hatte das seinen Grund in der folgenden Ueberlegung: Jedes (nicht von Hause aus schon convexe) Gebiet lässt sich sicherlich in solche (übereinandergreifende) Theilgebiete zerlegen, für welche die Methode des arithmetischen Mittels — sei es direct, sei es unter Zuhilfenahme der Abbildung nach reciproken Radien — eine Fundamentalfunction aus vorgeschriebenen Randwerthen herzustellen gestattet. — Die erwähnten *combinatorischen Methoden* gestatten dann weiter aus solchen Fundamentalfunctionen der *Theilgebiete* die Fundamentalfunction für das *ganze* ursprüngliche Gebiet herzustellen und somit das gestellte Problem zu lösen.

Derselbe Gedanke findet sich auch in der *Methode von H. A. Schwarz* wieder, vermittelst welcher wohl zuerst in einwandsfreier Weise die Existenz einer Fundamentalfunction mit willkürlich vorgeschriebenen Randwerthen für eine grössere Classe von Bereichen bewiesen ist, nämlich für alle *ebenen* Gebiete, die von singularitätenfreien Stücken analytischer Curven begrenzt werden; auch *Schwarz* stellt zunächst die Fundamentalfunctionen gewisser *Theilbezirke* her und setzt dann aus diesen Functionen vermittelst seines „alternirenden Verfahrens“ (das also den *C. Neumann*'schen „combinatorischen Methoden“ entspricht) die Fundamentalfunction des *ganzen* ursprünglich vorgelegten Bereiches zusammen.

Während nun aber diese Zerlegung des gegebenen Gebietes in Theilgebiete bei *Schwarz* im Wesen der ganzen Methode begründet ist, — sie hängt enge damit zusammen, dass *Schwarz* von dem analytischen Ausdruck für die begrenzende Curve Gebrauch macht — so stellt sich bei *C. Neumann* die Nothwendigkeit der Zerlegung erst beim Convergenzbeweise ein; *C. Neumann* nimmt die Zerlegung lediglich vor, um die Theilgebiete gewissen Bedingungen anzupassen, unter denen allein er die Convergenz der Methode des arithmetischen Mittels *beweisen* kann. Ob die Convergenz aber wirklich an solch einschränkende Bedingungen gebunden ist, ob sie nicht vielleicht *thatsächlich* in viel weiterem Umfange stattfindet, und somit möglicherweise auch für das *ganze* ursprünglich vorgelegte Gebiet selber, ob sonach vielleicht die Methode des arithmetischen Mittels uns ganz *direct*, *ohne Zuhilfenahme der combinatorischen Methoden*, die gesuchte Fundamentalfunction dieses Gebietes liefern könnte — diese Frage bleibt dabei ganz offen.

Diese Frage gerade, die Frage nach dem *Gültigkeitsbereiche* der Methode

des arithmetischen Mittels ist nun aber in neuerer Zeit in den Vordergrund des Interesses getreten. Es handelt sich also bei den neueren Untersuchungen über die Methode nicht mehr um die *principielle* Frage nach der *Existenz* einer Fundamentalfunction mit vorgeschriebenen Randwerthen, sondern um die folgende mehr *formale* Frage: *Gelten vielleicht die Reihen, welche C. Neumann für die Fundamentalfunctionen des inneren und äusseren Gebietes von nirgend concaven Curven und Flächen angegeben hat, ganz allgemein auch bei beliebigen Curven und Flächen?* oder anders ausgedrückt: *Lassen sich alle Fundamentalfunctionen ganz beliebig gestalteter Gebiete in Form dieser Neumann'schen Reihen darstellen?*

Diese Frage hat vor Allem *Poincaré* zum Gegenstande einer grösseren Arbeit gemacht.*) Er kommt in ihr zu dem Resultate, dass diese Frage für einfach zusammenhängende Bereiche allgemein, oder doch wenigstens unter sehr weiten Voraussetzungen über die Begrenzung, bejahend zu beantworten ist. — Doch ist dieser *Poincaré'sche Beweis* für die Allgemeingültigkeit der Methode des arithmetischen Mittels vorläufig noch sehr umständlich und in mancher Hinsicht unbefriedigend; so setzt z. B. *Poincaré* das *Dirichlet'sche Princip* von vornherein als gelöst voraus und zieht überhaupt Hilfsmittel zum Beweise heran, deren Benutzung — nach Lage der Dinge heute zwar noch unvermeidlich — doch nicht in der Natur der Sache begründet ist.

Bei dem Studium der *Poincaré*'schen Arbeit und der an sie sich enge anschliessenden neueren Arbeiten von *Liapounoff*, *Steckloff* und *Korn* gewinnt man überhaupt den Eindruck, dass uns noch immer ein wesentlicher Punkt in diesem Gebiete verborgen ist. — Wenn ich daher in diesem und den folgenden Aufsätzen die hauptsächlichsten Resultate meiner mehrjährigen Untersuchungen über die Methode des arithmetischen Mittels veröffentliche, ohne meinerseits eine völlig befriedigende Lösung der aufgeworfenen Frage zu geben, so geschieht dies in dem Glauben, dass die hier angestellten Betrachtungen vielleicht doch bis zu einem gewissen Grade geeignet sein möchten, etwas Licht auf das Wesen der ganzen Methode und der Functionen, deren sie sich bedient, zu werfen, und somit auch ein wenig zur Aufhellung des stellenweise noch herrschenden Dunkels beizutragen. —

Die Convergenz der Methode des arithmetischen Mittels zu beweisen, ist bisher im Wesentlichen auf zwei gänzlich verschiedenen Wegen versucht worden. Diese beiden Wege werde ich nun nach einander einer näheren Untersuchung unterziehn. — Es ist dies erstlich der Weg, auf welchem

---

*) La méthode de *Neumann* et le problème de *Dirichlet*. Acta mathematica Bd. 20, 1897, pag. 59.

C. Neumann ursprünglich die Convergenz der Methode wenigstens für *convexe* Gebiete bewies, ein Weg, bei welchem die sogenannte „Configurationsconstante" des betrachteten Gebietes eine wesentliche Rolle spielt; und der zweite Weg ist der neuerdings von *Poincaré* in der citirten Arbeit eingeschlagene, der sich enge an ein Verfahren anlehnt, dessen sich *H. A. Schwarz* bei einem verwandten Problem bedient hat.

Die neueren Arbeiten über die Methode verfolgen ausschliesslich den zweiten *Poincaré'schen Weg* weiter, und auch ich neige der Ansicht zu, dass auf ihm noch eher eine befriedigende Lösung der aufgeworfenen Frage zu erwarten ist. — Wenn ich gleichwohl daneben den ursprünglichen *C. Neumann'schen Weg* eingehend berücksichtige und vielfach Wege einschlage, welche auf demselben Princip, wie er, beruhen, so geschieht das, weil sich dieser Weg durch seine Einfachheit und Durchsichtigkeit auszeichnet, und weil er uns entschieden einen tieferen Einblick in den Mechanismus der aufeinanderfolgenden Functionen gestattet, auf deren Anwendung die Methode beruht, was wohl vor Allem im Falle *mehrfach zusammenhängender Bereiche* gilt, mit denen ich mich in dem zweiten Aufsatz eingehender beschäftigen werde. — Ueberdies gedenke ich im dritten Aufsatz zu zeigen, dass das *C. Neumann*'sche Verfahren des Convergenzbeweises noch einer grossen *Verallgemeinerung* fähig ist, welche es vielleicht dem Interesse der Mathematiker wieder etwas näher rückt, da sie es in einen gewissen Zusammenhang zu den neueren Untersuchungen bringt, die an das *Poincaré*'sche Verfahren anknüpfen.

Was nun specieller den Inhalt des vorliegenden ersten Aufsatzes anlangt, so dürfte dieser vielleicht nichts wesentlich Neues enthalten, er behandelt vornehmlich die *Grundlagen* für unsere weiteren Entwicklungen. Ich gebe zunächst die Methode in ihren Hauptumrissen an [vgl. pag. 14—15] und bringe sodann den *Neumann*'schen Convergenzbeweis mit einer gewissen Modification, die sich dann weiterhin als äusserst fruchtbar herausstellen wird, und die wohl auf *Hilbert* zurückgeht.

Im Wintersemester 1895/96 hat nämlich Professor *Hilbert* in Göttingen in einer Vorlesung über partielle Differenzialgleichungen auch die Methode des arithmetischen Mittels behandelt. — Im Anschluss daran hat sich dann einer seiner damaligen Schüler, Herr *Ch. A. Noble*, weiter mit diesem Gegenstande beschäftigt und auch eine kurze Mittheilung darüber in den Göttinger Nachrichten veröffentlicht.*) — Da jedoch gerade der hauptsächlichste Satz, ja der Satz in welchem, wenigstens nach meiner Ansicht,

*) Jahrgang 1896, pag. 191—198.

allein etwas wesentlich Neues enthalten ist, in der Arbeit nicht bewiesen, nicht einmal ausgesprochen, vielmehr stillschweigend als bekannt vorausgesetzt und mehrfach angewandt wird, so muss ich wohl annehmen, dass ihn *Hilbert* in der Vorlesung bewiesen hat, und will ihn daher kurz den „*Hilbert'schen Satz*" nennen. — Dieser Satz spricht zum ersten Male aus, dass es für die Convergenz der Methode des arithmetischen Mittels schon *völlig hinreichend* ist, dass die Configurationsconstante des betrachteten Gebietes kleiner als 1 ist, dass die *Neumann*'sche (weit engere) Bedingung *convexer* Begrenzung ganz überflüssig ist.

Für diesen Satz, der also bereits eine gewisse Erweiterung des Gültigkeitsbereiches der Methode darstellt, will ich nun im Folgenden einen Beweis liefern, wie ich ihn mir für meine Zwecke zurechtgelegt habe [vgl. § 5]. — In der Bezeichnungsweise werde ich mich dabei an die von *C. Neumann* gebrauchte, von der *Hilbert*'schen etwas abweichende halten, welche auch leicht die Ausdehnung der Untersuchungen von *ebenen* auf *räumliche* Gebiete gestattet. —

Hilbert bedient sich übrigens einer etwas anderen Configurationsconstanten, die freilich mit der *Neumann*'schen enge zusammenhängt [vgl. § 6], vor ihr aber entschieden den Vorzug verdient, auch bestimmter definirt wird, sodass sie sich im einzelnen Falle leichter berechnen lässt. — Darin erblickt nun *Noble* den Hauptvorzug der *Hilbert*'schen Ueberlegungen, weil es erst durch die erleichterte Berechnung der Constanten ermöglicht sei, die eventuelle Anwendbarkeit der Methode auf weitere Bereiche festzustellen; — wenn dem aber so ist, so verdanken wir das eben erst dem *Hilbert*'schen Satz, denn bevor dieser bekannt war, konnten wir die Convergenz der Methode bei einem Gebiete, das nicht convex war, mochte nun seine Configurationsconstante einen Werth haben, wie sie wollte, doch nicht verbürgen. Es spielte früher der Werth der Constanten überhaupt *im einzelnen Falle* keine Rolle — höchstens liess er die *Stärke* der Convergenz abschätzen —, die Constante diente überhaupt nur vorübergehend dem einen Zweck, *ein für alle Male* die Convergenz des ganzen Verfahrens für *convexe* Gebiete zu beweisen. —

Noble zeigt dann noch im weiteren Verlauf seiner Arbeit, dass jedes ebne Gebiet, das von einer „Randcurve mit stückweise stetig sich ändernder Tangente und ohne Spitzen" begrenzt wird, sich stets in übereinandergreifende Theilgebiete zerlegen lässt ,deren Configurationsconstanten kleiner als 1 sind, für welche also die *Neumann*'sche Methode die Fundamentalfunctionen liefert, aus denen sich dann die gesuchte Function für das ganze Gebiet nach den *Schwarz-Neumann*'schen combinatorischen Methoden zusammensetzen lässt. — So beachtenswerth der damit erbrachte *Existenzbeweis* auch ist, etwas wesentlich Neues bringt er nicht, denn, dass es

stets eine Eintheilung des Gebietes giebt, welche im Wesentlichen dasselbe leistet, allerdings eventuell unter Zuhilfenahme der Abbildung nach reciproken Radien, das war, wie oben erwähnt, schon früher bekannt. — Dass übrigens beide Arten der Eintheilung thatsächlich auf dasselbe herauskommen, werde ich im letzten Paragraphen dieses Aufsatzes zeigen. —

Um mich nun später kürzer ausdrücken zu können, will ich hier zu Eingang der Arbeit sogleich noch bemerken, dass ich über die *„beliebigen"* Curven und Flächen ein für alle Mal die Voraussetzung mache, dass sie keine besonderen Singularitäten besässen, also im Besonderen von überall *stetiger Biegung, frei von Spitzen, bezw. Ecken und Kanten* seien. Sollte diese Voraussetzung nicht erfüllt sein, so bedürften unsere Ausführungen noch einer gewissen Modification, deren Berücksichtigung freilich unsere Formeln nur unnöthig compliciren und den Grundgedanken, um dessen Auseinandersetzung es mir zu thun ist, nur verschleiern würde. — Zudem scheint mir ein näheres Eingehn hierauf um so weniger nothwendig als jene Modification des Verfahrens aus den Arbeiten von *C. Neumann* [vgl. vornehmlich Abhandl. I] völlig klar ersichtlich ist [vgl. auch weiter unten die Anmerkungen pag. 31 und 44]. — Schliesslich will ich auch gleich von vornherein noch bemerken, dass ich mich hinsichtlich der *„willkürlichen"* auf einer Curve oder Fläche vorgeschriebenen Functionen, immer auf *stetige Functionen* beschränken werde.

§ 1.

Das Potential einer Doppelbelegung.*)

Es sei gegeben irgend eine *geschlossene Curve* σ *in der Ebene*, und auf derselben seien beliebige, aber stetige Werthe f_σ in irgend welcher Weise vorgeschrieben. Ferner sei gegeben irgend ein Punkt p in jener Ebene und es bezeichne E die Entfernung dieses Punktes p von einem Elemente $d\sigma$ jener Curve und ν die auf diesem Elemente $d\sigma$ errichtete innere Curvennormale

Alsdann bilde man das folgende über alle Elemente $d\sigma$ von σ hinerstreckte Integral:

$$W_p = \frac{1}{\pi}\int f_\sigma \frac{\partial\left(\log\frac{1}{E}\right)}{\partial\nu}\,d\sigma = \frac{1}{\pi}\int f_\sigma\,(d\sigma)_p,$$

wo

*) Dieser Paragraph enthält eine blosse Zusammenstellung derjenigen Eigenschaften der Potentiale von Doppelbelegungen, von denen wir im Folgenden Gebrauch machen wollen. — Wegen des Beweises dieser Eigenschaften verweise ich auf *C. Neumann's* Unters. (vornehmlich Cap. 4, § 6 und § 9, pag. 135) und Abhandl. I, § 4, pag. 34.

$$(d\sigma)_p = \frac{\partial\left(\log\frac{1}{E}\right)}{\partial \nu}\, d\sigma = \frac{\cos(\nu, E)}{E}\, d\sigma$$

die scheinbare Grösse des Elementes $d\sigma$ von p aus darstellt, dieselbe *positiv* oder *negativ* gerechnet, je nachdem ein in p gedachter Beobachter auf die *innere* oder *äussere* Seite jenes Curvenelementes $d\sigma$ hinblickt.

Zu einer dieser Function W_p in der Ebene völlig analogen Function *im Raume* gelangen wir nun, wenn wir eine *geschlossene Fläche* σ betrachten, auf derselben in irgend welcher aber stetigen Weise eine Function f_σ vorschreiben und alsdann das über die ganze Fläche hinerstreckte Integral bilden:

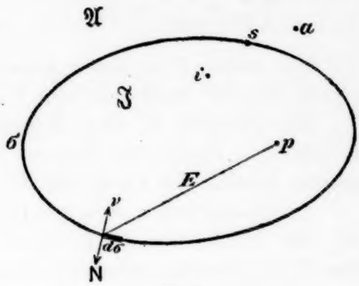


Fig. 1.

$$W_p = \frac{1}{2\pi}\int f_\sigma \frac{\partial \frac{1}{E}}{\partial \nu}\, d\sigma,$$

wo p ein ganz beliebiger Punkt im Raume ist, und wo E und ν ganz analoge Bedeutungen haben, wie oben.

Um daher unseren folgenden Ausführungen eine grössere Allgemeinheit zu geben, bei ihnen in gleicher Weise den Fall einer geschlossenen *Curve* σ *in der Ebene*, wie den Fall einer geschlossenen *Fläche* σ *im Raume* zu berücksichtigen, wollen wir allgemeiner

(1) $$W_p = \frac{1}{h\pi}\int f_\sigma (d\sigma)_p,$$

setzen, wo

(2) $$(d\sigma)_p = \frac{\partial T_p}{\partial \nu}\, d\sigma = \frac{\cos(\nu, E)}{E^h}\, d\sigma$$

die positiv oder negativ gerechnete scheinbare Grösse des Elementes $d\sigma$ vom Punkte p aus bedeutet, und wo bei Betrachtungen

in der Ebene:	*im Raume:*
$h = 1, \qquad T_p = \log\frac{1}{E}$	$h = 2, \qquad T_p = \frac{1}{E}$

anzunehmen ist.

Dieses so definirte Integral W_p, betrachtet als Function der Lage des Punktes p, bezeichnet man als das „Potential einer Doppelbelegung" der Curve oder Fläche σ und die Function $\frac{f_\sigma}{h\pi}$ nennt man das „Moment" dieser Doppelbelegung; doch will ich die Betrachtungen, auf welche sich diese Bezeichnungen stützen, als für unsere weiteren Zwecke unwesentlich, hier übergehn.

Dieses Potential W besitzt nun die Eigenschaft, in jedem Punkte des ***innern,*** *sowie des* ***äussern*** *Gebietes der gegebenen Curve oder Fläche σ nebst seinen Differenzialquotienten stetig zu sein und überdies der Laplace'schen partiellen Differenzialgleichung $\Delta W = 0$ Genüge zu leisten, d. i. bei Betrachtungen*

*in der **Ebene** der Gleichung:*	*im **Raume** der Gleichung:*
$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0.$	$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = 0.$

Wir wollen diese bisher genannten Eigenschaften kurz als „***Haupt-***
(3) ***eigenschaften***" bezeichnen und können daher kurz so sagen:

Das Potential W einer Doppelbelegung besitzt die Haupteigenschaften
(4) *in jedwedem Punkte des* ***innern,*** *sowie des* ***äussern*** *Gebietes der vorgelegten geschlossenen Curve oder Fläche σ.*

Im Unendlichen, d. h. wenn der Punkt p ins Unendliche rückt, *nimmt*
(5) *W_p den Werth 0 an.* — Bezüglich des sonstigen Verhaltens der Function W im Gebiete ausserhalb σ sei noch hervorgehoben, dass *das über eine beliebige, σ umschliessende Curve oder Fläche ω hinerstreckte Integral*
(6) $\int \frac{\partial W}{\partial N} d\omega$ *verschwindet,* wenn N die auf dem Curven- oder Flächenelement $d\omega$ errichtete innere Normale bedeutet.

Sodann ist noch zu bemerken, dass *die Function W_p in der Nähe von σ* ***unstetig*** ist. Lassen wir nämlich den Punkt p durch σ hindurchgehn, so besitzt W_p unmittelbar vor und unmittelbar nach dem Durchgange wesentlich verschiedene Werthe, die wiederum verschieden sind von denen, die es in dem Momente besitzt, in dem p gerade in σ hineinfällt, identisch mit einem Punkte s von σ wird. Es macht also der Werth von W_p beim Durchgange von p durch σ zwei unmittelbar aufeinanderfolgende Sprünge, und zwar sind diese Sprünge einander gleich, nämlich gleich f_s, gleich dem Werthe, den die Function f_σ in jenem Curven- oder Flächenpunkte s besitzt. Es sind nämlich die *Grenzwerthe* von W_i, d. h. von den Werthen der Function in *inneren* Punkten i:

(7i) $$W_{is} = W_s + f_s,$$

und die Grenzwerthe von W_a, von den Functionswerthen in *äusseren* Punkten a:

(7a) $$W_{as} = W_s - f_s,$$

wo also W_s den Werth von W in dem geradezu auf σ gelegenen Punkte s bedeutet.

Gegenüber diesem unstetigen Verhalten von W_p *in der Nähe von σ* sei hinsichtlich dieser Werthe W_s bemerkt, dass sie, betrachtet lediglich

(8) als Function der Lage des Punktes s *auf der Curve oder Fläche* σ *selber* eine daselbst *stetige* Function bilden.

Endlich sei noch bemerkt, dass im Gegensatz zu den Functionswerthen selber sich die *Differentialquotienten von* W *nach der Normalen* von σ beim Durchgange durch σ durchaus *stetig* ändern, es ist nämlich

$$\frac{\partial W}{\partial \nu} + \frac{\partial W}{\partial \mathsf{N}} = 0, \tag{9}$$

wenn N die mit ν correspondirende äussere Curven- oder Flächennormale bezeichnet. —

Zum Schlusse sei noch eines wichtigen *Specialfalles* Erwähnung gethan, in dem die Function W_p besonders einfache Werthe annimmt, nämlich des Falles, dass wir $f_\sigma = \text{const.}$, oder noch specieller $f_\sigma = 1$ setzen. Es geht dann W_p in die schon von *Gauss* betrachtete Function

$$w_p = \frac{1}{h\pi}\int (d\sigma)_p \tag{10}$$

über,*) und diese hat in inneren Punkten i, in Punkten s der gegebenen Curve oder Fläche σ, und in äusseren Punkten a die folgenden einfachen Werthe:

$$w_i = 2, \qquad w_s = 1, \qquad w_a = 0. \tag{10'}$$

§ 2.

Die Oeffnungsfunction und die *Hilbert*'sche Configurationsconstante einer geschlossenen Curve oder Fläche.

Wir wollen jetzt von dem zuletzt betrachteten Falle, dass die Function f_σ eine Constante sei, ganz absehn, vielmehr annehmen, dass f_σ eine wirkliche Function sei, d. h. eine Function, die an verschiedenen Stellen auch thatsächlich verschiedene Werthe annimmt.

Es sei G der grösste, und K der kleinste dieser Werthe, mithin $G - K$ die sogenannte *Schwankung* dieser auf der gegebenen Curve oder Fläche σ vorgeschriebenen Function f. Dann ist die Frage, um die es sich jetzt handelt, die folgende: Wie gross ist unter so bewandten Umständen die Schwankung der Randwerthe W_s der zugehörigen Function W?

Wir wollen für diese Randfunction W_s aus später leicht ersichtlichen Gründen die neue Bezeichnung f' einführen, definiren demnach f_s' durch die folgende Gleichung:

$$f_s' = W_s = \frac{1}{h\pi}\int f_\sigma (d\sigma)_s. \qquad \text{[vgl. (1) pag. 7]} \tag{1}$$

*) Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum ellipticorum homogeneorum. *Gauss*' ges. Werke, Bd. V, pag. 9, theorema quartum.

Es handelt sich dann also darum, die Schwankung dieser neuen Function f' zu bestimmen, oder wenigstens möglichst enge Grenzen für sie anzugeben, sie in Beziehung zu setzen zu der Schwankung der Function f.

Wir markiren zu diesem Zwecke auf σ zwei beliebig aber fest gewählte Punkte s_1 und s_2, bilden mit Bezug auf beide die Function f' und bilden dann weiter die Differenz dieser beiden Functionswerthe

$$f'_{s_1} - f'_{s_2} = \frac{1}{h\pi}\int f_\sigma (d\sigma)_{s_1} - \frac{1}{h\pi}\int f_\sigma (d\sigma)_{s_2}.$$

Nunmehr zerlegen wir σ zunächst in ganz willkürlicher Weise in zwei Theile α und β. Dann sind jene Integrale hinzuerstrecken über alle Elemente $d\alpha$ des einen, sowie alle Elemente $d\beta$ des anderen Theils, wir müssen also schreiben:

$$f'_{s_1} - f'_{s_2} = \frac{1}{h\pi}\left\{\int_\alpha f_\alpha (d\alpha)_{s_1} + \int_\beta f_\beta (d\beta)_{s_1}\right\} - \frac{1}{h\pi}\left\{\int_\alpha f_\alpha (d\alpha)_{s_2} + \int_\beta f_\beta (d\beta)_{s_2}\right\}$$

oder aber:

$$(2)\qquad f'_{s_1} - f'_{s_2} = \frac{1}{h\pi}\int_\alpha f_\alpha [(d\alpha)_{s_1} - (d\alpha)_{s_2}] - \frac{1}{h\pi}\int_\beta f_\beta [(d\beta)_{s_2} - (d\beta)_{s_1}].$$

Jetzt setzen wir nach *Hilbert* über jene Eintheilung von σ fest, dass
(3) *zum Theile α alle Elemente $d\sigma$ gehören mögen, die von s_1 aus grösser erscheinen als von s_2, und zum Theile β alle übrigen*, also diejenigen Elemente, die von s_2 aus grösser oder gleich gross erscheinen als von s_1,*) sodass also $(d\alpha)_{s_1} > (d\alpha)_{s_2}$ und $(d\beta)_{s_1} \leqq (d\beta)_{s_2}$ ist, oder aber:

$$[(d\alpha)_{s_1} - (d\alpha)_{s_2}] > 0 \quad \text{und} \quad [(d\beta)_{s_2} - (d\beta)_{s_1}] \geqq 0.$$

Den Ausdruck rechter Hand in (2) werden wir demnach vergrössern, wenn wir daselbst in dem ersten Integrale für f seinen grössten Werth G, in dem zweiten, abzuziehenden, dagegen seinen kleinsten Werth K eintreten lassen. Es ist daher

$$(4)\qquad f'_{s_1} - f'_{s_2} \leqq G \cdot \frac{1}{h\pi}\int_\alpha [(d\alpha)_{s_1} - (d\alpha)_{s_2}] - K \cdot \frac{1}{h\pi}\int_\beta [(d\beta)_{s_2} - (d\beta)_{s_1}].$$

Nach Formel (10′) pag. 9 ist nun aber $w_{s_1} = w_{s_2}$ (nämlich $= 1$), d. i.

$$\frac{1}{h\pi}\int (d\sigma)_{s_1} = \frac{1}{h\pi}\int (d\sigma)_{s_2}$$

oder

$$\frac{1}{h\pi}\left\{\int_\alpha (d\alpha)_{s_1} + \int_\beta (d\beta)_{s_1}\right\} = \frac{1}{h\pi}\left\{\int_\alpha (d\alpha)_{s_2} + \int_\beta (d\beta)_{s_2}\right\},$$

*) Bei dieser Ausdrucksweise ist wiederum die scheinbare Grösse eines Elementes $d\sigma$ von einem Punkte p aus nicht absolut gerechnet gedacht, sondern positiv oder negativ, je nachdem ein in p gedachter Beobachter auf die innere oder äussere Seite von $d\sigma$ hinblickt [vgl. pag. 7].

woraus sich weiter sofort die einfache Beziehung

$$(5) \qquad \frac{1}{h\pi}\int\limits_{\alpha}[(d\alpha)_{s_1}-(d\alpha)_{s_2}] = \frac{1}{h\pi}\int\limits_{\beta}[(d\beta)_{s_2}-(d\beta)_{s_1}]$$

ergiebt. — Den gemeinsamen Werth dieser beiden Ausdrücke wollen wir nun abkürzend mit $D(s_1, s_2)$ bezeichnen; dann können wir die Formel (4) in die folgende einfache Gestalt versetzen:

$$(6) \qquad f'_{s_1} - f'_{s_2} \leqq (G-K)\cdot D(s_1, s_2).$$

Die hier eingeführte Function $D(s_1, s_2)$ will ich nun kurz bezeichnen als die *Oeffnungsfunction* von σ in Bezug auf die Pole s_1 und s_2.*) Wir können dieselbe dann folgendermassen definiren:

Man markire auf der gegebenen Curve oder Fläche σ zwei beliebige Punkte s_1 und s_2 und theile sodann σ in der Weise in zwei Theile α und β, dass man zum Theile α alle Elemente $d\sigma$ rechnet, welche von s_1 aus grösser erscheinen als von s_2 aus, zum Theile β aber alle übrigen. — Alsdann verstehn wir unter der Oeffnungsfunction der Curve oder Fläche σ mit Bezug auf s_1 und s_2 als Pole das folgende über den Theil α hinerstreckte Integral:

$$(7) \qquad D(s_1, s_2) = \frac{1}{h\pi}\int[(d\alpha)_{s_1} - (d\alpha)_{s_2}]. \text{ —}$$

Aus dieser Definition geht unmittelbar hervor, dass $D(s_1, s_2)$ wirklich *eine Function lediglich der Lage von s_1 und s_2* ist, denn auch das Integrationsgebiet α ist, ausser natürlich von der Beschaffenheit von σ, nur noch abhängig von der Lage dieser beiden Punkte.

Ferner ist aus jener Definition sofort ersichtlich, dass $D(s_1, s_2)$ eine *wesentlich positive*, d. h. niemals negative Function ist, und endlich, dass diese Function verschwindet, wenn beide Pole zusammenfallen: es ist

$$(8) \qquad D(s, s) = 0.$$

Es sei sogleich wegen späterer Anwendungen bemerkt, dass dies im Allgemeinen die einzige Art ist, die Oeffnungsfunction zum Verschwinden zu bringen. Sie kann als Summe von lauter positiven Gliedern nur noch dann verschwinden, wenn diese Glieder einzeln sämmtlich zu 0 werden, d. h., wie man wohl leicht übersieht, wenn von den beiden auf σ
(9) gelegenen Punkten s_1 und s_2 aus *sämmtliche* Elemente $d\sigma$ gleich gross erscheinen; das erfordert aber eine ganz besondere Beschaffenheit der vorgelegten Curve oder Fläche σ [vgl. weiter unten § 7 und § 10]. —

Die an dieser Stelle für uns wichtigste Eigenschaft der Oeffnungsfunction ist nun aber in der Formel (6) enthalten. Diese besagt, dass

*) Dieser Name dürfte sich darum einigermassen empfehlen, weil man die Grössen $(d\sigma)_p$ [vgl. (2) pag. 7], welche in der Function eine Hauptrolle spielen, stets geometrisch deuten kann als die *Oeffnungen* gewisser Winkel bezw. Kegel.

das Product aus der Oeffnungsfunction $D(s_1, s_2)$ und der Schwankung $G - K$ der ursprünglich auf σ vorgeschriebenen Function f eine obere Grenze bildet für die Differenz der Werthe von f' in den Punkten s_1 und s_2.

Lassen wir nun die Pole s_1 und s_2 auf σ in andere und andere Lagen rücken, so wird die Oeffnungsfunction $D(s_1, s_2)$ im Allgemeinen andere und andere Werthe annehmen. — Den grössten aller dieser Werthe bezeichnen wir mit c. Es ist dann c die *Hilbert'sche Configurationsconstante* der vorgelegten Curve oder Fläche σ. — In der That hängt dieser Werth c nur noch ab von der Beschaffenheit, von der Configuration von σ.

Nach der *Definition dieser Constanten c als Maximum der Oeffnungsfunction $D(s_1, s_2)$* [vgl. (7)] ist also

$$D(s_1, s_2) \leqq c,$$

welche Lage auch s_1 und s_2 auf σ besitzen mögen, mithin wird nach (6) die Werthdifferenz von f' in zwei solchen beliebigen Punkten s_1 und s_2 umsomehr:

$$f'_{s_1} - f'_{s_2} \leqq (G - K)c$$

sein, und diese Relation wird also z. B. auch dann noch gültig bleiben, wenn wir s_1 und s_2 in diejenigen beiden Punkte von σ rücken lassen, in denen die Function f' ihren grössten Werth G', bezw. ihren kleinsten Werth K' annimmt, d. h. es wird auch noch

$$G' - K' \leqq (G - K) \cdot c \tag{10}$$

sein. *Die Hilbert'sche Configurationsconstante c besitzt also die Eigenschaft, eine obere Grenze darzustellen für den Quotienten der Schwankungen der ursprünglich auf σ vorgeschriebenen Function f und der auf Grund derselben gebildeten Function f'* [vgl. (1)].

Das Wesentliche an diesem Resultate liegt nun darin, dass wir bei seiner Herleitung *keinerlei speciellere Voraussetzungen* über die Beschaffenheit der vorgelegten Curve oder Fläche σ, oder über den Werth der Configurationsconstanten c gemacht haben. *Dieser Satz gilt daher auch ganz allgemein, gleichgültig ob z. B. die gegebene Curve oder Fläche σ überall convex oder aber convex-concav ist.*

Bemerkung. — Aus den obigen Betrachtungen geht hervor, dass die Differenz $f'_{s_1} - f'_{s_2}$ ihre in (6) angegebene obere Grenze $(G - K) \cdot D(s_1, s_2)$ nur dann wirklich erreicht, wenn die vorgeschriebene Function f unstetig ist, in der Weise, dass sie auf dem Theile α von σ überall den Werth G und auf dem Theile β überall den Werth K besitzt. Dieser so definirten *unstetigen* Function können wir nun aber eine *stetige* Function f beliebig annähern; wir können somit, selbst wenn wir uns auf stetige Functionen f beschränken, die Differenz $f'_{s_1} - f'_{s_2}$ beliebig nahe an $(G - K) \cdot D(s_1, s_2)$ herandrücken, und daraus folgt, dass dieser Ausdruck die *wahre* obere

Grenze für $f'_{s_1} - f'_{s_2}$, und dass demgemäss auch *die Hilbert'sche Configurationsconstante c die wahre d. h. die kleinste obere Grenze für den Quotienten der Schwankungen der Functionen f und f' darstellt.*

§ 3.

Die Methode des arithmetischen Mittels.

Wir schicken den Ausführungen dieses Paragraphen die folgenden Definitionen voraus [vgl. C. N. Abhandl. I, pag. 16 u. 21]:

I. Unter einer *Fundamentalfunction U eines von einer geschlossenen Curve oder Fläche σ begrenzten innern Gebietes* $\mathfrak{J}$ verstehn wir eine Function, welche *innerhalb* dieses Gebietes $\mathfrak{J}$ die *Haupteigenschaften* besitzt [vgl. deren Definition (3) pag. 8], und überdies auch mit ihren Randwerthen, d. i. *mit ihren Werthen auf σ in stetiger Weise zusammenhängt.*

II. Eine *Fundamentalfunction U des Gebietes* $\mathfrak{A}$ *ausserhalb einer geschlossenen Curve oder Fläche σ* muss *innerhalb* dieses Gebietes $\mathfrak{A}$ ebenfalls die *Haupteigenschaften* besitzen und ebenfalls mit ihren Randwerthen, d. h. *ihren Werthen auf σ in stetiger Weise zusammenhängen,* zugleich aber auch noch zwei weitere Bedingungen erfüllen, nämlich *in allen unendlich fernen Punkten ein und denselben Werth* besitzen*), und sodann muss noch das über eine beliebige, σ umschliessende Curve oder Fläche ω hinerstreckte *Integral* $\int \frac{\partial U}{\partial N} d\omega$ *verschwinden,* wenn N die innere Normale des Curven- oder Flächenelementes $d\omega$ bedeutet.

Von solchen *Fundamentalfunctionen* gilt nun der Satz, dass sie *durch Angabe ihrer Randwerthe eindeutig bestimmt* sind, d. h. es giebt nicht zwei verschiedene Fundamentalfunctionen eines Gebietes, die auf dessen Begrenzung ein und dieselben Werthe besitzen, wie sich das leicht, am einfachsten wohl mit Hilfe der *Green*'schen Sätze, beweisen lässt.

Eine schwierigere, aber nicht minder wichtige Frage ist die, ob man diese Randwerthe ganz willkürlich wählen darf, oder genauer ausgedrückt, ob es stets, wie man sich auch auf der Begrenzung eines Gebietes eine

---

*) Dieser Werth braucht durchaus nicht gleich ∞ oder 0 zu sein; darin unterscheiden sich eben diese *Fundamentalfunctionen U* von den wohl schlechthin als *Potentialfunctionen* bezeichneten Functionen V, welche im Unendlichen wie $M \cdot \log \frac{1}{E}$ oder $\frac{M}{E}$, d. h. wie das Potential einer Masse M gleich ∞ bezw. 0 werden, und welche auch nicht die letzte Bedingung erfüllen, für welche vielmehr $\int \frac{\partial V}{\partial N} d\omega$ gleich $2h\pi M$ wird

Function vorgeschrieben denken mag, eine Fundamentalfunction jenes Gebietes giebt, welche am Rande mit jener Function übereinstimmt.

Einer der ersten, der diese *Frage nach der Existenz einer Fundamentalfunction bei beliebig vorgeschriebenen Randwerthen* aufwarf, war *Dirichlet.* — Er beantwortete sie bejahend, doch ist der Beweis, den er für diese seine Behauptung in dem berühmten *Dirichlet'schen Princip* gab, später als nicht stichhaltig erkannt worden.

Strenge Beweise für die Existenz solcher Fundamentalfunctionen haben erst 1869 und 1870 *H. A. Schwarz**) und *C. Neumann* und in neuerer Zeit *Poincaré* in seiner „méthode de balayage"**) geliefert.

Unter diesen Methoden beansprucht wohl, wie schon erwähnt, die von *C. Neumann* angegebene „Methode des arithmetischen Mittels"***) aus dem Grunde das grösste Interesse, weil sie nicht nur die *Existenz* der gesuchten Fundamentalfunction sicherstellt, sondern unter gewissen, weiter unten zu besprechenden Einschränkungen auch die Aufgabe löst, *die Fundamentalfunctionen des innern, sowie des äusseren Gebietes einer geschlossenen Curve oder Fläche σ aus ihren Randwerthen wirklich herzustellen,* sie liefert uns nämlich einen fertigen analytischen Ausdruck für diese gesuchten Functionen, und zwar verlangt sie zu diesem Zweck von uns die Ausführung der folgenden sogleich anzugebenden Operationen:

Methode des arithmetischen Mittels. — *Man bilde auf Grund der gegebenen Randwerthe f der gesuchten Fundamentalfunctionen successive die folgenden Functionen:*

$$(1)\qquad \begin{aligned} W_p &= \frac{1}{h\pi}\int f_\sigma (d\sigma)_p\,, & W_s &= f_s'\,, \\ W_p' &= \frac{1}{h\pi}\int f_\sigma' (d\sigma)_p\,, & W_s' &= f_s''\,, \\ W_p'' &= \frac{1}{h\pi}\int f_\sigma'' (d\sigma)_p, & W_s'' &= f_s''' \\ &\text{etc.} \quad \text{etc.} & &\text{etc.} \end{aligned}$$

---

*) *H. A. Schwarz:* „Zur Theorie der Abbildung", sowie vor Allem: „Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ unter vorgeschriebenen Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen". Ges. mathem. Abhandlungen, Berlin 1890, Band II, pag. 108 bezw. 144.

**) *H. Poincaré:* „Sur les équations aux derivées partielles de la Physique mathématique". Americ. Journal of Mathematics, Baltimore 1890, vol. XII, pag. 211, daselbst § 1.

***) Zum ersten Male veröffentlicht ist diese Methode in den Berichten der Kgl. Sächs. Gesellsch. d. Wiss. 1870 [vgl. die Berichte über die Sitzungen vom 21. April und 31. Oktober 1870]. — Wegen der ausführlicheren Darstellungen, welche die Methode später durch *C. Neumann* gefunden hat, vgl. oben die Anmerkung pag. 1.

d. h. man bilde auf Grund von f die zugehörige Function W_p, *[vgl. (1) pag. 7], bezeichne deren Randwerthe* W_s *mit* f_s' *und bilde auf Grund dieser neuen Randfunction* f' *entsprechend die nächstfolgende Function* W_p', *bezeichne deren Randwerthe* W_s' *mit* f_s'' *und fahre in dieser Weise fort. — Dann werden die so definirten Randfunctionen* $f_s^{(n)}$ *mit wachsendem n gleichmässig gegen eine Constante, die Convergenzconstante C, convergiren.*

Sodann bilde man die beiden folgenden unendlichen Reihen

$$\xi_s = (C - f_s) + (C - f_s') + (C - f_s'') + \cdots, \tag{2a}$$

$$\eta_s = (f_s - f_s') + (f_s'' - f_s''') + (f_s^{IV} - f_s^{V}) + \cdots \tag{2i}$$

und auf Grund der so definirten Functionen ξ_s *und* η_s *die Ausdrücke:*

$$\Phi_a = C + \frac{1}{h\pi}\int \xi_\sigma (d\sigma)_a = C - [W_a + W_a' + W_a'' + W_a''' + \cdots], \tag{3a}$$

$$\Psi_i = C + \frac{1}{h\pi}\int \eta_\sigma (d\sigma)_i = C + [(W_i - W_i') + (W_i'' - W_i''') + \cdots]. \tag{3i}$$

Es stellen alsdann die durch diese Neumann'schen Reihen definirten Functionen Φ_a *und* Ψ_i *diejenigen Fundamentalfunctionen des äussern und innern Gebiets der verlangten geschlossenen Curve oder Fläche* σ *dar, welche auf* σ *die Werthe f, d. i. die vorgeschriebenen Randwerthe besitzen.*

Auf den Beweis für die Richtigkeit dieser Behauptung wollen wir hier nicht näher eingehn; derselbe ist in aller Strenge von *C. Neumann* geführt worden [vgl. Unters. pag. 192—205, und Abhandl. I, pag. 77—88] unter der einzigen Voraussetzung, dass das angegebene Verfahren convergire. — Auf diesen einen Punkt, auf den *Convergenzbeweis* allein wollen wir daher unser Augenmerk richten. Von *C. Neumann* selber ist er allgemein geführt allein für den Fall einer *nirgends concaven Curve oder Fläche* σ. — Wir werden ihn nun in § 5 in etwas weiterem Umfange führen, wir werden daselbst den *„Hilbert'schen Satz"* beweisen, welcher behauptet, dass die angegebene *Neumann'sche Methode des arithmetischen Mittels convergent ist, sobald nur die Configurationsconstante c der begrenzenden Curve oder Fläche* σ *kleiner als 1 ist**).

Doch bevor ich auf den Beweis dieses Satzes eingehe, will ich noch im folgenden Paragraphen einen Hilfssatz beweisen, der für unsere weiteren Beweisführungen zwar nicht unumgänglich nothwendig ist, sie aber

---

*) Dass dies thatsächlich eine Erweiterung des *Neumann'schen* Criteriums ist, d. h. dass unter den Curven und Flächen, welche diese Bedingung erfüllen, die nirgend concaven als specielle Fälle enthalten sind, das soll weiter unten in § 6 näher ausgeführt werden [vgl. pag. 27].

wesentlich abkürzt, ein Satz, der übrigens auch an und für sich einiges Interesse beanspruchen dürfte, da er uns einen tieferen Einblick in das Wesen der aufeinanderfolgenden Functionen $f_s^{(n)}$ gestattet.

§ 4.

Beweis eines Hilfssatzes. Folgerungen.

Die in § 1 ausführlicher behandelte Function W_p dürfen wir nicht etwa ohne Weiteres als Fundamentalfunction der Gebiete innerhalb und ausserhalb σ ansprechen; denn erfüllt sie auch die übrigen an solche Functionen gestellten Anforderungen, so hängt sie doch nicht stetig mit ihren Randwerthen W_s zusammen, die Werthe W_i innerhalb σ nähern sich vielmehr am Rande der Function $W_s + f_s$ und die Werthe W_a ausserhalb σ der Function $W_s - f_s$ [vgl. (7) pag. 8]. Wir können daher nur sagen:

Die Werthe W_i und $W_s + f_s$ bilden in ihrer Gesammtheit eine Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{J}$ innerhalb der geschlossenen Curve oder Fläche σ — und entsprechend die Werthe W_a und $W_s - f_s$ eine Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{A}$ ausserhalb σ.

Nun ist eine Fundamentalfunction entweder innerhalb ihres ganzen Gebietes constant, d. h. hat überall denselben Werth, oder aber sie nimmt ihren grössten und kleinsten Werth nur auf der dieses Gebiet begrenzenden Curve oder Fläche σ, *nicht aber etwa im Unendlichen* an [vgl. C. N. Abhandl. I, pag. 20 u. 26].

Die zuletzt betrachtete Fundamentalfunction W_a, $W_s - f_s$ des Gebietes $\mathfrak{A}$ hat nun im Unendlichen den Werth 0 [vgl. (5) pag. 8]; es bleiben daher nach dem soeben Gesagten nur diese beiden Möglichkeiten:

(1a) *entweder* besitzt jene Function überall im äusseren Gebiete $\mathfrak{A}$, also auch auf σ den Werth 0,

(1b) *oder aber* sie besitzt auf σ sowohl Werthe, die grösser als 0, als auch solche, die kleiner als 0 sind.

Diese Werthe der Function auf σ sind nun aber nach dem obigen Satze enthalten unter der Form $W_s - f_s$ oder $f_s' - f_s$ [vgl. (1), pag. 14]. — Wir gelangen somit zu dem Resultate, dass entweder, nämlich im Falle (1a) für *alle* Punkte s auf σ

(2a) $$f_s' - f_s = 0, \qquad f_s' = f_s$$

ist, oder aber, dass es, nämlich im Falle (1b), auf σ sicher zwei Punkte s_1 und s_2 giebt, derart, dass

$$f_{s_1}' - f_{s_1} > 0 \quad \text{dagegen} \quad f_{s_2}' - f_{s_2} < 0$$

ist. Nun sind aber f und f' *stetige* Functionen [vgl. (8) pag. 9], und Gleiches

gilt daher auch von der Differenz $f' - f$. Eine stetige Function nimmt nun aber alle Werthe zwischen irgend zweien ihrer Werthe wirklich an, und es wird daher diese Differenz auch den zwischen $f'_{s_1} - f_{s_1}$ und $f'_{s_2} - f_{s_2}$ gelegenen Werth 0 annehmen, d. h. es wird auch im Falle (1b) wenigstens *gewisse* Punkte s auf σ geben, in denen

$$(2\text{b}) \qquad f'_s - f_s = 0, \qquad f'_s = f_s$$

ist. Wir gelangen somit zu dem Resultate, dass *stets* (d. h. im Falle (1a), sowie (1b)) *die Functionen f und f' gemeinsame Werthe besitzen*, oder genauer ausgedrückt:

Es lassen sich stets solche Werthe finden, welche in gleicher Weise anzutreffen sind unter den Functionswerthen der ursprünglich vorgeschriebenen Function f_s, sowie unter den Werthen der auf Grund von f_s gebildeten Function f'_s [vgl. (1), pag. 9].

Dieser Satz stellt einen Specialfall des zu beweisenden allgemeinen Satzes dar. — Zu diesem gelangen wir, wenn wir, analog wie wir vorhin von der Fundamentalfunction W_a, $f'_s - f_s$ des Gebietes $\mathfrak{A}$ ausgingen, so jetzt ausgehn von einem Aggregat mehrerer solcher Functionen, von der Summe $W_a^{(n)} + W_a^{(n+1)} + W_a^{(n+2)} + \cdots + W_a^{(n+q-1)}$, welche ebenfalls im Unendlichen verschwindet, und zusammen mit den Werthen $(f_s^{(n+1)} - f_s^{(n)}) + (f_s^{(n+2)} - f_s^{(n+1)}) + \cdots + (f_s^{(n+q)} - f_s^{(n+q-1)})$, d. h. mit den Werthen $f_s^{(n+q)} - f_s^{(n)}$, eine Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{A}$ bildet. — Wir gelangen dann, wie man wohl leicht übersieht, durch genau dieselben Schlüsse, die wir oben anwandten, zu dem Resultate, dass es *stets* auf σ solche Punkte s giebt, in denen

$$(3) \qquad f_s^{(n+q)} - f_s^{(n)} = 0, \qquad f_s^{(n+q)} = f_s^{(n)}$$

ist, oder dass *die Functionen $f^{(n+q)}$ und $f^{(n)}$ stets gemeinsame Werthe haben.* — Dieses Resultat können wir so aussprechen:*)

Hilfssatz. — *Wie wir auch aus der Reihe der unendlich vielen in* (1) *pag.* 14 *definirten aufeinanderfolgenden Functionen f_s, f'_s, f''_s, f'''_s, etc. zwei beliebige $f_s^{(n)}$ und $f_s^{(n+q)}$ herausgreifen mögen, stets werden sich solche Werthe finden lassen, die sowohl anzutreffen sind unter den Functionswerthen der einen, sowie der andern dieser beiden Functionen.* —

Wir greifen jetzt zurück auf die Gleichungen (2a) und (2b) und leiten aus ihnen in leicht ersichtlicher Weise die folgenden beiden Ungleichungen ab:

$$(4) \qquad G' \geqq K, \qquad K' \leqq G,$$

und entsprechend aus (3), wenn wir noch allgemein den grössten und den

*) Wir sehen dabei ab von dem für uns unwesentlichen Umstande, dass diese gemeinsamen Werthe auch theilweise *in denselben Punkten von σ* anzutreffen sind.

kleinsten Werth der Function $f_s^{(n)}$ mit $G^{(n)}$, bezw. mit $K^{(n)}$ bezeichnen, diese beiden **allgemeinen** Ungleichungen:

$$G^{(n+g)} \geqq K^{(n)}, \qquad K^{(n+g)} \leqq G^{(n)}. \tag{5}$$

Diese können wir dann geradezu als den analytischen Ausdruck des soeben ausgesprochenen Satzes ansehn, wie das wohl am einfachsten aus der folgenden geometrischen Darstellungsweise zu ersehen ist.

Wir tragen, z. B. im Specialfalle (4) der Ungleichungen (5), auf zwei benachbarten Ordinaten eines rechtwinkligen Coordinatensystems die Werthe K und G, bezw. K' nnd G' ab. Dann können wir die Ordinaten der zwischen K und G bezw. K' und G' gelegenen Punkte ansehn als Repräsentanten der Functionswerthe von f_s bezw. f_s'. — Die Bedingungen (4) verlangen dann, dass sich diese beiden Strecken KG und $K'G'$ übereinander schieben, dass ihnen Punkte mit gleichen Ordinaten angehören, d. h. sie besagen, dass thatsächlich die Functionen f_s und f_s' gemeinsame Werthe besitzen. q. e. d.

Um nun weiterzugehn, beachten wir, dass diesen Bedingungen (4) im Ganzen auf vier verschiedene Arten genügt werden kann, dass dieses Uebereinandergreifen der Strecken KG und $K'G'$ auf vier verschiedene Arten stattfinden kann, welche die folgenden, wohl auch ohne weitere Erklärung verständlichen Schemata zur Anschauung bringen:

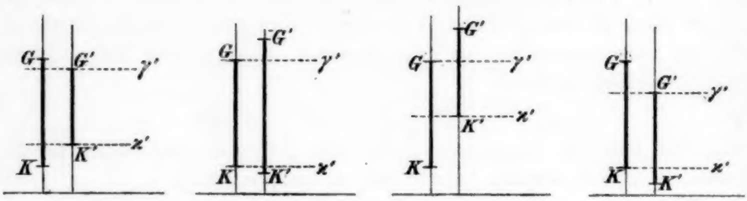


Fig. 2.

Diesen Figuren entnehmen wir sofort, dass wenn wir den grössten und den kleinsten der den beiden Functionen f_s und f_s' *gemeinsamen* Werthe mit γ' und $\varkappa'$ bezeichnen, stets

$$\gamma' = G \textit{ oder } G', \qquad \varkappa' = K \textit{ oder } K' \tag{6}$$

ist. — Nunmehr ziehen wir noch die Function f_s'' mit in den Bereich unserer Betrachtungen. Da sie nach unserem ersten Satze sowohl gemeinsame Werthe mit f_s, wie auch mit f_s' haben muss, so entsprechen ihre extremen Werthe G'' und K'', eben nach (5), den Bedingungen

$$\begin{matrix} G'' \geqq K \\ K'' \leqq G \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} G'' \geqq K' \\ K'' \leqq G', \end{matrix}$$

also zufolge (6) sicherlich auch den Relationen

(7) $$G'' \geqq \varkappa', \quad K'' \leqq \gamma',$$

welche besagen, dass die Intervalle $K''G''$ und $\varkappa'\gamma'$ sich theilweise überdecken, dass f_s'' somit auch Werthe annimmt, die zwischen $\varkappa'$ und γ' gelegen sind, die also sowohl unter den Werthen von f_s, als auch von f_s' anzutreffen sind, d. h. *die drei Functionen f_s, f_s' und f_s'' besitzen gleichzeitig ihnen allen dreien gemeinsame Werthe.*

Den grössten und kleinsten dieser Werthe, welche also den Intervallen $\varkappa'\gamma'$ und $K''G''$ gleichzeitig angehören, bezeichnen wir nun mit γ'' und $\varkappa''$. — Dann folgt, ähnlich wie oben, aus der geometrischen Darstellung, dass:

$$\gamma'' = \gamma' \text{ oder } G'', \qquad \varkappa'' = \varkappa' \text{ oder } K'',$$

oder aber, unter Berücksichtigung der Werthe (6) von γ' und $\varkappa'$, dass:

(8) $$\gamma'' = G \text{ oder } G' \text{ oder } G'', \qquad \varkappa'' = K \text{ oder } K' \text{ oder } K''$$

— Die nächstfolgende Function f_s''' hat nun gemeinsame Werthe sowohl mit f_s wie mit f_s', wie auch mit f_s''; es ist daher [vgl. (5)]

$$\begin{matrix} G''' \geqq K \\ K''' \leqq G \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} G''' \geqq K' \\ K''' \leqq G' \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} G''' \geqq K'', \\ K''' \leqq G'', \end{matrix}$$

d. h. nach (8) sicherlich auch:

(9) $$G''' \geqq \varkappa'', \qquad K''' \leqq \gamma'',$$

woraus wieder folgt, dass die Werthe von f_s''' wenigstens theilweise in dem Intervall $\varkappa''\gamma''$ der den Functionen f_s, f_s' und f_s'' gemeinsamen Werthe enthalten sind, dass es somit *Werthe giebt, die allen vier Functionen f_s, f_s', f_s'' und f_s''' gleichzeitig gemeinsam sind.*

Mit dieser Schlussweise können wir nun fortfahren; wir kommen dann zu dem Resultate, dass es bei ganz beliebigem n stets ein Werthintervall $\varkappa^{(n)}\gamma^{(n)}$ giebt, welches *gleichzeitig* den Werthen der $n+1$ Functionen $f_s, f_s', f_s'', \cdots, f_s^{(n)}$ angehört. — Da dieses Intervall $\varkappa^{(n)}\gamma^{(n)}$ seiner Natur nach nun aber mit wachsendem n niemals grösser, wohl aber kleiner werden kann, so ist der Fall nicht ausgeschlossen, dass es sich schliesslich auf einen einzigen Punkt zusammenzieht, und wir werden daher unser Resultat nur so aussprechen dürfen:

Erste Folgerung. — *Es giebt sicher mindestens einen Werth, welcher anzutreffen ist unter den Werthen der sämmtlichen aufeinanderfolgenden Functionen f_s, f_s', f_s'', etc.* [vgl. (1), pag. 14].

Sollten sich nun diese Functionen schliesslich immer weniger und weniger von einem bestimmten Werthe unterscheiden, also in unserer früheren Ausdrucksweise eine *Convergenzconstante* besitzen [vgl. pag. 15],

so kann diese allein augenscheinlich jenen einzigen allen Functionen gemeinsamen Werth darstellen und wir gelangen somit zu folgendem Satze:

Zweite Folgerung. — *Vorausgesetzt die aufeinanderfolgenden Functionen f_s, f_s', f_s'', etc. besässen eine Convergenzconstante, so ist deren Werth sicherlich enthalten unter den Werthen einer jeden dieser Functionen, also jedenfalls auch unter den Werthen der ursprünglich auf der vorgelegten Curve oder Fläche σ vorgeschriebenen Function f_s.*

§ 5.

Beweis des *Hilbert*'schen Satzes.

Wir wenden uns nunmehr zum Beweise des schon in § 3 erwähnten *Hilbert*'schen Satzes. — Demgemäss nehmen wir im Folgenden immer an, die betrachtete Curve oder Fläche σ habe die Eigenschaft, dass ihre Configurationsconstante [vgl. § 2, pag. 12]

$$(1) \qquad c < 1$$

sei und zwar wirklich *kleiner* als 1 (nicht nur ≤ 1). Unter dieser Voraussetzung wollen wir sodann die Convergenz der in § 3 angegebenen Methode des arithmetischen Mittels beweisen.

Dieser Convergenzbeweis wird naturgemäss in zwei getrennte Theile zerfallen, nämlich zunächst in den Beweis für die Existenz einer endlichen Convergenzconstanten C, und sodann in den Beweis für die Convergenz der Reihen (3a) und (3i) pag. 15, oder, wovon diese eine blosse Folge ist, die *gleichmässige* Convergenz der Reihen (2a) und (2i) pag. 15. — Von diesen beiden Theilen des Convergenzbeweises macht die weitaus grösseren Schwierigkeiten der erstere, der *Beweis für die Existenz einer endlichen Convergenzconstanten C;* auf diesen Beweis wollen wir daher zunächst eingehn. Nach Absolvirung dieses Beweises wird sich die Convergenz der Reihen (2a) und (2i) pag. 15 so gut wie von selbst ergeben.

Wir knüpfen an die Ungleichungen (5) pag. 18 an und bringen sie im Specialfalle $n = 0$ zur Anwendung, wo sie die folgende Gestalt annehmen:

$$K^{(q)} \leq G, \qquad G^{(q)} \geq K.$$

Wir addiren, bezw. subtrahiren jetzt beiderseits $G^{(q)} - K^{(q)}$, um zu erhalten:

$$(2) \qquad G^{(q)} \leq G + (G^{(q)} - K^{(q)}), \qquad K^{(q)} \geq K - (G^{(q)} - K^{(q)}).$$

Nun fanden wir ganz allgemein in (10) pag. 12:

$$G' - K' \leq (G - K) \cdot c.$$

Da aber durch genau dieselben Operationen, durch die f' aus f entstand, auch f'' aus f' hervorgeht, und weiter f''' aus f'' u. s. w. f. [vgl. (1) pag. 14],

so wird die nämliche Relation zwischen den Schwankungen je zweier aufeinanderfolgender Functionen bestehn, d. h. es folgt analog:

$$G'' - K'' \leqq (G' - K') \cdot c, \qquad G''' - K''' \leqq (G'' - K'') \cdot c, \quad \text{u. s. w. f.,}$$

und hieraus ergiebt sich das folgende Formelsystem:

$$(3) \qquad \left\{\begin{array}{l} G' - K' \leqq (G - K) \cdot c, \\ G'' - K'' \leqq (G - K) \cdot c^2, \\ G''' - K''' \leqq (G - K) \cdot c^3, \\ G^{IV} - K^{IV} \leqq (G - K) \cdot c^4, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ G^{(n)} - K^{(n)} \leqq (G - K) \cdot c^n. \end{array}\right.$$

Mit Rücksicht hierauf nehmen dann die Formeln (2) die Gestalt an:

$$G^{(q)} \leqq G + (G - K) \cdot c^q, \qquad K^{(q)} \geqq K - (G - K) \cdot c^q,$$

woraus weiter, da unserer Voraussetzung (1) zufolge $c < 1$ ist, *a fortiori*

$$(4) \qquad G^{(q)} \leqq G + (G - K), \qquad K^{(q)} \geqq K - (G - K)$$

folgt, oder aber, wenn wir jetzt noch der Gleichförmigkeit halber die ganz beliebig gewählte Zahl q mit n bezeichnen:

$$(5) \qquad G^{(n)} \leqq 2G - K, \qquad K^{(n)} \geqq 2K - G.$$

Damit haben wir zunächst das Resultat erhalten, dass *die sämmtlichen Functionen $f^{(n)}$ stets zwischen den endlichen Grenzen $2G - K$ und $2K - G$ bleiben*, niemals also etwa, wie gross wir n auch wählen mögen, unendlich gross werden können.

Nun folgt weiter aus der letzten Formel (3) unter Rücksicht auf unsere Voraussetzung $c < 1$

$$\lim_{n=\infty} (G^{(n)} - K^{(n)}) \leqq 0.$$

oder, da $G^{(n)} - K^{(n)}$ eine wesentlich positive Grösse ist, d. h. *niemals negativ* werden kann:

$$(6) \qquad \lim_{n=\infty} (G^{(n)} - K^{(n)}) = 0,$$

d. h. die Schwankungen der aufeinanderfolgenden Functionen f, f', f'', f''', etc. werden immer kleiner bis zur 0 herab; je grösser n ist, umsoweniger unterscheidet sich also $f^{(n)}$ von einer Constanten, die aufeinanderfolgenden Functionen gehn also schliesslich in Constanten über, die nach unseren obigen Feststellungen [vgl. (5)] sicher zwischen endlichen Grenzen liegen müssen. — Damit allein ist aber noch keineswegs der Beweis erbracht, dass diese Functionen wirklich eine endliche Convergenzconstante besitzen, denn wir haben bisher nur bewiesen, dass sich bei hinreichend grossem n die e i n z e l n e n Functionen $f^{(n)}$ beliebig wenig von Constanten unter-

scheiden, aber noch nicht, dass diese einzelnen Constanten alle einander gleich sind. — Dies ergiebt sich erst, wenn wir den im vorigen Paragraphen bewiesenen Satz zu Hilfe nehmen, dass die sämmtlichen aufeinanderfolgenden Functionen f, f', f'', etc. sicher einen gemeinsamen Werth haben müssen. Dieser Satz schliesst nämlich den Fall aus, dass die Werthe der Constanten, denen sich schliesslich die Functionen $f^{(n)}$ nähern, sich von Function zu Function ändern, z. B. den Fall, dass sich die Functionen $f^{(2\nu)}$ und $f^{(2\nu+1)}$ mit wachsendem ν zwei verschiedenen Constanten nähern. — Es bleibt somit nur die Möglichkeit, dass thatsächlich die Functionen f, f', f'', f''', etc. sämmtlich gegen ein und dieselbe Constante convergiren, dass sie eine *Convergenzconstante* besitzen. q. e. d.

Doch um jeden Zweifel an der Richtigkeit dieser Ausführungen zu beseitigen, wollen wir noch einen Augenblick bei diesem Gegenstande verweilen, und die Sachlage mehr an der Hand mathematischer Formeln prüfen.

Wie wir, ausgehend von der ursprünglich auf σ vorgeschriebenen Function f, zu dem in den Formeln (4) enthaltenen Resultate gelangten, so können wir auch von einer der späteren Functionen, z. B. von $f^{(n)}$ ausgehn, wo n eine beliebige aus der Reihe der Zahlen $1, 2, 3, \cdots$ bedeutet, und werden dann zu dem analogen Resultate gelangen und die folgenden Ungleichungen erhalten:

$$G^{(n+q)} \leqq G^{(n)} + (G^{(n)} - K^{(n)}), \qquad K^{(n+q)} \geqq K^{(n)} - (G^{(n)} - K^{(n)}),$$

d. i.

$$G^{(n+q)} - G^{(n)} \leqq G^{(n)} - K^{(n)}, \qquad K^{(n)} - K^{(n+q)} \leqq G^{(n)} - K^{(n)}.$$

Addiren wir jetzt in den beiden Relationen beiderseits $G^{(n)} - K^{(n)}$, so folgt

$$G^{(n+q)} - K^{(n)} \leqq 2(G^{(n)} - K^{(n)}), \qquad G^{(n)} - K^{(n+q)} \leqq 2(G^{(n)} - K^{(n)}).$$

In diesen Ungleichungen sind nun aber die Ausdrücke linkerhand augenscheinlich obere Grenzen für $f_{s'}^{(n+q)} - f_s^{(n)} = u$, bezw. $f_s^{(n)} - f_{s'}^{(n+q)} = -u$, wenn s und s' zwei *ganz beliebige Punkte auf* σ bedeuten. Es folgt also, dass:

$$u \leqq 2(G^{(n)} - K^{(n)}) \quad \text{und} \quad -u \leqq 2(G^{(n)} - K^{(n)})$$

ist, sicherlich also auch, dass:

$$\text{abs}\, u \ \text{ d. i. } \ \text{abs}\,(f_{s'}^{(n+q)} - f_s^{(n)}) \leqq 2(G^{(n)} - K^{(n)})$$

oder mit Rücksicht auf die Formeln (3):

$$\text{abs}\,(f_{s'}^{(n+q)} - f_s^{(n)}) \leqq 2(G - K) \cdot c^n. \tag{7}$$

Da nun unserer Voraussetzung (1) zufolge, c ein echter Bruch ist, so besagt diese Relation (7), dass wir durch Annahme eines genügend grossen n es stets erreichen können, dass sich die *sämmtlichen Functionswerthe aller auf $f^{(n)}$ folgenden Functionen $f^{(n+q)}$* $(q = 1, 2, 3, \cdots)$ von irgend einem

Werthe $f_s^{(n)}$ dieser Function $f^{(n)}$ beliebig wenig unterscheiden. — Das heisst aber nichts anderes, als dass, wie wir beweisen wollten, die sämmtlichen *aufeinanderfolgenden Functionen* f, f', f'', f''', *etc. in allen Punkten von* σ *gleichmässig gegen ein und dieselbe, nach* (5) *sicher endliche, Constante* C convergiren, sodass wir also schreiben können:

$$(8) \qquad \lim_{n=\infty} f^{(n)} = C \qquad \text{oder kürzer} \qquad f^{(\infty)} = C.$$

Diese so definirte Constante C wollen wir nun also die *Convergenzconstante* jener aufeinanderfolgenden Functionen, oder kurz die der ursprünglich auf der Curve oder Fläche σ vorgeschriebenen Function f zugehörige Convergenzconstante nennen.

Wir haben damit also den Beweis für die Existenz einer endlichen Convergenzconstanten in aller Strenge geliefert. — Um sodann auch noch *die Convergenz der Reihen* (2a) *und* (2i) pag. 15, d. i. der beiden Reihen

$$\xi_s = (C - f_s) + (C - f_s') + (C - f_s'') + \cdots,$$
$$\eta_s = (f_s - f_s') + (f_s'' - f_s''') + (f_s^{IV} - f_s^{V}) + \cdots$$

zu beweisen, brauchen wir jetzt nur die Formel (7) auf die speciellen Fälle $q = \infty$ bezw. $q = 1$ und $s' = s$ anzuwenden; wir erhalten dann unter Rücksicht auf (8):

$$\text{abs}\,(C - f_s^{(n)}) \leqq 2(G-K)c^n \quad \text{bezw.} \quad \text{abs}\,(f_s^{(n)} - f_s^{(n+1)}) \leqq 2(G-K)c^n,$$

woraus sofort die absolute Convergenz der Reihen ξ_s und η_s folgt, ja sogar noch weiter folgt, dass diese *Reihen gleichmässig in allen Punkten* s *von* σ *convergiren.*

Wir haben jetzt somit sowohl die Existenz einer endlichen Convergenzconstanten, als auch die Convergenz der Reihen ξ_s und η_s, und damit überhaupt die Convergenz der Methode des arithmetischen Mittels bewiesen, unter der alleinigen Voraussetzung (1), dass die Configurationsconstante c der gegebenen Curve oder Fläche σ *kleiner als* 1 sei. — Das ist aber die Behauptung des schon früher (§ 3) erwähnten *Hilbert*'schen Satzes. Wir haben somit diesen Satz jetzt in aller Strenge bewiesen. Er lautet, um ihn nochmals auszusprechen, folgendermassen:

Hilbert'scher Satz. — *Die Methode des arithmetischen Mittels [vgl. pag. 14] ist sicher convergent, sobald nur die Configurationsconstante c der betrachteten Curve oder Fläche* σ *wirklich kleiner als* 1 *ist.*

Wieder ist hierbei besonders hervorzuheben, dass wir *keinerlei specielle Annahmen* über die Beschaffenheit der betrachteten Curve oder Fläche σ gemacht haben, im Besonderen auch die Frage, ob σ nirgends concav, oder aber convex-concav sei, ganz offen gelassen haben.

§ 6.

Ueber den Zusammenhang der *Hilbert*'schen und der *Neumann*'schen Configurationsconstanten. Folgerungen.

Die Oeffnungsfunction einer Curve oder Fläche σ in Bezug auf zwei Punkte s_1 und s_2 [vgl. (7) pag. 11]

$$D(s_1, s_2) = \frac{1}{h\pi}\left\{\int\limits_\alpha (d\alpha)_{s_1} - \int\limits_\alpha (d\alpha)_{s_2}\right\} \tag{1}$$

lässt sich noch in eine andere Form versetzen, die namentlich darum beachtenswerth ist, weil sie sofort den Zusammenhang zwischen der *Hilbert*'schen und der *Neumann*'schen Configurationsconstanten erkennen lässt.*)

Nach der Formel (10′) pag. 9 ist

$$w_{s_1} = 1, \quad \text{d. i.} \quad \frac{1}{h\pi}\int (d\sigma)_{s_1} = 1$$

oder aber es folgt, wenn wir uns σ wieder in die beiden Theile α und β zerlegt denken [vgl. (3) pag. 10]:

$$0 = 1 - \frac{1}{h\pi}\left\{\int\limits_\alpha (d\alpha)_{s_1} + \int\limits_\beta (d\beta)_{s_1}\right\}.$$

Addiren wir nun diese Relation zu der Gleichung (1), so erhalten wir:

$$D(s_1, s_2) = 1 - \frac{\int (d\alpha)_{s_2} + \int (d\beta)_{s_1}}{h\pi}, \tag{2}$$

und als das Maximum dieser Function ist die *Hilbert*'sche Configurationsconstante c definirt:

$$c = \text{Max.}\left\{1 - \frac{\int (d\alpha)_{s_2} + \int (d\beta)_{s_1}}{h\pi}\right\}. \tag{3}$$

Vergleichen wir damit einmal die Definition der *Neumann*'schen Configurationsconstanten λ! — *C. Neumann* definirt etwa folgendermassen [vgl. z. B. Unters. pag. 172]:

„Man zerlege die gegebene Curve oder Fläche σ *in willkürlicher Weise* in zwei Theile α und β, markire überdies auf σ zwei beliebige Punkte s_1 und s_2, und bilde sodann den Ausdruck:

$$\zeta = 1 - \frac{\int (d\alpha)_{s_2} + \int (d\beta)_{s_1}}{2h\pi}. \tag{4}$$

*) Wegen einer weiteren, besonders einfachen, Darstellungsform für die Oeffnungsfunction vgl. den Anfang von § 11, daselbst Formel (2) pag. 46.

„Der Werth dieses Ausdrucks wird dann abhängen einmal von der Eintheilung von σ in die Theile α und β und sodann von der Lage der Punkte s_1 und s_2. — Der grösste aller Werthe, deren ζ bei beliebiger Abänderung der Eintheilung von σ, sowie der Lage von s_1 und s_2 fähig ist, ist dann die Configurationsconstante λ von σ, also

$$\lambda = \text{Max.} \left\{1 - \frac{\int (d\alpha)_{s_2} + \int (d\beta)_{s_1}}{2h\pi}\right\}. \text{“} \quad (5)$$

—

Um nun zu diesem Maximum von ζ zu gelangen, können wir augenscheinlich so verfahren: Wir suchen zunächst *bei festem aber unbestimmtem* s_1 *und* s_2 diejenige Eintheilung von σ, für welche ζ den grössten Werth annimmt, machen in dieser Weise also die Eintheilung abhängig von s_1
(6) und s_2, und verwandeln somit ζ in eine Function $\zeta(s_1, s_2)$ *allein der Lage von* s_1 *und* s_2 — und suchen alsdann das Maximum dieser Function $\zeta(s_1, s_2)$ auf.

Bestimmen wir nun aber wirklich bei festem aber unbestimmtem s_1 und s_2 die Eintheilung von σ, für welche ζ seinen grössten Werth annimmt, so kommen wir augenscheinlich zu der *Hilbert*'schen Eintheilung (3) pag. 10; denn wollten wir etwa ein Element $d\sigma$, das von s_1 aus grösser erscheint, als von s_2, anstatt zu α zum Theile β rechnen, so würden wir augenscheinlich die Summe $\int (d\alpha)_{s_2} + \int (d\beta)_{s_1}$ nur vergrössern, und somit ζ verkleinern [vgl. (4)]. — Es folgt somit, dass wir bei der aus der *Neumann*'schen Definition hergeleiteten Function

$$\zeta(s_1, s_2) = 1 - \frac{\int (d\alpha)_{s_2} + \int (d\beta)_{s_1}}{2h\pi} \qquad \text{[vgl. (6)].} \quad (7)$$

unter α und β genau dieselben Theile von σ zu verstehn haben, wie bei der Oeffnungsfunction $D(s_1, s_2)$.

Beachten wir aber dies, so ist aus den Darstellungen (2) und (7) der Zusammenhang zwischen beiden Functionen sofort ersichtlich: Setzen wir

$$D(s_1, s_2) = 1 - \xi(s_1, s_2), \qquad \text{so ist} \qquad \zeta(s_1, s_2) = 1 - \frac{1}{2}\, \xi(s_1, s_2),$$

die Function $\zeta(s_1, s_2)$ liegt also stets in der Mitte zwischen der Oeffnungsfunction $D(s_1, s_2)$ und der Zahl 1, oder: *Für jedwede Lage der Pole* s_1 *und* s_2 *auf* σ *ist die Function* $\zeta(s_1, s_2)$ *das arithmetische Mittel aus der Zahl* 1 *und der Oeffnungsfunction* $D(s_1, s_2)$; es werden demgemäss auch beide Functionen gleichzeitig, d. h. für dieselbe Lage der Pole s_1 und s_2 ihr Maximum erreichen. — Es überträgt sich also dieser Satz von den

Functionen $\xi(s_1, s_2)$ und $D(s_1, s_2)$ selber sofort auch auf ihre Maxima, d. h. nach (5) und (3) auf die Configurationsconstanten λ und c. Wir erhalten sonach das folgende Resultat:

Erster Satz. — *Die Neumann'sche Configurationsconstante λ ist stets das arithmetische Mittel zwischen der Zahl* 1 *und der Hilbert'schen Configurationsconstanten c der betreffenden Curve oder Fläche σ:*

$$\lambda = \frac{1 + c}{2}. \tag{8}$$

Aus diesem Resultate wollen wir nun noch einige Schlussfolgerungen ziehn: Zunächst ergiebt sich daraus sofort folgender wichtige Satz:

Zweiter Satz. — *Die Neumann'sche und die Hilbert'sche Configurationsconstante einer beliebigen Curve oder Fläche σ sind entweder beide gleichzeitig kleiner als* 1, *oder aber beide gleich* 1, *oder endlich beide grösser als* 1; *niemals also kann die eine der Constanten grösser, die andere aber kleiner als* 1 *sein.*

Wäre es also, wie Herr *Ch. A. Noble* anzunehmen scheint, bereits vor *Hilbert* bekannt gewesen, dass die Methode des arithmetischen Mittels sicher convergirt, sobald nur die Configurationsconstante kleiner als 1 ist, so hätte die *Neumann*'sche Constante λ die Convergenz der Methode in genau demselben Umfange verbürgt, wie die *Hilbert*'sche Constante c, es würde sonach der Bereich der Fälle, in denen die Convergenz der Methode *a priori* zu verbürgen ist, durch die *Hilbert*'schen Betrachtungen gar nicht erweitert sein — das Verdienst von *Hilbert* besteht aber eben gerade darin, dass er zuerst erkannt hat, dass es thatsächlich *völlig hinreichend* für die Convergenz der Methode ist, dass die Configurationsconstante der betrachteten Curve oder Fläche σ kleiner als 1 ist — wie das im vorigen Paragraphen näher ausgeführt ist (*Hilbert*'scher Satz). —

Bei *C. Neumann* spielt noch immer die Frage eine wichtige Rolle, ob die gegebene Curve oder Fläche σ überall *convex*, oder aber convex-concav ist. Das Analogon zu dem in § 2, pag. 12 ganz allgemein bewiesenen Satz, dass die Configurationsconstante c eine obere Grenze darstellt für den Quotienten zweier aufeinanderfolgender Functionen f und f', wird dort nur für den ersteren Fall, für den Fall einer überall convexen, oder richtiger gesagt, einer nirgend concaven Curve oder Fläche σ bewiesen [vgl. Unters. pag. 183—185 und Abhandl. I, pag. 50—56] und dies ist ein wesentlicher Grund, weshalb sich *C. Neumann*, abgesehen von ganz speciellen Fällen, immer auf die Betrachtung solcher nirgends concaver Curven oder Flächen σ beschränkte, — dass er aber für sie ganz allgemein die Convergenz der Methode des arithmetischen Mittels beweisen konnte, das hat seinen Grund in dem folgenden von ihm bewiesenen Satze:

„Die Configurationsconstante λ einer nirgends concaven Curve oder Fläche σ ist stets wirklich kleiner als 1 (nicht etwa nur $\leqq 1$)"*), ein Satz, den *C. Neumann* selber den Angelpunkt seiner Methode nennt.

Dieser Satz [vgl. C. N. Unters. pag. 173 und Abhandl. I, pag. 5 u. 72] lässt sich nun vermittelst unseres obigen zweiten Satzes leicht übertragen auf die *Hilbert*'sche Configurationsconstante c. Es folgt so:

Dritter Satz. — *Die Hilbert'sche Configurationsconstante c einer nirgend concaven Curve oder Fläche σ ist stets wirklich kleiner als* 1 (*nicht etwa nur* $\leqq 1$).

Danach stellt sich die *Neumann*'sche Behauptung, dass die Methode des arithmetischen Mittels für nirgend concave Curven oder Flächen convergirt, jetzt also thatsächlich nur als ein *Specialfall* des *Hilbert*'schen Satzes dar [vgl. die Anmerkung pag. 15]. — Sicher ist dies freilich der bei Weitem wichtigste Specialfall. —

In ähnlicher Weise, wie wir es schon soeben einmal thaten, können wir nun vermittelst unserer beiden ersten Sätze auch noch andere von *C. Neumann* für seine Configurationsconstante λ bewiesene Sätze übertragen auf die *Hilbert*'sche Constante c. — So folgen z. B. aus zwei von *C. Neumann* in seinen „Untersuchungen" [pag. 174—179] bewiesenen Sätzen über λ die beiden folgenden Parallelsätze:

Die Hilbert'sche Configurationsconstante c

einer nirgend concaven Curve entspricht der Relation: $$\lambda \leqq 1 - \frac{\sigma}{\pi\Delta},$$ *wo σ den Umfang, die Länge der Curve, und Δ den Durchmesser des grössten Kreises bedeutet, der irgend drei Punkte mit der Curve gemein hat.*	*einer nirgend concaven Fläche entspricht der Relation:* $$\lambda \leqq 1 - \frac{\sigma}{2\pi\Delta^2},$$ *wo σ die Grösse der Oberfläche (ihren Quadratinhalt) und Δ den Durchmesser der grössten Kugelfläche bedeutet, die irgend vier Punkte mit der Fläche gemein hat.*

Bemerkung. — Solange die Configurationsconstanten λ und c *kleiner als* 1 sind, also im Besonderen bei allen nirgend concaven Curven und Flächen wird, wie aus unserm ersten Satze folgt, die *Neumann*'sche Constante λ stets *grösser* sein, als die *Hilbert*'sche Constante c, sie stellt also eine zu grosse d. h. nie erreichbare obere Grenze für den Quotienten der Schwankungen zweier aufeinanderfolgender Functionen $f^{(n)}$ und $f^{(n+1)}$ dar,

---

*) Der Fall der „Zweisternigkeit", den *C. Neumann* noch besonders ausschliesst, kommt für uns nicht in Betracht, er ist bereits durch unsere Grundvoraussetzung ausgeschlossen, dass σ frei von Spitzen, bezw. Ecken und Kanten sei. [vgl. pag. 6.]

und es folgt daher, dass die Reihen der Methode des arithmetischen Mittels thatsächlich rascher convergiren, als sich dies mit Hilfe der *Neumann*'schen Constanten λ beweisen liess.

Sind andrerseits die Configurationsconstanten λ und c *grösser als* 1, so folgt (wieder aus dem ersten Satze), dass die *Neumann*'sche Constante λ *kleiner* ist als die *Hilbert*'sche Constante c. Nun ist aber nach dem am Schlusse von § 2, pag. 13 bewiesenen Satze diese letztere Constante c stets die wahre, d. h. die kleinste obere Grenze jenes Quotienten und es stellt somit die (kleinere) *Neumann*'sche Constante λ überhaupt nicht mehr eine obere Grenze für diesen Quotienten dar, und verliert damit jede wesentliche Bedeutung.

In jedem Falle also, mögen nun diese Constanten kleiner oder grösser als 1 sein, ist die *Hilbert*'sche Constante c der *Neumann*'schen Constanten λ in gewisser Hinsicht überlegen.

Der letztere Fall, dass die Configurationsconstanten grösser als 1 sind, interessirt uns nun im Allgemeinen zwar weniger, wenigstens, wenn es sich um die Randwerthaufgabe handelt, d. h. um die Aufgabe, die Fundamentalfunction eines Gebietes aus ihren Randwerthen zu bestimmen. — Nur bei Behandlung physikalischer Probleme werden wir uns später auch mit Gebieten beschäftigen, deren Configurationsconstanten grösser als 1 sind, und dann werden uns die letzteren Bemerkungen wesentliche Dienste leisten.

§ 7.

Die Configurationsconstante des Kreises. Ueber das Verschwinden der Oeffnungsfunction in der Ebene.

Wir stellen uns die Aufgabe, die Configurationsconstante c eines Kreises zu berechnen.

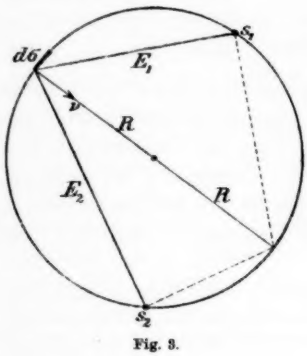


Fig. 3.

Es sei gegeben ein Kreis vom Radius R. Alsdann markiren wir auf demselben zwei beliebige Punkte s_1 und s_2, deren Entfernungen von dem Peripherieelemente $d\sigma$ wir mit E_1 bezw. E_2 bezeichnen. Dann ist, wie sofort aus der Figur ersichtlich:

$$E_1 = 2R \cdot \cos(\nu, E_1), \quad E_2 = 2R \cdot \cos(\nu, E_2)$$

und daher [vgl. (2) pag. 7 ($h = 1$)]:

$$(d\sigma)_{s_1} = \frac{\cos(\nu, E_1)}{E_1}\, d\sigma = \frac{d\sigma}{2R},$$

$$(d\sigma)_{s_2} = \frac{\cos(\nu, E_2)}{E_2}\, d\sigma = \frac{d\sigma}{2R},$$

oder aber es ist, was für ein Peripherieelement wir auch unter $d\alpha$ verstehn mögen, stets:

$$(d\alpha)_{s_1} - (d\alpha)_{s_2} = \frac{d\alpha}{2R} - \frac{d\alpha}{2R} = 0,$$

und mithin die Oeffnungsfunction des Kreises mit Bezug auf die Pole s_1 und s_2 [vgl. (7) pag. 11 ($h=1$)]:

$$D(s_1, s_2) = \frac{1}{\pi}\int [(d\alpha)_{s_1} - (d\alpha)_{s_2}] = 0.$$

Dies gilt, wie wir auch die Lage der beiden Punkte s_1 und s_2 auf der Kreisperipherie wählen mögen, es wird somit auch noch das *Maximum* der Oeffnungsfunction, d. h. die *Hilbert'*sche Configurationsconstante c verschwinden:

Die Hilbert'sche Configurationsconstante des Kreises hat den Werth

$$c = 0.$$

Damit hängt es, wie auch *Noble* bemerkt, zusammen, dass die Methode des arithmetischen Mittels, angewandt auf die Kreisfläche, schon von selbst beim ersten Gliede abbricht, indem bereits die Function f' einen constanten Werth C annimmt [vgl. C. N. Abhandl. I, pag. 93, (4)]. —

Die *Neumann'*sche Configurationsconstante λ ist nun stets in der Mitte gelegen zwischen der *Hilbert'*schen Constanten c und der Zahl 1, es ist stets $\lambda = \frac{1+c}{2}$ [vgl. (8) pag. 26], also beim Kreise:

$$\lambda = \frac{1}{2},$$

und dies ist thatsächlich der von *C. Neumann* für die Configurationsconstante des Kreises angegebene Werth [vgl. Unters. pag. 174]. —

Die obigen Betrachtungen über die Oeffnungsfunction und die *Hilbert'*sche Configurationsconstante des Kreises legen nun die Frage ungemein nahe, ob es noch andere Curven giebt, deren Configurationsconstante c gleich 0 ist, oder ob es überhaupt ausser der Kreislinie noch andere Curven σ giebt, für welche die Oeffnungsfunction $D(s_1, s_2)$ verschwinden kann, auch ohne dass die beiden auf σ gelegenen Punkte s_1 und s_2 zusammenfallen [vgl. (8) pag. 11].

Um dies näher zu untersuchen, kehren wir die Fragestellung in gewissem Sinne um; wir denken uns zwei *nicht zusammenfallende Punkte* s_1 *und* s_2 *fest gegeben* und fragen dann, ob es irgend eine Curve σ durch diese Punkte giebt, deren Oeffnungsfunction $D(s_1, s_2)$ mit Bezug auf s_1 und s_2 verschwindet. — Dazu ist es, wie wir schon oben [vgl. (9) pag. 11] anmerkten, nothwendig, dass die *sämmtlichen* Curvenelemente $d\sigma$ von s_1 und s_2 aus gleich gross erscheinen, dass also ganz allgemein

(1) $$(d\sigma)_{s_1} = (d\sigma)_{s_2}, \quad \text{d. h.} \quad \frac{\cos(\nu, E_1)}{E_1}\,d\sigma = \frac{\cos(\nu, E_2)}{E_2}\,d\sigma$$

ist, wenn E_1 und E_2 die Entfernungen des Elementes $d\sigma$ von s_1 bezw. s_2 bedeuten.

Es handelt sich also zunächst darum, diese Bedingung (1) für die Curve σ noch in andrer Weise zu formuliren. Zu diesem Zweck führen wir rechtwinklige Coordinaten ein, derart, dass die x-Axe durch s_1 und s_2 geht und der Anfangspunkt die Linie $\overline{s_1 s_2} = 2a$ halbirt, sodass also s_1 und s_2 die Abscissen $+a$ bezw. $-a$ besitzen. — Es ist dann

$$\cos(\nu, E_1) = \cos(\nu, x)\cos(E_1, x) + \cos(\nu, y)\cos(E_1, y) = -\frac{(x-a)\cos(\nu, x) + y\cos(\nu, y)}{E_1},$$

und

$$\cos(\nu, E_2) = \cos(\nu, x)\cos(E_2, x) + \cos(\nu, y)\cos(E_2, y) = -\frac{(x+a)\cos(\nu, x) + y\cos(\nu, y)}{E_2}.$$

Nehmen wir nun an, die gesuchte Curve σ habe in jenem Coordinatensysteme die Gleichung

$$F(x, y) = \text{const.}, \tag{2}$$

so sind $\cos(\nu, x)$ und $\cos(\nu, y)$ bekanntlich proportional mit $\frac{\partial F}{\partial x}$ und $\frac{\partial F}{\partial y}$ und wir können daher die Bedingung (1) jetzt auch so schreiben:

$$\frac{(x-a)\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y}}{E_1^2} = \frac{(x+a)\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y}}{E_2^2},$$

oder aber, wenn wir noch die Bedeutungen von E_1^2 und E_2^2:

$$E_1^2 = (x-a)^2 + y^2, \qquad E_2^2 = (x+a)^2 + y^2$$

berücksichtigen, nach einfacher Umformung auch so:

$$(x^2 - y^2 - a^2)\frac{\partial F}{\partial x} + 2xy\frac{\partial F}{\partial y} = 0. \tag{3}$$

Soll also die mit Bezug auf s_1 und s_2 als Pole gebildete Oeffnungsfunction für die Curve $F(x, y) = \text{const.}$ verschwinden, so muss die Function $F(x, y)$ der Differentialgleichung (3) genügen. — Diese lässt nun aber nur eine einzige Lösung zu, die sich nach bekannten Regeln auch sehr leicht bestimmen lässt. Sie lautet:

$$F(x, y) = \frac{x^2 + y^2 - a^2}{y}.$$

Die einzigen Curven, welche die angegebene Eigenschaft besitzen, sind also durch die Gleichung

$$F(x, y) = \frac{x^2 + y^2 - a^2}{y} = \text{const.} = 2b$$

oder

$$x^2 + (y - b)^2 = a^2 + b^2$$

dargestellt, wo b also eine ganz willkürliche Constante ist, d. h. es sind dies durch s_1 und s_2 hindurchgehende Kreise, wie das im besten Einklang steht mit unseren obigen Resultaten. — Doch geht erst aus unseren letzten Betrachtungen unzweifelhaft hervor, dass *der Kreis die einzige ebene Curve ist, deren Oeffnungsfunction verschwinden kann ohne dass ihre Pole zusammenfallen**), woraus sofort weiter der Satz folgt: *der Kreis ist die einzige Curve in der Ebene, deren Configurationsconstante c gleich* 0 *ist.*

§ 8.

Die Configurationsconstante der Ellipse. Ein Satz über *Fourier*'sche Reihen.

Wir stellen uns die Aufgabe, die Oeffnungsfunction und die Configurationsconstante der Ellipse zu bestimmen.

Zu diesem Zweck werden wir gut daran thun, elliptische Coordinaten λ, ϑ einzuführen, welche mit den rechtwinkligen Coordinaten x, y durch die folgenden Relationen zusammenhängen:

$$(1)\quad x = k\,\frac{e^{\lambda}+e^{-\lambda}}{2}\cos\vartheta, \qquad y = k\,\frac{e^{\lambda}-e^{-\lambda}}{2}\sin\vartheta \qquad (0<\lambda;\ 0<\vartheta<2\pi)$$

wo k eine Constante bedeutet.

Dann wird eine Ellipse in einfachster Weise dargestellt durch die Gleichung:

$$\lambda = \text{const.},$$

und zwar hängen die Halbaxen a und b dieser Ellipse mit dem Werth von λ folgendermassen zusammen: es ist

$$(2)\quad a = k\,\frac{e^{\lambda}+e^{-\lambda}}{2}, \qquad b = k\,\frac{e^{\lambda}-e^{-\lambda}}{2} \qquad \text{und daher} \qquad e^{-2\lambda} = \frac{a-b}{a+b}.$$

Wir denken uns nun eine solche Ellipse σ fest gegeben, ihr Parameter sei λ_0. — Unsere *erste Aufgabe* sei dann diese, die scheinbare Grösse

*) Man könnte meinen, dass die Oeffnungsfunction auch für Curven, welche von zwei Kreisbogen gebildet werden, verschwinde, sobald die Pole in die beiden Schnittpunkte dieser Kreise rückten. — Dem wäre allerdings so, wenn wir bei einer solchen mit Spitzen behafteten Curve die Oeffnungsfunction in derselben Weise definiren wollten, wie wir es oben für stetig gekrümmte Curven thaten. Bei einem solchen Verfahren würde aber die Function für uns jede wesentliche Bedeutung verlieren. — Wir sind daher gezwungen, bei derartig unstetig gekrümmten Curven oder auch Flächen bei der Definition der Oeffnungsfunction eine gewisse *Modification* eintreten zu lassen, auf die ich hier jedoch nicht näher eingehn will. Es zeigt sich dann, dass die Oeffnungsfunction einer solchen von zwei Kreisbogen gebildeten Curve thatsächlich *nicht* verschwindet, wenn die Pole in die Spitzen hineinfallen.

eines Elementes $d\sigma(\lambda_0, \vartheta)$ dieser Ellipse von einem Punkte $s(\lambda_0, \omega)$ eben dieser Ellipse zu berechnen. Wir bezeichnen dieserhalb mit E die Entfernung des Elementes $d\sigma$ von s und mit ν die auf $d\sigma$ errichtete innere Ellipsennormale; dann wird sich bei der Bewegung eines Punktes längs dieser Normalen ν nur seine λ-Coordinate ändern, und es folgt demgemäss:

$$(3) \qquad (d\sigma)_s = \frac{\partial\left(\log\frac{1}{E}\right)}{\partial\nu}\, d\sigma = \left[\frac{\partial\left(\log\frac{1}{E}\right)}{\partial\lambda}\right]_{\lambda=\lambda_0} \cdot \frac{\partial\lambda}{\partial\nu}\, d\sigma$$

Nun ist aber das Quadrat der Entfernung E eines Punktes λ, ϑ von jenem Ellipsenpunkte $s(\lambda_0, \omega)$:

$$(4) \quad E^2 = \frac{k^2}{4}\left(e^{\lambda+\lambda_0} + e^{-(\lambda+\lambda_0)} - 2\cos(\vartheta+\omega)\right)\cdot\left(e^{\lambda-\lambda_0} + e^{\lambda_0-\lambda} - 2\cos(\vartheta-\omega)\right),$$

und in Rücksicht hierauf ergiebt sich aus (3) zunächst:

$$(5) \qquad (d\sigma)_s = -\frac{1}{2}\,\frac{e^{2\lambda_0} - e^{-2\lambda_0}}{e^{2\lambda_0} + e^{-2\lambda_0} - 2\cos(\vartheta+\omega)}\,\frac{\partial\lambda}{\partial\nu}\, d\sigma.$$

Nun folgt weiter aus (4) durch einen leichten Grenzübergang für das Quadrat eines beliebigen Linienelementes dl, wenn $d\lambda$ und $d\vartheta$ die Zuwächse bedeuten, die λ und ϑ darauf erfahren, der folgende Ausdruck:

$$(6) \qquad dl^2 = dx^2 + dy^2 = \frac{k^2}{2}\left(e^{2\lambda} + e^{-2\lambda} - 2\cos 2\vartheta\right)\cdot(d\lambda^2 + d\vartheta^2).$$

Wenden wir diese Formel einmal an auf ein Element $d\sigma$ der Ellipse λ_0 und sodann auf ein Element $d\nu$ der Normalen ν, also das eine Mal auf ein Linienelement, für welches $d\lambda = 0$, das andere Mal $d\vartheta = 0$ ist, so erhalten wir:

$$(7) \qquad d\sigma = \frac{k}{2}\sqrt{2(e^{2\lambda_0} + e^{-2\lambda_0} - 2\cos 2\vartheta)}\; d\vartheta$$

und andrerseits:

$$(7') \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial\nu} = -\frac{1}{\frac{k}{2}\sqrt{2(e^{2\lambda_0} + e^{-2\lambda_0} - 2\cos 2\vartheta)}}\ ^{*)};$$

Die Formel (5) nimmt daher jetzt die folgende einfachere Gestalt an:

$$(8) \qquad (d\sigma)_s = \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{2\lambda_0} - e^{-2\lambda_0}}{e^{2\lambda_0} + e^{-2\lambda_0} - 2\cos(\vartheta+\omega)}\cdot d\vartheta.$$

Damit wäre jetzt aber unsere erste Aufgabe gelöst, die scheinbare Grösse des Elementes $d\sigma(\lambda, \vartheta)$ vom Ellipsenpunkte $s(\lambda_0, \omega)$ aus berechnet.

---

*) Das *negative* Vorzeichen muss $\frac{\partial\lambda}{\partial\nu}$ erhalten, weil λ in der Richtung der inneren Ellipsennormalen ν abnimmt.

Aus dem erhaltenen Resultate folgt sofort für die *Differenz* der scheinbaren Grössen dieses Elementes $d\sigma$ von zwei Punkten $s_1(\lambda_0, \omega_1)$ und $s_2(\lambda_0, \omega_2)$ der Ellipse der Ausdruck:

$$(9)\quad (d\sigma)_{s_1} - (d\sigma)_{s_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2\lambda_0} - e^{-2\lambda_0}}{e^{2\lambda_0} + e^{-2\lambda_0} - 2\cos(\vartheta + \omega_1)} - \frac{e^{2\lambda_0} - e^{-2\lambda_0}}{e^{2\lambda_0} + e^{-2\lambda_0} - 2\cos(\vartheta + \omega_2)}\right) d\vartheta$$
$$= \frac{e^{2\lambda_0} - e^{-2\lambda_0}}{2}\left[\frac{d\vartheta}{e^{2\lambda_0} + e^{-2\lambda_0} - 2\cos(\vartheta + \omega)}\right]_{\omega=\omega_2}^{\omega=\omega_1}.$$

Um nun die *Oeffnungsfunction* der Ellipse mit Bezug auf diese beiden Punkte s_1 und s_2 zu bestimmen, müssen wir nun weiter zunächst die *Hilbert*'sche Eintheilung der Ellipse σ in die beiden Theile α und β feststellen, deren Elemente von s_1 bezw. s_2 aus grösser erscheinen [vgl. (3), pag. 10]. — Die Grenze zwischen diesen Theilen α und β werden danach jedenfalls solche Elemente $d\sigma$ bilden, welche *von s_1 und von s_2 aus gleich gross* erscheinen, für welche somit die Differenz (9) gleich 0, oder aber $\cos(\vartheta + \omega_1) = \cos(\vartheta + \omega_2)$ wird, d. h. die Theile α und β der Ellipse werden begrenzt durch zwei Punkte mit den ϑ-Coordinaten $\pi - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ und $2\pi - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ und zwar werden, sofern $\omega_1 > \omega_2$ ist, alle Elemente $d\sigma$, deren ϑ-Coordinaten der Relation

$$(10)\qquad \pi - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} < \vartheta < 2\pi - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

entsprechen, von s_1 aus grösser als von s_2 aus erscheinen (für sie wird nämlich, wie eine einfache Ueberlegung lehrt, die Differenz (9) positiv); *dieses Intervall* (10) *von ϑ entspricht somit dem Theile α.*

Wenn wir also die Oeffnungsfunction

$$D(s_1, s_2) = \frac{1}{\pi}\int [(d\alpha)_{s_1} - (d\alpha)_{s_2}],$$

d. h. das Integral des Ausdrucks (9), hinerstreckt über den Theil α, bilden wollen [vgl. (7) pag. 11 ($h = 1$)], so müssen wir nach ϑ über jenes Intervall (10) hin integriren; es folgt sonach:

$$(11)\quad D(s_1, s_2) = \frac{e^{2\lambda_0} - e^{-2\lambda_0}}{2\pi}\left[\int\limits_{\pi - \frac{\omega_1+\omega_2}{2}}^{2\pi - \frac{\omega_1+\omega_2}{2}} \frac{d\vartheta}{e^{2\lambda_0} + e^{-2\lambda_0} - 2\cos(\vartheta + \omega)}\right]_{\omega=\omega_2}^{\omega=\omega_1}.$$

Die Ausführung der Integration und eine einfache weitere Umformung des Resultats liefert uns dann schliesslich den folgenden Ausdruck für *die Oeffnungsfunction der Ellipse in Bezug auf die Punkte s_1 und s_2 mit den ϑ-Coordinaten ω_1 und $\omega_2 (\omega_1 > \omega_2)$*:

$$(12)\qquad D(s_1, s_2) = \frac{2}{\pi}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2\sin\frac{\omega_1-\omega_2}{2}}{e^{2\lambda_0}-e^{-2\lambda_0}}\right).$$

dabei ist natürlich arctg x *im ersten Quadranten* anzunehmen, denn für $\omega_1 = \omega_2$, d. h. wenn die beiden Pole s_1 und s_2 zusammenfallen, muss ja $D(s_1, s_2)$ zu 0 werden [vgl. (8), pag. 11]. —

Aus dieser Darstellungsweise (12) ist nun sofort ersichtlich, dass die Oeffnungsfunction ihren grössten Werth annimmt, wenn $\omega_1 - \omega_2 = \pi$ ist (d. h. geometrisch gesprochen, wenn s_1 und s_2 auf den beiden Zweigen ein und derselben zur Ellipse confocalen Hyperbel, und zwar in gegenüberliegenden Ellipsenquadranten liegen), und für dieses Maximum selber, die Configurationsconstante c, ergiebt sich der Werth:

$$c = \frac{2}{\pi}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2}{e^{2\lambda_0}-e^{-2\lambda_0}}\right) = \frac{4}{\pi}\,\mathrm{arctg}\,(e^{-2\lambda_0}).$$

Die Configurationsconstante einer Ellipse vom Parameter λ_0 *ist*

$$(13)\quad c = \frac{4}{\pi}\,\mathrm{arctg}\,(e^{-2\lambda_0}),\qquad \textit{oder auch}\qquad c = \frac{4}{\pi}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)\quad [\text{vgl. } (2)],$$

wenn a und b die grosse und die kleine Halbaxe der Ellipse bedeuten — unter arctg x natürlich den *kleinsten* Bogen verstanden, dessen Tangente x ist.

Es ist dies der auch von *Noble* angegebene Werth der Configurationsconstanten c der Ellipse; da arctg von einem echten Bruche stets kleiner als $\frac{\pi}{4}$ ist, so ist er thatsächlich, wie nach dem dritten Satze pag. 27 zu erwarten war, stets *kleiner als* 1.

Wir wollen uns jetzt einmal auf der Ellipse irgend eine daselbst stetige Function f vorgeschrieben denken. Es ist dies dann lediglich eine Function des Argumentes ϑ, das auf der Ellipse alle Werthe von 0 bis 2π annimmt. Demgemäss können wir uns diese willkürlich gegebene Function dargestellt denken durch eine *Fourier*'sche Reihe:

$$(14)\qquad f_s = f(\vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta).$$

Wir wollen dann auf Grund dieser Function f das Potential W_p [vgl. § 1], und vor Allem die aufeinanderfolgenden Functionen f', f'', f''', etc. für die Ellipse wirklich zu berechnen suchen.

Um nun zunächst W_i und W_a, die Werthe des Potentials W in *inneren* und *äusseren* Punkten $i(\lambda_i, \vartheta_i)$ und $a(\lambda_a, \vartheta_a)$ $[0 < \lambda_i < \lambda_0 < \lambda_a]$ zu bestimmen, müssen wir zunächst die scheinbaren Grössen $(d\sigma)_i$ und $(d\sigma)_a$ des Ellipsenelementes $d\sigma(\lambda_0, \vartheta)$ von diesen Punkten i und a aus kennen. Diese

lassen sich nun ganz ähnlich berechnen, wie wir oben $(d\sigma)_s$ fanden; doch wollen wir jetzt nicht mit solchen *geschlossenen* Ausdrücken operiren, uns vielmehr auch hier der Entwicklung in *Fourier'sche Reihen* bedienen. Wir erhalten dann, wie ich nicht näher ausführen will:

$$(d\sigma)_i = \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n(\lambda_i+\lambda_0)} \cos n(\vartheta_i + \vartheta) + \sum_{n=0}^{\infty} e^{n(\lambda_i-\lambda_0)} \cos n(\vartheta_i - \vartheta) \right) d\vartheta \quad (\lambda_i < \lambda_0),$$

$$(d\sigma)_a = \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n(\lambda_0+\lambda_a)} \cos n(\vartheta + \vartheta_a) - \sum_{n=0}^{\infty} e^{n(\lambda_0-\lambda_a)} \cos n(\vartheta - \vartheta_a) \right) d\vartheta \quad (\lambda_a > \lambda_0),$$

und daraus dann sofort weiter unter Benutzung der bekannten Integraleigenschaften der Kreisfunctionen:

$$(15) \quad \begin{aligned} W_i = \frac{1}{\pi}\int f_\sigma (d\sigma)_i &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n(\lambda_i+\lambda_0)} (a_n \cos n\vartheta_i - b_n \sin n\vartheta_i) \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} e^{n(\lambda_i-\lambda_0)} (a_n \cos n\vartheta_i + b_n \sin n\vartheta_i), \\ W_a = \frac{1}{\pi}\int f_\sigma (d\sigma)_a &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n(\lambda_0+\lambda_a)} (a_n \cos n\vartheta_a - b_n \sin n\vartheta_a) \\ &- \sum_{n=0}^{\infty} e^{n(\lambda_0-\lambda_a)} (a_n \cos n\vartheta_a + b_n \sin n\vartheta_a). \end{aligned}$$

Lassen wir nun den Punkt i bezw. a sich einem Punkte $s(\lambda_0, \vartheta)$ der Ellipse selber nähern, so ergeben sich für die *inneren und äusseren Grenzwerthe* des Potentials W die folgenden Darstellungen:

$$(16) \quad \begin{aligned} W_{is} &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2n\lambda_0} (a_n \cos n\vartheta - b_n \sin n\vartheta) + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta), \\ W_{as} &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2n\lambda_0} (a_n \cos n\vartheta - b_n \sin n\vartheta) - \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta). \end{aligned}$$

Diese Grenzwerthe hängen nun mit dem Werthe $W_s = f_s'$ von W im Punkte s der Ellipse selber nach (7) pag. 8 durch die Relationen

$$(17) \qquad W_{is} = f_s' + f_s \qquad \text{und} \qquad W_{as} = f_s' - f_s$$

zusammen, und es ergeben daher die beiden Formeln (16) übereinstimmend für f_s' den Werth:

$$(18) \qquad f_s' = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2n\lambda_0} (a_n \cos n\vartheta - b_n \sin n\vartheta),$$

worin wir eine gewisse *Bestätigung jener beiden allgemeinen Formeln* (17) in unserem speciellen Falle erblicken können. —

Wollen wir nun die weiteren aufeinanderfolgenden Functionen f_s'', f_s''', etc. bilden, so haben wir nur zu beachten, dass jede derselben aus der vorhergehenden durch genau dieselben Operationen hervorgeht, wie f_s' aus f_s. Wir gelangen somit *bei der Ellipse* zu dem folgenden System *aufeinanderfolgender Functionen:*

$$
(19)\qquad
\begin{aligned}
f_s &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta),\\
f_s' &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2n\lambda_0} (a_n \cos n\vartheta - b_n \sin n\vartheta),\\
f_s'' &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-4n\lambda_0} (a_n \cos n\vartheta + b_n \sin \eta\vartheta),\\
f_s''' &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-6n\lambda_0} (a_n \cos n\vartheta - b_n \sin n\vartheta),\\
&\quad \text{etc.} \qquad \text{etc.} \qquad \text{etc.}
\end{aligned}
$$

Aus diesen Functionen f, f', f'', etc. ergeben sich dann in genau derselben Weise, wie wir oben W aus f erhielten, die weiteren Potentiale W', W'', W''', etc., und aus diesen lassen sich dann nach den allgemeinen Vorschriften der Methode des arithmetischen Mittels [vgl. pag. 15] die Fundamentalfunctionen des inneren und des äusseren Gebietes der Ellipse σ zusammensetzen, welche auf σ selber die ursprünglich vorgeschriebenen Werthe f besitzen. —

Doch darauf wollen wir hier nicht weiter eingehn, vielmehr an die Formeln (19) die folgende Bemerkung knüpfen: In der Configurationsconstanten (13) der Ellipse besitzen wir nach dem allgemeinen Satze pag. 12 eine obere Grenze für den Quotienten der Schwankungen zweier solcher aufeinanderfolgender Functionen. Beachten wir aber, dass unsere Ellipse mit dem Parameter λ_0 $(\lambda_0 > 0)$ ganz *willkürlich* aus dem Systeme der confocalen Ellipsen herausgegriffen war, dass wir demnach unter $e^{-2\lambda_0}$ einen ganz beliebigen positiven echten Bruch Θ verstehn können, so sind wir damit zu folgendem Resultate gelangt:

Satz. — *Besitzt die durch die Fourier'sche Reihe:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta) = f(\vartheta) \qquad (0 < \vartheta < 2\pi)$$

dargestellte Function f die Schwankung δ, und verstehn wir unter Θ einen beliebigen positiven echten Bruch, so besitzt die durch die Entwicklung

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Theta^n (a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta) = F(\vartheta)$$

dargestellte Function F eine Schwankung Δ, *welche der Relation*

$$\Delta \leqq c \cdot \delta$$

entspricht, wo $c = \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \Theta$ *ist.**)

Wenn ich bei Aussprache dieses Satzes die früher über die Function f gemachte Voraussetzung der Stetigkeit unterdrückt habe, so hat das seinen Grund darin, dass die zum Satze führenden Betrachtungen, wie hier ohne Beweis mitgetheilt sei, *in gleicher Weise für nur abtheilungsweise stetige Functionen, wie für geradezu stetige Functionen gültig bleiben.*

§ 9.

Die Configurationsconstante der Kugel. Folgerungen: Zwei Sätze über das Potential einer Kugelflächenbelegung, bezw. über Reihen, die nach Kugelfunctionen fortschreiten.

Gegeben sei eine Kugelfläche σ vom Radius R. — Um alsdann deren Configurationsconstante c zu berechnen, markire ich auf ihr zwei Punkte s_1 und s_2 und bezeichne die Entfernungen derselben von einem Oberflächenelemente $d\sigma$ dieser Kugelfläche mit E_1 und E_2. Dann folgt sofort aus der Betrachtung der beiden durch $d\sigma$ einerseits und s_1 bezw. s_2 andrerseits gelegten grössten Kreise [vgl. Figur 3 pag. 28]:

$$E_1 = 2R\cos(\nu, E_1), \qquad E_2 = 2R\cos(\nu, E_2)$$

und es ergiebt sich daher für die scheinbare Grösse jenes Elementes $d\sigma$ von s_1 und s_2 aus [vgl. (2) pag. 7 ($h=2$)]

$$(1) \quad (d\sigma)_{s_1} = \frac{\cos(\nu, E_1)}{E_1^2} d\sigma = \frac{1}{E_1}\frac{d\sigma}{2R}, \qquad (d\sigma)_{s_2} = \frac{\cos(\nu, E_2)}{E_2^2} d\sigma = \frac{1}{E_2}\frac{d\sigma}{2R},$$

und hieraus ist sofort ersichtlich, dass zum Theile α der *Hilbert'schen Eintheilung* von σ, dessen Elemente grösser von s_1 als von s_2 erscheinen, alle Elemente $d\sigma$ gehören, für welche $E_1 < E_2$ ist, die also näher an s_1 als an s_2 liegen, und zum Theile β alle übrigen, die demnach näher an s_2 als s_1 liegen. Die Kugelfläche σ wird also in die Theile α und β zerlegt durch die zu den Punkten s_1 und s_2 mittelsenkrechte Ebene, jeder Theil für sich wird also eine *Halbkugelfläche* bilden.

---

*) Es ist nämlich $F(\vartheta) = f'(2\pi - \vartheta)$, die Functionen F und f' nehmen also zwischen 0 und 2π genau dieselben Werthe (nur an verschiedenen Stellen) an, und es überträgt sich daher der oben nur für f' bewiesene Satz sofort auch auf die Function F.

Um uns nun im Folgenden kürzer ausdrücken zu können, wollen wir uns unter jener Kugelfläche die *Erd*kugelfläche vorstellen. Wir können dann, ohne der Allgemeinheit Abbruch zu thun, s_1 und s_2 als zwei in Bezug auf die Aequatorialebene E *symmetrisch* gelegene Punkte ansehn, und zwar wollen wir festsetzen, dass s_1 auf der *nördlichen*, s_2 auf der *südlichen* Hemisphäre liege.

Unter Benutzung dieser Vorstellung können wir dann kurz sagen: der Theil α der *Hilbert*'schen Eintheilung wird gebildet durch die *nördliche*, der Theil β durch die *südliche* Hemisphäre.

Wir knüpfen nun bei Berechnung der Oeffnungsfunction der Kugel ($h = 2$) an den zweiten in (2) pag. 24 für dieselbe abgeleiteten Ausdruck

$$D(s_1, s_2) = 1 - \frac{\int (d\alpha)_{s_2} + \int (d\beta)_{s_1}}{2\pi}$$

an; die beiden hier auftretenden Integrale stellen die scheinbare Grösse der nördlichen Hemisphäre von s_2 aus, bezw. der südlichen Hemisphäre von s_1 aus dar, sind also augenscheinlich einander gleich, jedes ist gleich der *scheinbaren Grösse* Ω *des Aequators* von s_1 oder (was dasselbe ist) von s_2 aus.

Dieses vorläufige Resultat können wir etwa so fixiren:

Wir fassen die beiden auf einer Kugelfläche σ *beliebig gegebenen Punkte* s_1 *und* s_2 *auf als zwei Orte der Erdoberfläche, die gegenseitige Spiegelpunkte in Bezug auf die Aequatorialebene sind. — Alsdann ist die mit Bezug auf* s_1 *und* s_2 *gebildete Oeffnungsfunction der Kugelfläche*

$$D(s_1, s_2) = 1 - \frac{\Omega}{\pi}, \tag{2}$$

wo Ω *die scheinbare Grösse des Aequators vom Punkte* s_1 *aus, oder, was dasselbe ist, von* s_2 *aus bedeutet.*

Wollen wir nun das *Maximum* der Oeffnungsfunction, d. h. die *Hilbert*'sche Configurationsconstante c der Kugelfläche, bestimmen, so müssen wir uns also zunächst der Frage zuwenden, für welchen Punkt s_1 der nördlichen Hemisphäre die scheinbare Grösse Ω des Aequators ein *Minimum* wird. — Da nun augenscheinlich Ω für alle Punkte desselben Parallelkreises gleich gross ist, so können wir uns auf die Betrachtung eines einzigen Meridiankreises, oder sogar Meridian*halb*kreises ANB beschränken und uns fragen: Welche geographische Breite φ muss ein Punkt s_1 dieses Meridianhalbkreises besitzen, damit von ihm aus der Aequator möglichst klein erscheine?

Die scheinbare Aequatorgrösse Ω wird nun gemessen durch die Oeffnung eines Kegels, der von s_1 aus an den Aequator gelegt wird, also im

Allgemeinen eines elliptischen Kegels. — Von den beiden Axenöffnungen dieses elliptischen Kegels bleibt nun die eine, der Winkel As_1B immer gleich gross, nämlich gleich 90^0, wie wir auch s_1 auf unserem Meridianhalbkreise annehmen; die zweite Axenöffnung ϑ hingegen hängt, wie einfache geometrische Ueberlegungen lehren, mit der geographischen Breite φ des Punktes s_1 durch die folgende Relation zusammen:

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\vartheta}{2} = \frac{1}{\sin \varphi}.$$

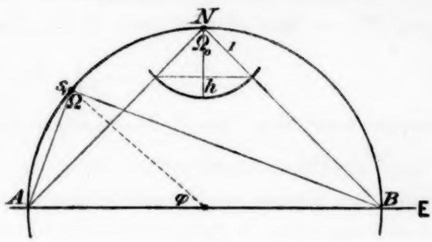


Fig. 4.

Es erreicht somit diese Oeffnung ϑ und damit auch die räumliche Kegelöffnung Ω ihr Minimum für die geographische Breite $\varphi = 90^0$, d. h. wenn der Punkt s_1 in den *Nordpol* N hineinrückt.

Dieses Minimum Ω_0 der scheinbaren Grösse Ω ist daher leicht zu berechnen. Wir können es messen durch die Calotte, die der über dem Aequator errichtete Kreiskegel, dessen Spitze im Pole N liegt, aus einer um N mit dem Radius 1 beschriebenen Kugelfläche ausschneidet. Die Höhe dieser Calotte ist aber, wie sofort aus der Figur ersichtlich:

$$h = 1 - 1 \cdot \cos \frac{\pi}{4} = 1 - \sqrt{\frac{1}{2}}$$

und daher die Calotte selber oder das Minimum der scheinbaren Aequatorgrösse:

$$\Omega_0 = 2\pi h = \pi(2 - \sqrt{2}).$$

Diesem Minimum entspricht aber nach (2) das Maximum der Oeffnungsfunction $D(s_1, s_2)$, d. h. die Configurationsconstante c; es folgt somit:

$$c = 1 - \frac{\Omega_0}{\pi} = \sqrt{2} - 1.$$

Die Hilbert'sche Configurationsconstante der Kugelfläche hat also den Werth:

$$c = \sqrt{2} - 1 = 0{,}41421 \cdots. \tag{3}$$

Die *Neumann*'sche Constante λ ist nun, wie wir sahen, [vgl. (8), pag. 26] gleich $\frac{1+c}{2}$, also bei der Kugelfläche: $\lambda = \sqrt{\frac{1}{2}} = 0{,}70710 \cdots$, thatsächlich also, wie *C. Neumann* in einer Vorlesung bewies, $< \frac{3}{4}$ d. i. $< 0{,}75$.

Folgerungen. — Denken wir uns jetzt auf der Kugelfläche eine beliebige aber stetige Function f ausgebreitet und auf Grund derselben nach den Vorschriften von § 1 ($h = 2$) die Werthe W_s oder

$$f_s' = \frac{1}{2\pi}\int f_\sigma (d\sigma),$$

gebildet, so stellt die Configurationsconstante c eine obere Grenze dar für den Quotienten der Schwankungen der Functionen f und f' [vgl. (10) pag. 12]. — Nun ist aber nach (1) die Function f_s' auch so darstellbar:

$$f_s' = \frac{1}{4\pi R}\int f_\sigma \frac{d\sigma}{E},$$

woraus ersichtlich, dass f_s die Oberflächenwerthe des Potentials einer auf der Kugelfläche ausgebreiteten Belegung von der Dichtigkeit $\frac{f}{4\pi R}$ darstellt; wir können somit unser obiges Resultat auch so ausdrücken:

Erster Satz. — *Ist auf einer Kugelfläche vom Radius R eine Massenbelegung ausgebreitet, deren grösste und kleinste Dichtigkeit g bezw. k ist, so ist die Schwankung Δ der Oberflächenwerthe des Potentials dieser Belegung*

$$\Delta \leqq 4\pi R(g-k)\cdot c,$$

wo $c = \sqrt{2} - 1 = 0{,}41421\cdots$ *ist.*

Nun sind die extremen Werthe an der Oberfläche bekanntlich gleichzeitig die extremen Werthe des Potentials in inneren Punkten, jene Grenze stellt also *gleichzeitig eine obere Grenze für die Schwankung der inneren Potentialwerthe* dar — für die äusseren hingegen nur, wenn neben positiven Potentialwerthen gleichzeitig auch negative vorkommen, wenn also der Werth 0 im Unendlichen kein extremer Werth ist. —

Zu einem weiteren nicht uninteressanten Resultate führt unser obiger Satz über die Schwankungen der beiden Functionen f und f', wenn wir uns die auf der Kugelfläche σ ausgebreitete Function f jetzt entwickelt denken nach Kugelfunctionen:

$$f_s = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\mu, \psi),$$

wo $\mu = \cos\vartheta$ und ψ die bekannten Polarcoordinaten bedeuten. Dann ist die Function f_s' durch die folgende Reihe darstellbar:

$$f_s' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} Y_n(\mu, \psi) \qquad \text{[vgl. C. N. Abhandl. I, pag. 101, (4)]}$$

und wir können daher jetzt jenen Satz auch so aussprechen:

Zweiter Satz. — *Besitzt die durch die nach Laplace'schen Kugelfunctionen fortschreitende Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\mu, \psi) = f(\mu, \psi) \qquad (-1 < \mu < +1;\ 0 < \psi < 2\pi)$$

definirte Function f die Schwankung δ, so ist die Schwankung δ' der durch die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} Y_n(\mu, \psi) = f'(\mu, \psi)$$

dargestellten Function f':

$$\delta' \leqq c \cdot \delta,$$

wo wieder $c = \sqrt{2} - 1 = 0{,}41421 \cdots$ *ist*).*

Dieser Satz stellt nun nach seiner *Herleitung* völlig das Analogon zu dem auf pag. 36 bewiesenen Satze über die *Fourier*'sche Reihen dar; einen weiteren Satz über Reihen nach Kugelfunctionen, welcher *inhaltlich* jenem Satze noch weit besser entspricht, werden wir im folgenden Paragraphen kennen lernen.

§ 9a.

Ein allgemeiner Satz über Fundamentalfunctionen des Raumes $\mathfrak{A}$ ausserhalb einer Kugelfläche. Ein weiterer Satz über Reihen, die nach Kugelfunctionen fortschreiten.

Anlehnend an die im vorigen Paragraphen angestellten Untersuchungen über die Kugelfläche will ich hier einen Satz mittheilen, der sich öfters als recht brauchbar erweist, und von dem ich möglichenfalls weiter unten noch Gebrauch machen werde.

Denkt man sich auf einer Kugelfläche σ vom Radius R eine beliebige Function φ vorgeschrieben, so giebt es sicherlich eine Fundamentalfunction des Raumes $\mathfrak{A}$ ausserhalb σ, welche mit diesen Werthen φ auf σ in stetiger Weise zusammenhängt, wie sich das leicht, z. B. mit Hilfe der Methode des arithmetischen Mittels beweisen lässt. — Wir wollen nun die Werthe dieser Fundamentalfunction — sie möge Φ heissen — speciell auf einer zu σ concentrischen (grösseren) Kugelfläche Σ mit dem Radius ϱ näher untersuchen, und im Besonderen zusehn, zwischen welchen Grenzen Γ und K diese Functionswerthe liegen; wir wollen uns nämlich die Frage vorlegen: Wie hängt die *Schwankung* $\Gamma - K$ der Functionswerthe von Φ auf jener Kugelfläche Σ zusammen mit der Schwankung $\gamma - \varkappa$ ihrer Randwerthe, d. h. der ursprünglich auf σ vorgeschriebenen Werthe φ?

Ohne auf die Ableitung näher einzugehn, möchte ich das Resultat der diesbezüglichen Untersuchung mittheilen:

Allgemeiner Satz. — *Bezeichnet Φ_a irgend eine Fundamentalfunction des Raumes $\mathfrak{A}$ ausserhalb einer Kugelfläche σ vom Radius R, und bezeichnen*

---

*) Die Voraussetzung, dass die Function f stetig sei, ist hier wieder nicht nothwendig [vgl pag. 37, die Schlussbemerkung von § 8].

γ und $\varkappa$ den grössten und kleinsten ihrer Oberflächenwerthe (Werthe auf σ), so entspricht die Schwankung $\Gamma - \mathrm{K}$ dieser Function auf einer mit σ concentrischen, grösseren, Kugelfläche Σ vom Radius ϱ der Relation:

$$\Gamma - \mathrm{K} \leqq q(\gamma - \varkappa),$$

wo $q = 1 - \dfrac{\varrho^2 - R^2}{\varrho\sqrt{\varrho^2 + R^2}}$ *ist*).* —

Denken wir uns nun diese Oberflächenwerthe φ der Fundamentalfunction Φ in eine nach Kugelfunctionen fortschreitende Reihe entwickelt:

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\mu, \psi),$$

so sind die Werthe von Φ im Centralabstande $\varrho > R$ so darstellbar:

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{\varrho}\right)^{n+1} Y_n(\mu, \psi) \quad \text{[vgl. C. N. Abhandl. I, pag. 103, (10)].}$$

Die Schwankungen dieser beiden Reihen setzt nun unser obiger Satz in eine gewisse Beziehung zu einander. — Beachten wir noch, dass ϱ der Radius der Kugelfläche Σ, auf der wir die Werthe von Φ betrachteten, ganz beliebig gewählt war, nur so, dass $\varrho > R$ ist, dass wir demnach unter $\frac{R}{\varrho}$ einen beliebigen positiven echten Bruch Θ verstehn können, so dürfen wir das erhaltene Resultat auch so aussprechen:

Satz. — *Besitzt die durch die nach Kugelfunctionen fortschreitende Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\mu, \psi) = \varphi(\mu, \psi) \qquad (-1 < \mu < +1;\ 0 < \psi < 2\pi)$$

definirte Function φ die Schwankung δ, und bezeichnet Θ einen beliebigen positiven echten Bruch, so besitzt die durch die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Theta^{n+1} Y_n(\mu, \psi) = \Phi(\mu, \psi)$$

---

*) Der Beweis dieses Satzes beruht, um nur das anzugeben, im Wesentlichen auf derselben Schlussweise, wie wir sie oben in § 2 bei einer ähnlichen Untersuchung anwandten. — Im Uebrigen thut man gut daran, zunächst die *Potential*function V zu betrachten, die auf σ die Werthe φ besitzt, und welche sich mit Hilfe der *Green'schen Function* darstellen lässt. Von dieser *Potentialfunction* V ist dann leicht der Uebergang zur *Fundamentalfunction* Φ gemacht. [Wegen des Unterschiedes zwischen diesen beiden Gattungen von Functionen vgl. die Anmerkung pag. 13].

definirte Function Φ *eine Schwankung* Δ, *welche der Relation entspricht:*

$$\Delta \leqq q \cdot \delta$$

wo $q = 1 - \frac{1-\Theta^2}{\sqrt{1+\Theta^2}}$ *ist.*

Die Analogie zwischen diesem Satze und dem auf pag. 36 gefundenen Satze über *Fourier*'sche Reihen, tritt klar zu Tage.

§ 10.

Ueber das Verschwinden der Oeffnungsfunction im Raume.

In § 7 lernten wir in dem Kreise eine, und zwar die einzige Curve in der Ebene kennen, deren Configurationsconstante c gleich 0 ist. — Wir wollen nun analog in diesem Paragraphen die Frage erörtern, ob es vielleicht auch eine *Fläche im Raume* giebt, deren Configurationsconstante den Werth 0 hat, oder deren Oeffnungsfunction $D(s_1, s_2)$ überhaupt verschwinden kann, auch ohne dass ihre beiden Pole s_1 und s_2 coïncidiren.

Wir nehmen dieserhalb ganz analog, wie wir es in § 7 thaten, diese beiden *Punkte* s_1 *und* s_2 *im Raum fest gegeben* an und legen uns die Frage vor, ob es eine durch diese beiden Punkte gehende Fläche σ giebt, derart, dass für dieselbe die mit Bezug auf s_1 und s_2 gebildete Oeffnungsfunction verschwindet. Dazu ist erforderlich, dass *sämmtliche* Elemente $d\sigma$ jener Fläche σ von s_1 und s_2 aus gleich gross erscheinen [vgl. (9), pag. 11], dass also ganz allgemein

$$(1) \qquad (d\sigma)_{s_1} = (d\sigma)_{s_2} \quad \text{d. h.} \quad \frac{\cos(\nu, E_1)}{E_1^2}\, d\sigma = \frac{\cos(\nu, E_2)}{E_2^2}\, d\sigma \quad \text{[vgl. (2) pag. 7]}$$

ist, wo wieder ν die auf $d\sigma$ errichtete innere Flächennormale bedeutet, und E_1^2 und E_2^2 die Quadrate der Entfernungen dieses Elementes $d\sigma\ (x, y, z)$ von s_1 und s_2 sind, sodass also:

$$(2) \qquad E_1^2 = (x-a)^2 + y^2 + z^2, \qquad E_2^2 = (x+a)^2 + y^2 + z^2$$

— dabei ist dann natürlich wieder ein rechtwinkliges Coordinatensystem x, y, z zu Grunde gelegt, dessen x-Axe durch die beiden Punkte s_1 und s_2 hindurchgeht, und dessen Anfangspunkt ihren Abstand $\overline{s_1 s_2} = 2a$ halbirt.

Nehmen wir nun an, in diesem Coordinatensysteme besitze die gesuchte Fläche σ die Gleichung

$$(3) \qquad F(x, y, z) = \text{const.},$$

so gelangen wir durch genau dieselben Schlüsse, die wir in § 7 anwandten, von der Gleichung (1) zu der folgenden Differenzialgleichung für die Function $F(x, y, z)$:

$$(4) \qquad \left(\frac{x-a}{E_1^3} - \frac{x+a}{E_2^3}\right)\frac{\partial F}{\partial x} + y\left(\frac{1}{E_1^3} - \frac{1}{E_2^3}\right)\frac{\partial F}{\partial y} + z\left(\frac{1}{E_1^3} - \frac{1}{E_2^3}\right)\frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

wo E_1 und E_2 als Abkürzungen in den aus (2) ersichtlichen Bedeutungen stehn.

Die Integration dieser Gleichung (4), auf die ich nicht näher eingehn will, liefert uns nun das Resultat, dass die Fläche $F(x, y, z) = \text{const.}$, welche der Bedingung (1) genügt, sich zusammensetzen muss aus Theilen von Meridianebenen, d. h. von Ebenen, welche durch die Linie $s_1 s_2$ gehn, und von Flächen, deren Meridiancurven die Gleichung

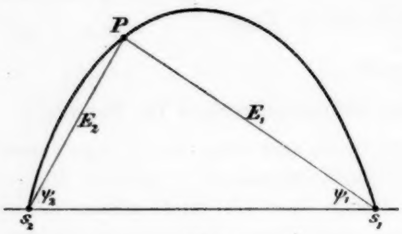


Fig. 5.

$$\frac{a-x}{E_1} + \frac{a+x}{E_2} = \text{const.} = \omega + 1$$

oder

$$(5) \quad \cos\psi_1 + \cos\psi_2 = \omega + 1$$

[vgl. die Figur]

besitzen, wobei freilich der Werth dieses Parameters ω von Meridianhalbebene zu Meridianhalbebene andere und andere Werthe annehmen kann, sodass also ω als eine *willkürliche Function* $\omega(\varphi)$ *des Azimuthes* φ dieser Meridianhalbebene anzusehn ist.*)

Beschränken wir uns nun aber auf Flächen, die frei von Singularitäten, also frei von Ecken und Kanten sind, so müssen wir zunächst Theile von Meridianebenen als Bestandtheile unsrer Fläche ausschliessen und ferner verlangen, dass die in den Polen s_1 und s_2 an sämmtliche Meridiancurven gelegten Tangenten in einer Ebene liegen, damit die Fläche eben in s_1 und s_2 bestimmte Tangentialebnen erhalte**). Diese Forderung zwingt uns aber, wie eine leichte geometrische Ueberlegung lehrt, für die Function $\omega(\varphi)$ bei passender Wahl der Anfangsmeridianebene $\varphi = 0$, folgende Form anzunehmen:

$$\omega(\varphi) = \frac{\alpha\cos\varphi}{\sqrt{1 + \alpha^2\cos^2\varphi}},$$

wo α eine willkürliche Constante bedeutet. — Damit sind wir zu dem folgenden Resultate gelangt:

*Die einzigen singularitätenfreien Flächen****), deren Oeffnungsfunc-*

*) Uebrigens stellt, wie hier nur beiläufig erwähnt sei, die durch die Gleichung (5) repräsentirte Curvenschaar die bekannten *magnetischen Kraftlinien* eines idealen, d. h. lediglich durch seine beiden entgegengesetzten Pole s_1 und s_2 charakterisirten Magneten dar.

**) Man könnte dies bezeichnen als die Forderung stetiger *Biegung;* mit ihr ist in unserm Falle die Forderung stetiger *Krümmung* von selber erfüllt, denn in s_1 und s_2 wird die Krümmung sämmtlicher Meridiancurven zu 0, sämmtliche Krümmungsradien werden hier unendlich gross.

***) Die Einschränkung, welche wir mit dem Werthe „singularitätenfrei“ machen, ist hier durchaus nothwendig. Sehn wir nämlich von der Forderung bestimmter Tan-

tion $D(s_1, s_2)$ *in Bezug auf zwei nicht coïncidirende Punkte* s_1 *und* s_2 *verschwindet, sind dargestellt durch folgende Gleichung:*

$$(6)\qquad \cos\psi_1 + \cos\psi_2 = \frac{\alpha\cos\varphi}{\sqrt{1+\alpha^2\cos^2\varphi}} + 1,$$

in welcher α *eine willkürliche Constante bedeutet. — Dabei verstehn wir unter* φ, ψ_1 *und* ψ_2 *die folgenden eigenthümlichen Bestimmungsstücke, Coordinaten, eines Punktes* P *der Fläche:* φ *ist das Azimuth seiner Meridianhalbebene, d. h. der Ebene durch* P, s_1 *und* s_2, *gegen eine passend gewählte Ebene* $\varphi = 0$, *und* ψ_1 *und* ψ_2 *sind die Winkel, unter welchen seine Verbindungslinien* E_1 *und* E_2 *mit* s_1 *bezw.* s_2 *gegen die Linie* $s_1 s_2$ *geneigt sind.*

Wir sehen somit, dass es nur eine begrenzte Gattung von Flächen giebt, deren Oeffnungsfunction $D(s_1, s_2)$ zu 0 werden kann, ohne dass ihre Pole s_1 und s_2 zusammenfallen, und auch bei diesen Flächen tritt das Verschwinden von $D(s_1, s_2)$ nur ein, wenn wir die Pole s_1 und s_2 in zwei ganz speciell ausgezeichnete Punkte hineinrücken lassen. Bei allen anderen Lagen von s_1 und s_2 auf diesen Flächen wird $D(s_1, s_2)$ von 0 verschiedene (also positive) Werthe annehmen, und es wird daher der grösste aller Werthe, die Configurationsconstante c dieser Flächen, sicherlich nicht gleich 0 sein. *Es giebt somit überhaupt keine geschlossenen Flächen im Raume, deren Configurationsconstante* c *gleich* 0 *ist.*

§ 11.

Die Configurationsconstanten zweier ebner Curven, die durch Abbildung nach reciproken Radien aus einander hervorgehn.

Bei den Betrachtungen des gegenwärtigen Paragraphen thun wir gut daran, an eine von unseren früheren Darstellungen der Oeffnungsfunction etwas abweichende Form derselben anzuknüpfen, und wollen wir daher diese zunächst ableiten.

Ursprünglich definirt war die Oeffnungsfunction einer geschlossenen Curve bezw. Fläche σ in Bezug auf die Pole s_1 und s_2 als der gemeinsame Werth zweier Integrale [vgl. (5), pag. 11]:

$$(1)\quad D(s_1, s_2) = \frac{1}{h\pi}\int\limits_{\alpha}[(d\alpha)_{s_1} - (d\alpha)_{s_2}] \quad \text{oder} \quad = -\frac{1}{h\pi}\int\limits_{\beta}[(d\beta)_{s_1} - (d\beta)_{s_2}],$$

---

gentialebnen in s_1 und s_2 ab, so giebt es thatsächlich noch andere Flächen, deren Oeffnungsfunction $D(s_1, s_2)$ zu 0 wird, selbst wenn wir die in der Anmerkung pag. 31 erwähnte Modification in der Definition eintreten lassen; es sind dies alle Flächen $\cos\psi_1 + \cos\psi_2 = \omega(\varphi) + 1$, bei welcher $\omega(\varphi)$ eine sonst ganz *willkürliche* Function von φ darstellt, die nur der einen Bedingung unterworfen ist, dass $\int\limits_0^{2\pi}\omega(\varphi)\,d\varphi = 0$ sein muss.

und hier wieder waren die Integrationsgebiete α bezw. β definirt als die Gesammtheit aller Curven- oder Flächenelemente $d\alpha$, die von s_1 aus grösser als von s_2, bezw. aller Elemente $d\beta$, die umgekehrt von s_2 aus grösser als von s_1 erscheinen, sodass demnach:

$$[(d\alpha)_{s_1} - (d\alpha)_{s_2}] \text{ positiv, also } = \text{abs}\,[(d\alpha)_{s_1} - (d\alpha)_{s_2}]$$

und

$$[(d\beta)_{s_1} - (d\beta)_{s_2}] \text{ negativ, also } = -\,\text{abs}\,[(d\beta)_{s_1} - (d\beta)_{s_2}];$$

demgemäss können wir unsere obigen Darstellungen (1) für $D(s_1, s_2)$ auch folgendermassen schreiben:

$$D(s_1, s_2) = \frac{1}{h\pi}\int\limits_\alpha \text{abs}\,[(d\alpha)_{s_1} - (d\alpha)_{s_2}],\quad D(s_1, s_2) = \frac{1}{h\pi}\int\limits_\beta \text{abs}\,[(d\beta)_{s_1} - (d\beta)_{s_2}],$$

und aus diesen Gleichungen folgt durch Addition:

$$2D(s_1, s_2) = \frac{1}{h\pi}\int\limits_\alpha \text{abs}\,[(d\alpha)_{s_1} - (d\alpha)_{s_2}] + \frac{1}{h\pi}\int\limits_\beta \text{abs}\,[(d\beta)_{s_1} - (d\beta)_{s_2}].$$

Diese Summe rechterhand kann man nun aber augenscheinlich als ein einziges über α und β, d. h. also *über die ganze Begrenzung σ hinerstrecktes Integral* schreiben, und es folgt daher schliesslich:

$$(2)\qquad D(s_1, s_2) = \frac{1}{2h\pi}\int\limits_\sigma \text{abs}\,[(d\sigma)_{s_1} - (d\sigma)_{s_2}],$$

eine Darstellungsform für die Oeffnungsfunction, welche im Gegensatze zu unseren früheren [vgl. (1) und (2), pag. 24] unabhängig ist von der Eintheilung von σ in die beiden Theile α und β, und welche daher eine im Grunde genommene *einfachere Definition der Oeffnungsfunction* enthält — sich andrerseits zur wirklichen Berechnung im Allgemeinen schlechter, wie jene eignet.

Eins aber hat diese neue Darstellungsweise (2) der Oeffnungsfunction mit der ursprünglichen [vgl. (1)] gemeinsam — auch bei ihr spielt wieder eine hervorragende Rolle die Differenz

$$(d\sigma)_{s_1} - (d\sigma)_{s_2}$$

der scheinbaren Grössen ein und desselben Elementes $d\sigma$ der Begrenzung von zwei verschiedenen Punkten s_1 und s_2 aus.

Bei Betrachtungen *in der Ebene*, auf die wir uns jetzt ausschliesslich beschränken wollen, lässt nun diese Differenz eine einfache geometrische Deutung zu, von der schon *Noble* in der citirten Arbeit Gebrauch macht, und deren auch wir uns jetzt mit Vortheil bedienen werden.

Wir fassen ein beliebiges Element $d\sigma$ einer ebnen geschlossenen Curve σ ins Auge — seine Endpunkte seien P und Q — und ferner

zwei Punkte s_1 und s_2 auf σ. Dann ist $(d\sigma)_{s_1}$, die scheinbare Grösse des Elementes $d\sigma$ von s_1 aus, der Winkel, welchen der Strahl $s_1 P$ beschreibt, wenn wir den Punkt P längs $d\sigma$ nach Q rücken lassen, und entsprechend $(d\sigma)_{s_2}$ der Winkel, den der Strahl $s_2 P$ bei dieser Bewegung beschreibt. Führen wir also die Winkel ϑ_1 und ϑ_2 ein, welche diese Strahlen mit $s_1 s_2$ (specieller mit der Richtung $s_2 \rightarrow s_1$) bilden, so sind $(d\sigma)_{s_1}$ und $(d\sigma)_{s_2}$ deren Zuwächse $d\vartheta_1$ und $d\vartheta_2$ während der angegebenen Bewegung, also:

$$(d\sigma)_{s_1} - (d\sigma)_{s_2} = d\vartheta_1 - d\vartheta_2.$$

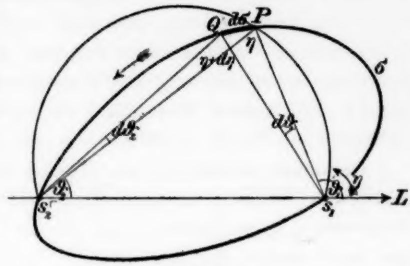


Fig. 6.

Nun ist aber $\vartheta_1 - \vartheta_2 = \eta$, d. h. gleich dem Winkel, welchen die Strahlen $s_1 P$ und $s_2 P$ im Punkte P mit einander bilden, und wir können daher kurz schreiben:

$$(3) \qquad (d\sigma)_{s_1} - (d\sigma)_{s_2} = d\eta$$

d. h. *die Differenz* $(d\sigma)_{s_1} - (d\sigma)_{s_2}$ *ist gleich dem Zuwachs* $d\eta$, *den der Winkel* η *erfährt, wenn wir seinen Scheitelpunkt* P *das Curvenelement* $d\sigma$ *durchlaufen lassen* [vgl. die Figur].

Doch dieses Resultat besitzt in dieser Form noch nicht den genügenden Grad von Allgemeinheit. So haben wir z. B. bisher noch gar nicht auf das Vorzeichen von $(d\sigma)_{s_1}$ und $(d\sigma)_{s_2}$, d. h. noch gar nicht darauf geachtet, auf welche Seite des Curvenelementes $d\sigma$ man denn von s_1 bezw. s_2 aus blickt, ob auf die innere oder die äussere Seite*); auch haben wir bisher nichts darüber festgesetzt, in welcher Richtung wir uns den Scheitelpunkt P des Winkels η das Element $d\sigma$ durchlaufen denken.

Um daher zunächst das in (3) erhaltene Resultat näher zu präcisiren, wollen wir zuvörderst bei der Curve σ zwischen einer ***positiven und negativen Umlaufsrichtung*** unterscheiden, und zwar wollen wir, wie das auch in der Functionentheorie üblich ist, speciell als *positiv* diejenige Richtung bezeichnen, in welcher man längs der Curve σ fortgehn muss, um das Innengebiet $\mathfrak{J}$ von σ stets *zu seiner Linken* zu behalten.

Sodann empfiehlt es sich weiter, unter η nicht immer gerade den kleinsten Winkel zwischen $s_1 P$ und $s_2 P$ zu verstehn, η nicht nur zwischen 0 und π zu rechnen, sondern fortlaufend von 0 bis 2π, und zwar gestatten dies die folgenden Ueberlegungen: Legt man durch die drei Punkte

---

*) Vgl. die Anmerkung pag. 10.

s_1, s_2 und P einen Kreisbogen, so bildet dieser, wie man leicht übersieht, mit der Verlängerung von $s_1 s_2$, z. B. über s_1 hinaus, d. h. mit der Richtung L, den Winkel η, und wir können daher η geradezu durch diesen Winkel definiren — und jetzt hindert uns nichts, diesen fortlaufend von 0 bis 2π zu zählen, und zwar wollen wir festsetzen, dass wir ihn von L aus *in positivem Sinne* rechnen, d. h. in dem Sinne, welcher der positiven Umlaufsrichtung von σ entspricht. — Läge also z. B. in unserer Figur 6 der Punkt P unterhalb der Linie $s_1 s_2$, so käme ihm nach dieser Definition ein Werth η zwischen π und 2π zu.

Genauere Definition der Grösse η. — *Unter der einem Punkte P zugehörigen Grösse η verstehn wir den Winkel, welchen der durch P gelegte Kreisbogen $s_1 s_2$ im Punkte s_1 mit der Verlängerung L der Linie $s_1 s_2$ bildet; und zwar denken wir uns diesen Winkel von L ab in positivem Sinne gezählt von 0 bis 2π.*

Bedienen wir uns jetzt dieser Definition, so lehrt eine leichte Ueberlegung, dass wir allen möglichen Fällen, welche hinsichtlich der Lage des Elementes $d\sigma$ zu den Punkten s_1 und s_2 eintreten können, Rechnung tragen, wenn wir unser obiges Resultat (3) jetzt präciser so aussprechen:

Erster Satz. — *Die Differenz $(d\sigma)_{s_1} - (d\sigma)_{s_2}$ der scheinbaren Grössen eines Curvenelementes $d\sigma$ von zwei Punkten s_1 und s_2 aus ist gleich dem Zuwachs $d\eta$, welchen die Grösse η auf dem Elemente $d\sigma$ erfährt, wenn der Punkt P die Curve σ in positivem Sinne durchläuft, gleichgültig, ob das Element $d\sigma$ dem einen oder dem andern der beiden Theile σ_1 und σ_2 angehört, in welche s_1 und s_2 die Curve σ zerlegen*).* —

Nunmehr bilden wir unsere Curve σ von einem beliebigen Centrum o aus nach reciproken Radien ab. Die so entstehende Bildcurve sei σ' und die den Punkten s_1 und s_2 von σ conjugirten Punkte von σ' seien s_1' und s_2'. — Dann wollen wir einmal die Oeffnungsfunctionen D und D' der Curven σ und σ' in Bezug auf die Punkte s_1, s_2 bezw. s_1', s_2' als Pole näher untersuchen, d. h. also nach (2) die Ausdrücke:

$$D(s_1, s_2) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \text{abs}\,[(d\sigma)_{s_1} - (d\sigma)_{s_2}] \tag{4}$$

und

$$D'(s_1', s_2') = \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma'} \text{abs}\,[d\sigma')_{s_1'} - (d\sigma')_{s_2'}] \tag{4'}$$

---

*) Der Satz gilt nämlich nicht mehr für solche Curvenelemente, welche einen der Punkte s_1 oder s_2 *in ihrem Innern* enthalten, da sich an diesen Stellen η sprungweise — um den Werth π — ändert. Deshalb empfiehlt es sich auch weiterhin öfters diese Theile σ_1 und σ_2, auf deren jedem η stetig ist, gesondert zu betrachten.

— denn bei Betrachtungen in der Ebene ist ja $h = 1$ [vgl. pag. 7]. — Unserem obigen Satze zufolge können wir dafür nun auch schreiben:

$$(5)\quad D(s_1, s_2) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \mathrm{abs}\, d\eta, \qquad \text{bezw.} \qquad D'(s_1', s_2') = \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma'} \mathrm{abs}\, d\eta',$$

wenn $d\eta$ und $d\eta'$ die Zuwächse bedeuten, welche die, zwei Punkten P und P' zugehörigen, Grössen η und η' erfahren, wenn wir diese Punkte die einzelnen Elemente von σ bezw. σ' durchlaufen lassen.

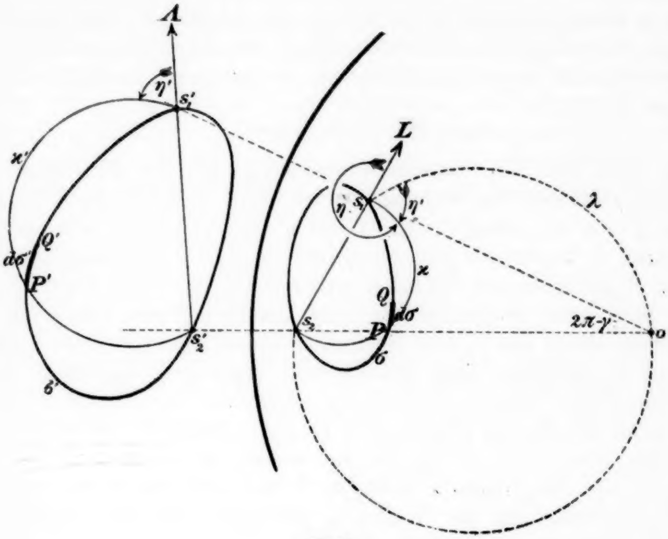


Fig. 7.

Fassen wir nun speciell zwei zu einander *conjugirte Elemente* $d\sigma$ und $d\sigma'$ ins Auge und verstehn ausserdem unter P und P' zwei *conjugirte Punkte*, so wird, wenn P das Element $d\sigma$ durchläuft, P' von selber das Element $d\sigma'$ durchlaufen, und können wir dann unter $d\eta$ und $d\eta'$ speciell diejenigen Zuwächse verstehn, welche η und η' bei dieser *cohärenten* Bewegung der Punkte P und P' erfahren, gleichgültig, ob sich bei ihr P und P' auf σ bezw. σ' in positivem oder negativem Sinne bewegen, denn den Formeln (5) zufolge kommt es nur auf die absoluten Werthe der Aenderungen von η und η' an.

Um nun die in solcher Weise genauer definirten Incremente $d\eta$ und $d\eta'$ für conjugirte Elemente $d\sigma$ und $d\sigma'$ näher untersuchen zu können, werden wir also zunächst den Zusammenhang zwischen den zwei conjugirten

Punkten P und P' entsprechenden Grössen η und η' festzustellen haben. — Wir legen dieserhalb durch die drei Punkte s_1, s_2 und P einerseits und durch s_1', s_2' und P' andrerseits zwei Kreisbogen $\varkappa$ und $\varkappa'$. Dann sind η und η' die Winkel, welche diese Bogen in s_1 und s_1', mit den Richtungen L bezw. Λ bilden, diese Winkel von L und Λ aus in positivem Sinne gerechnet.

Nun sind $\varkappa$ und $\varkappa'$ als Kreisbogen durch drei Paar conjugirter Punkte selber conjugirt zu einander, Winkel zwischen paarweise conjugirten Elementen sind aber einander gleich — denselben Winkel η', den $\varkappa'$ bei s_1' mit Λ bildet, wird also bei s_1 auch $\varkappa$ mit dem zu Λ conjugirten Kreisbogen einschliessen, d. h. mit dem durch das Abbildungscentrum o hindurchgehenden Bogen $s_1 s_2$, oder, wie wir kurz sagen wollen, mit dem Bogen λ:

$$\text{Winkel}\,(\varkappa, \lambda) = \eta'.$$

Nun lehrt aber eine einfache Ueberlegung, dass die Abbildung nach reciproken Radien den Drehungssinn umkehrt; wenn wir also bei s_1', um von Λ zu $\varkappa'$ zu gelangen, den Winkel η' in *positivem* Sinne durchlaufen mussten, so werden wir jetzt bei s_1, um von λ zu $\varkappa$ zu gelangen, in *negativem* Sinne um diesen Winkel η' weitergehn müssen [vgl. Figur 7].

Man kann demgemäss bei einer Umkreisung des Punktes s_1 auf zweierlei Weise von L zum Bogen $\varkappa$ gelangen: *entweder* man rückt zunächst in positivem Sinne vor bis zum Bogen λ — der dabei durchlaufene Winkel heisse γ — und geht alsdann um den Winkel η' zurück (d. h. in negativem Sinne), geht also *im Ganzen* in positivem Sinne um den Winkel $\gamma - \eta'$ vor, *oder aber zweitens* kann man (laut Definition von η) auch zum Bogen $\varkappa$ gelangen, indem man von L aus direct in positivem Sinne um den Winkel η weitergeht. Es folgt somit, dass $\gamma - \eta' = \eta$, bezw. $= \eta - 2\pi$, also

$$(6) \qquad \eta + \eta' = \gamma, \textit{ bezw. } = \gamma + 2\pi$$

ist, und zwar kann der Uebergang von einem dieser Werthe zum anderen nur stattfinden, wenn P durch einen der Punkte s_1 oder s_2, und demgemäss der Punkt P' durch s_1' bezw. s_2' hindurchgeht, da nur dann sich die Grössen η und η' unstetig ändern. — Beachten wir nun noch, dass der Bogen λ und damit auch der Winkel γ nur abhängt von der Lage von s_1 und s_2, nicht aber von der speciellen Lage des Punktes P, so können wir das erhaltene Resultat auch so aussprechen:

Zweiter Satz. — *Entsprechen die Grössen η und η' zwei conjugirten Punkten P und P', so hat ihre Summe $\eta + \eta'$ je einen constanten Werth für beliebige Lagen des Punktes P auf dem einen und auf dem anderen der beiden Theile σ_1 und σ_2, in die s_1 und s_2 die Curve σ zerlegen.*

Lassen wir nun P irgend ein Element $d\sigma$ z. B. des Theiles σ_1 und demgemäss P' das conjugirte Element $d\sigma'$ des entsprechenden Curventheiles σ_1' von σ' durchlaufen, so wird die Summe $\eta + \eta'$ bei dieser Bewegung denselben Werth behalten, die Zuwächse, welche die Grössen η und η' erfahren, werden sich gegenseitig zerstören, es folgt $d\eta + d\eta' = 0$ und daher

$$\text{abs}\, d\eta = \text{abs}\, d\eta'.$$

Es sind somit die je zwei conjugirten *Elementen* von σ_1 und σ_1' entsprechenden Antheile der beiden Integrale (5), und daher auch die über die conjugirten *Curvenstücke* σ_1 und σ_1' hinerstreckten Integrale selber einander gleich. — Was nun aber von diesen Curvenstücken σ_1 und σ_1' gilt, das gilt analog auch von den anderen Theilen σ_2 und σ_2' der Curven σ und σ'. Es sind also die den beiden *Theilen* von σ (d. h. σ_1 und σ_2) bezw. von σ' (d. h. σ_1' und σ_2') entsprechenden Integralantheile paarweise einander gleich und daher auch die über die *ganzen* Curven σ und σ' hinerstreckten Integrale (5) selber einander gleich. Es folgt somit das überaus einfache Resultat:

$$D(s_1, s_2) = D'(s_1', s_2'). \tag{7}$$

Erstes allgemeines Theorem. — *Es seien σ und σ' zwei Curven, die einander nach dem Gesetz der reciproken Radien conjugirt sind, und ferner mögen s_1, s_2 und s_1', s_2' zwei Paare conjugirter Punkte dieser Curven sein. Alsdann sind die Oeffnungsfunctionen von σ und σ', gebildet mit Bezug auf diese beiden conjugirten Punktepaare als Pole einander gleich; es ist stets $D(s_1, s_2) = D'(s_1', s_2')$.*

Aus diesem Theorem geht nun hervor, dass alle Werthe, welche die Oeffnungsfunction der einen dieser Curven bei beliebiger Lage der Pole annimmt, auch von der Oeffnungsfunction der anderen Curve angenommen werden können; beide Functionen werden daher auch denselben grössten Werth besitzen, d. h. beide Curven σ und σ' besitzen dieselbe Configurationsconstante c.

Zweites allgemeines Theorem. — *Zwei Curven σ und σ', welche einander nach dem Gesetz der reciproken Radien conjugirt sind, besitzen dieselbe Configurationsconstante.*

Aus diesem bemerkenswerthen Satze, der das eigentliche Ziel der Untersuchungen dieses Paragraphen bildete, wollen wir nun noch eine speciellere Folgerung ziehn: Ist die eine der Curven σ und σ' *convex* (richtiger gesagt *nirgends concav*), so ist nach dem dritten Satze pag. 27 ihre Configurationsconstante c kleiner als 1; folglich ist nach dem soeben bewiesenen allgemeinen Theorem auch die der anderen Curve kleiner als 1 und dieses Resultat können wir so aussprechen:

Specialsatz. — *Die Configurationsconstante jedes ebnen Bereiches, der durch Abbildung nach reciproken Radien von irgend einem Centrum aus in ein nirgend concaves Gebiet übergeführt werden kann, ist kleiner als* 1 (*nicht nur* $\leqq 1$).

Es hat danach also z. B. auch noch das aus der Ellipse durch Abbildung entstehende, unter Umständen sehr stark concave Gebiet eine Configurationsconstante, deren Werth hinter der 1 zurückbleibt. —

Wie schon in der Einleitung angedeutet wurde ist nun jedes beliebige ebne Gebiet in solche übereinandergreifende Theilgebiete zerlegbar, welche, wenn nicht selber bereits convex, doch durch Abbildung nach reciproken Radien in convexe Gebiete übergeführt werden können*), und damit nach dem soeben ausgesprochenen Satze auch *in lauter Theilgebiete, deren Configurationsconstanten kleiner als 1 sind.*

Dies letztere ist aber gerade der Inhalt eines Hauptsatzes des Herrn *Noble*, der ihn freilich auf ganz anderem directerem Wege bewiesen hat. — Aus unseren Betrachtungen geht nun aber erst deutlich hervor, dass *die Noble'sche Eintheilung in Gebiete mit echtgebrochenen Configurationsconstanten im Wesentlichen identisch ist mit derjenigen, deren man sich früher bediente,* um für die Theilgebiete Fundamentalfunctionen aus vorgeschriebenen Randwerthen herstellen zu können, nämlich eben mit der Eintheilung in Gebiete, die entweder selber convex sind, oder doch wenigstens durch Abbildung nach reciproken Radien in convexe Gebiete übergeführt werden können [vgl. die Einleitung, pag. 6]. —

Schliesslich sei noch Folgendes bemerkt: Die naheliegende Vermuthung dass unsere für *Curven in der Ebene* abgeleiteten beiden Theoreme auch noch bei *Flächen im Raume* gelten möchten, dass also insbesondere zwei einander conjugirte Flächen im Raume gleiche Configurationsconstanten besässen, ist *wahrscheinlich nicht richtig.* — Es ist mir bisher nicht gelungen diese Frage in dem einen oder dem anderen Sinne endgültig zu beantworten; diese Untersuchungen im Raume bieten nämlich weit grössere Schwierigkeiten dar, wie die oben in der Ebene angestellten [vgl. C. N. Abhandl. I, pag. 115], weil dort eine ähnlich einfache Darstellung der Differenz $(d\sigma)_{s_1} - (d\sigma)_{s_2}$, wie wir sie oben im Falle der Ebene in der Formel (3) kennen lernten, nicht existirt.

---

*) Vgl. *Pockels* „Ueber die partielle Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$. Leipzig bei Teubner **1891**, pag. 262.

Ueber die Anzahl der Riemann'schen Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten.

Von

A. Hurwitz in Zürich.

In meiner Abhandlung „Ueber Riemann'sche Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten"*) habe ich die Frage nach der Anzahl der n-blättrigen Riemann'schen Flächen mit w gegebenen einfachen Verzweigungspunkten zurückgeführt auf die Frage, wie viele Systeme von w Transpositionen $(t_1, t_2, \cdots t_w)$ bei n Elementen vorhanden sind, welche durch ihre Zusammensetzung die identische Substitution ergeben, also die Bedingung

$$t_1 t_2 \cdots t_w = 1 \tag{1}$$

befriedigen. Ich verallgemeinerte diese Frage dadurch, dass ich an die Stelle der Gleichung (1) die folgende:

$$t_1 t_2 \cdots t_w = S \tag{2}$$

setzte, wo S eine beliebig gegebene Substitution der n Elemente bedeutet, und ich zeigte, dass die Anzahl $f_S(w)$ der Systeme $(t_1, t_2, \cdots t_w)$ von w Transpositionen, welche der Gleichung (2) genügen, die Form

$$f_S(w) = c_1 f_1^w + c_2 f_2^w + \cdots + c_k f_k^w \tag{3}$$

besitzt. Hier bezeichnen $f_1, f_2, \cdots f_k$ ausschliesslich von n abhängende ganze Zahlen, während $c_1, c_2, \cdots c_k$ rationale Zahlen sind, die von n und der gegebenen Substitution S abhängen.

Die Bildungsweise der Zahlen $f_1, f_2, \cdots f_k$ konnte ich explicite angeben, dagegen nicht die der Zahlen $c_1, c_2, \cdots c_k$.

Als ich im letzten Sommer mit Herrn Dr. E. Lasker, dem bekannten Weltschachmeister und Mathematiker, dieses Resultat besprach, wurde ich durch eine geistvolle Bemerkung des Herrn Lasker zu einer Ueberlegung geführt, welche unmittelbar zeigt, dass die Anzahl $f_S(w)$ der Entwickelungscoefficient einer gewissen rationalen Function ist, die mit der Gruppendeter-

---

*) Diese Annalen Bd. 39, S. 1 (1891). Im Folgenden mit R. citirt.

minante der symmetrischen Gruppe in engem Zusammenhange steht. Dank der neueren Untersuchungen des Herrn Frobenius über die Gruppendeterminante*) gelingt es nun nicht nur, die in meiner Arbeit enthaltene Bestimmung (3) der Anzahl $f_S(w)$ aufs Neue zu beweisen, sondern dieselbe auch durch die explicite Darstellung der Coefficienten $c_1, c_2, \cdots c_k$ zu ergänzen. Hierdurch wird es dann weiter möglich, die Frage nach der Anzahl der n-blättrigen Riemann'schen Flächen mit w gegebenen einfachen Verzweigungspunkten in völlig befriedigender Weise zu erledigen. Im Folgenden erlaube ich mir, dieses des Näheren auszuführen. Dabei werde ich zunächst in § 1 die oben erwähnte Ueberlegung wiedergeben; ich hätte freilich das Resultat derselben auch unmittelbar aus F. I entnehmen können. (Vgl. Formel (8) in § 6 dieser Abhandlung. Die Zahl $f_S(w)$ ist ein specieller Fall der von Herrn Frobenius mit $h_{\alpha\beta\cdots\varkappa}$ bezeichneten Zahlen.) Wenn ich hiervon absah, so leitete mich dabei der Umstand, dass meine Deduction sich leicht verallgemeinern lässt und dadurch zu einer bemerkenswerthen Eigenschaft der Gruppendeterminante einer beliebigen endlichen Gruppe führt.

§ 1.

Es bezeichne S eine beliebig gegebene Substitution bei n Elementen, und es seien

(1) $$\tau_1, \tau_2, \cdots \tau_r \quad \left(r = \frac{n(n-1)}{2}\right)$$

die mit denselben Elementen gebildeten Transpositionen. Wir betrachten nun die sämmtlichen Systeme von w Transpositionen

(2) $$t_1, t_2, \cdots t_w,$$

welche dadurch entstehen, dass man $t_1, t_2, \cdots t_w$ unabhängig von einander die r Transpositionen $\tau_1, \tau_2, \cdots \tau_r$ durchlaufen lässt. Unter diesen r^w Systemen mögen $f_S(w)$ vorhanden sein, welche der Bedingung

(3) $$t_1 t_2 \cdots t_w = S$$

genügen. Das somit für jeden positiven ganzzahligen Werth von w definirte Zeichen $f_S(w)$ werde ferner für $w = 0$ durch die Festsetzung erklärt, dass

(4) $$f_S(0) = 1 \text{ oder } 0$$

sein soll, je nachdem S die identische Substitution ist oder nicht.

---

*) „Ueber Gruppencharaktere", Sitzungsberichte der kgl. preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Jahrgang 1896, S. 985. „Ueber die Primfactoren der Gruppendeterminante". Ebenda, S. 1343. „Ueber die Charaktere der symmetrischen Gruppe". Ebenda Jahrgang 1900, S. 516. Diese Abhandlungen werde ich mit F. I., F. II. und F. III. bezüglich citiren.

Summirt man über alle $n!$ Substitutionen S, so ist offenbar

$$\sum f_S(w) = r^w \qquad (w = 0, 1, 2, \cdots),$$

und hieraus folgt, dass für jede einzelne Substitution S die Zahl $f_S(w) \leqq r^w$ ist. Daher convergirt die Potenzreihe

$$\varphi_S(u) = f_S(0) + f_S(1)\,u + f_S(2)u^2 + \cdots + f_S(w)u^w + \cdots \tag{5}$$

für genügend kleine Werthe des absoluten Betrages $|u|$ der Variabeln u.

Die $h = n!$ Substitutionen, die aus den n Elementen gebildet werden können, mögen jetzt in irgend einer Reihenfolge mit

$$S_1 = 1,\ S_2,\ S_3, \cdots S_h \tag{6}$$

bezeichnet werden. Es bestehen dann zwischen den h Potenzreihen

$$\varphi_{S_1}(u),\ \varphi_{S_2}(u), \cdots \varphi_{S_h}(u) \tag{7}$$

h Relationen, die man auf folgende Weise erhält. Da die Gleichung (3) auch in der Form

$$t_2 \cdots t_w = t_1 S$$

geschrieben werden kann, so sieht man, dass unter den Lösungen der Gleichung (3) $f_{t_1 S}(w-1)$ vorhanden sind, für welche t_1 eine bestimmte der Transpositionen (1) ist. Folglich hat man:

$$f_S(w) = f_{\tau_1 S}(w-1) + f_{\tau_2 S}(w-1) + \cdots + f_{\tau_r S}(w-1), \quad (w = 1, 2, 3, \cdots). \tag{8}$$

Diese Gleichung multiplicire ich mit u^w und summire sodann über $w = 1, 2, 3, \cdots$. Hierdurch kommt

$$\varphi_S(u) - f_S(0) = u\,\varphi_{\tau_1 S}(u) + u\,\varphi_{\tau_2 S}(u) + \cdots + u\,\varphi_{\tau_r S}(u),$$

oder

$$\varphi_S(u) - u\,\varphi_{\tau_1 S}(u) - u\,\varphi_{\tau_2 S}(u) - \cdots - u\,\varphi_{\tau_r S}(u) = \varepsilon_S, \tag{9}$$

wobei $\varepsilon_S = f_S(0)$, also gleich 1 oder 0 ist, je nachdem S die identische Substitution ist oder nicht.

Die Gleichung (9) repräsentirt, da man für S jede der h Substitutionen (6) nehmen kann, im Ganzen h lineare Gleichungen für die h Potenzreihen (7). Die Determinante dieser Gleichungen reducirt sich für $u = 0$ auf 1 und ist also nicht identisch Null. Daher lassen sich die Potenzreihen $\varphi_S(u)$ oder vielmehr die durch sie definirten analytischen Functionen, aus den Gleichungen (9) berechnen; offenbar ergeben sich dieselben als rationale Functionen von u. Um die Auflösung der Gleichungen (9) auszuführen, setze man dieselben zunächst in die Form:

$$c_{S_1 S^{-1}}\,\varphi_{S_1}(u) + c_{S_2 S^{-1}}\,\varphi_{S_2}(u) + \cdots + c_{S_h S^{-1}}\,\varphi_{S_h}(u) = \varepsilon_S, \tag{9'}$$

wobei dann der Coefficient $c_{S_i S^{-1}}$ gleich Null ist, ausser wenn die seinen

Index bildende Substitution $S_i S^{-1}$ die Identität oder eine Transposition ist, in welchen Fällen man $c_{S_i S^{-1}} = 1$ resp. $= -u$ hat.

Aus (9') ersieht man, dass

$$(10) \qquad \varphi_{S_1}(u) = \frac{\Theta_1}{\Theta},\ \varphi_{S_2}(u) = \frac{\Theta_2}{\Theta}, \cdots \varphi_{S_h}(u) = \frac{\Theta_h}{\Theta}$$

wird, wenn Θ die Determinante

$$(11) \qquad \Theta = \begin{vmatrix} c_{S_1 S_1^{-1}}, & c_{S_2 S_1^{-1}}, & \cdots & c_{S_h S_1^{-1}} \\ c_{S_1 S_2^{-1}}, & c_{S_2 S_2^{-1}}, & \cdots & c_{S_h S_2^{-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{S_1 S_h^{-1}}, & c_{S_2 S_h^{-1}}, & \cdots & c_{S_h S_h^{-1}} \end{vmatrix}$$

und $\Theta_1, \Theta_2, \cdots \Theta_h$ ihre nach den Elementen der ersten Horizontalreihe genommenen Unterdeterminanten bedeuten. Was die Elemente $c_{S_1}, c_{S_2}, \cdots c_{S_h}$ der Determinante Θ angeht, so ist, wie schon erwähnt,

$$(12) \qquad c_S = 1 \quad \text{oder} \quad -u \quad \text{oder} \quad 0,$$

je nachdem $S = S_1$, d. i. die identische Substitution oder $S = \tau_i$, d. i. eine Transposition oder endlich S weder die identische Substitution noch eine Transposition ist.

§ 2.

Die Ergebnisse der oben citirten Abhandlungen des Herrn Frobenius gestatten es nun, die Darstellungen (10) der Functionen $\varphi_S(u)$ weiter zu entwickeln. Dabei bediene ich mich der von Herrn Frobenius eingeführten Bezeichnungen. Für die hier stattfindenden Werthe der Elemente c_S der Determinante Θ besteht die Beziehung

$$(1) \qquad c_{T^{-1} S T} = c_S,$$

d. h. für zwei ähnliche Substitutionen sind die entsprechenden Elemente c einander gleich. Die $h = n!$ Substitutionen $S_1, S_2, \cdots S_h$ theile man in Classen untereinander ähnlicher ein und bezeichne die Classen mit den Nummern (1), (2), (3), $\cdots$ (k); dabei möge die Classe (1) aus der einen identischen Substitution S_1 bestehen und die Classe (2) die sämmtlichen Transpositionen umfassen. Zunächst unterwerfe man die Grössen $c_{S_1}, c_{S_2}, \cdots c_{S_h}$ keiner anderen Bedingung als der Beziehung (1); dann reduciren sich dieselben auf k unabhängige Grössen, welche einzeln den k Classen zugeordnet sind und diesen entsprechend mit $c_1, c_2, \cdots c_k$ bezeichnet werden können. In der Determinante Θ kommt dann jede Grösse c_ϱ in jeder Horizontalreihe h_ϱ-Mal vor, wenn h_ϱ die Anzahl der Substitutionen in der

Classe (ϱ) bedeutet. Da überall, wo das Element c_ϱ in der Determinante Θ auftritt, ihm dieselbe Unterdeterminante entspricht, so ist

$$\frac{\partial \Theta}{\partial c_\varrho} = h h_\varrho \cdot \Theta_i,$$

wenn die Substitution S_i in die Classe (ϱ) gehört. Also hat man

$$\frac{\Theta_i}{\Theta} = \frac{1}{h h_\varrho} \frac{\partial \lg \Theta}{\partial c_\varrho}. \tag{2}$$

Nun ist aber (F. II. § 6 Gleichung (9))

$$\Theta = \prod \Big[\frac{1}{f} \sum_S \chi(S) c_S\Big]^{f^2} = \prod \Big[\frac{1}{f} \sum_\varrho h_\varrho \chi_\varrho c_\varrho\Big]^{f^2}, \tag{3}$$

wobei das Product über die k verschiedenen Charaktere $(\chi(S_1), \chi(S_2), \cdots \chi(S_h))$ auszudehnen ist. Somit geht die Gleichung (2) über in

$$\frac{\Theta_i}{\Theta} = \frac{1}{h} \sum \frac{f^2 \chi_\varrho}{\sum\limits_\varrho h_\varrho \chi_\varrho c_\varrho} = \frac{1}{h} \sum \frac{f^2 \chi(S_i)}{\sum\limits_S \chi(S) c_S}. \tag{4}$$

Berücksichtigt man schliesslich, dass in den Formeln (10) des § 1 die c_S die unter (12) § 1 angegebenen Werthe besitzen, so erkennt man, dass

$$\varphi_S(u) = \frac{1}{h} \sum \frac{f^2 \chi(S)}{f - h_2 \chi_2 u}, \quad \Big(h_2 = r = \frac{n(n-1)}{2}\Big) \tag{5}$$

der definitive Ausdruck für die Function $\varphi_S(u)$ ist.

Durch Entwickelung nach aufsteigenden Potenzen von u ergiebt sich für die Anzahl $f_S(w)$ die Formel:

$$f_S(w) = \frac{1}{h} \sum f \chi(S) \Big(\frac{h_2 \chi_2}{f}\Big)^w. \tag{6}$$

Insbesondere kommt für die identische Substitution S_1, da $\chi(S_1) = f$ ist,

$$\varphi_{S_1}(u) = \frac{1}{h} \sum \frac{f^3}{f - h_2 \chi_2 u}, \tag{7}$$

und also

$$f_{S_1}(w) = \frac{1}{h} \sum f^2 \Big(\frac{h_2 \chi_2}{f}\Big)^w \tag{8}$$

als Anzahl der Darstellungen der identischen Substitution durch ein Product von w Transpositionen.

§ 3.

Herrn Frobenius ist es (in F. III) gelungen, für die sämmtlichen Charaktere der symmetrischen Gruppe bei n Elementen explicite Formeln aufzustellen. Von seinen Resultaten kommen für die hier zu behandelnde Frage nach der Anzahl Riemann'scher Flächen die folgenden in Betracht.

Die einzelnen Charaktere der Vertauschungsgruppe bei n Elementen entsprechen denjenigen ganzzahligen Lösungen der Gleichung

$$(1)\qquad \varkappa_1 + \varkappa_2 + \cdots + \varkappa_n = \frac{1}{2} n(n+1),$$

welche den Bedingungen

$$(2)\qquad 0 \leqq \varkappa_1 < \varkappa_2 < \cdots < \varkappa_n$$

genügen. Diese Lösungen $(\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_n)$ mögen in irgend einer Reihenfolge mit den Nummern (1), (2), $\cdots (k)$ versehen werden. Das einzelne Lösungssystem $(\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_n)$ kann dann auch kurz durch seine Nummer $(\varkappa)$ bezeichnet werden. Ist

$$(3)\qquad (\varkappa) = (\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_n)$$

ein bestimmtes Lösungssystem, so ordne man demselben auf folgende Weise ein System von Zahlen $a_1, a_2, \cdots, b_1, b_2, \cdots$ zu. Es seien

$$(4)\qquad \varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_{n-r}$$

diejenigen der Zahlen $\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_n$, welche $< n$ sind, so dass die übrigen Zahlen

$$(5)\qquad \varkappa_{n-r+1}, \cdots \varkappa_n$$

$\geqq n$ sind. Nun setze man

$$(6)\qquad b_1 = \varkappa_{n-r+1} - n,\ b_2 = \varkappa_{n-r+2} - n, \cdots b_r = \varkappa_n - n,$$

und bezeichne mit

$$(7)\qquad a_1, a_2, \cdots a_r$$

diejenigen nach wachsender Grösse geordneten Zahlen, welche die folgenden zwischen 0 und $n-1$ liegenden Zahlen

$$n-1-\varkappa_1,\ n-1-\varkappa_2, \cdots n-1-\varkappa_{n-r}$$

zu der Zahlenreihe $0, 1, 2, \cdots n-1$ ergänzen. Werden nun die Charaktere, welche dem Lösungssystem (3) entsprechen, durch den oberen Index $\varkappa$ charakterisirt, so ist nach Herrn Frobenius für die identische Substitution

$$(8)\qquad \chi^{(\varkappa)}(S_1) = f^{(\varkappa)} = n! \frac{\Delta(\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_n)}{\varkappa_1! \varkappa_2! \cdots \varkappa_n!}$$

$$= n! \frac{\Delta(a_1, \cdots a_r) \cdot \Delta(b_1, \cdots b_r)}{a_1! \cdots a_r!\, b_1! \cdots b_r! \prod_{\alpha=1}^{r} \prod_{\beta=1}^{r} (a_\alpha + b_\beta + 1)},$$

wobei allgemein für irgend welche Grössen $x_1, x_2, \cdots x_m$

$$\Delta(x_1, x_2, \cdots x_m) = \prod_{i,k} (x_i - x_k) \quad (i > k,\ i, k = 1, 2, \cdots m)$$

ist. Für die Transpositionen findet Herr Frobenius

$$(9) \qquad \frac{h_2 \chi_2^{(\varkappa)}}{f^{(\varkappa)}} = \frac{1}{2}\left(\sum_{\beta=1}^{r} b_\beta(b_\beta + 1) - \sum_{\alpha=1}^{r} a_\alpha(a_\alpha + 1)\right).$$

Die rechte Seite lässt sich hier auch einfach durch die Zahlen $\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_n$ ausdrücken. Nach dem Zusammenhang, in welchem diese Zahlen mit den Zahlen a_α und b_β stehen, ist nämlich

$$\sum b_\beta(b_\beta + 1) = \sum (\varkappa_\lambda - n)(\varkappa_\lambda - n + 1), \quad (\lambda = n - r + 1, \cdots n)$$

und

$$\sum a_\alpha(a_\alpha + 1) + \sum_{\mu=1}^{n-r} (n - 1 - \varkappa_\mu)(n - \varkappa_\mu) = \sum_{k=0}^{n-1} k(k+1) = \frac{1}{3} n(n^2 - 1).$$

Und hieraus ergiebt sich nach kurzer Rechnung

$$(9') \qquad \frac{h_2 \chi_2^{(\varkappa)}}{f^{(\varkappa)}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \varkappa_i(\varkappa_i - 1) - \frac{1}{6} n(n-1)(n+4).$$

Nach Gleichung (8) des vorigen Paragraphen wird also

$$(10) \qquad f_{S_1}(w) = \frac{1}{n!} \sum f^{(\varkappa)^2} \left(\frac{h_2 \chi_2^{(\varkappa)}}{f^{(\varkappa)}}\right)^w$$

$$= n! \sum \frac{\Delta^2(\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_n)}{\varkappa_1!^2 \varkappa_2!^2 \cdots \varkappa_n!^2} \left[\frac{\varkappa_1(\varkappa_1 - 1)}{2} + \frac{\varkappa_2(\varkappa_2 - 1)}{2} + \cdots \right.$$

$$\left. + \frac{\varkappa_n(\varkappa_n - 1)}{2} - \frac{1}{6} n(n-1)(n+4)\right]^w$$

Hier ist die Summation über alle den Bedingungen (2) genügenden Lösungen $(\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_n)$ der Gleichung (1) zu erstrecken. Da das allgemeine Glied der Summe (10) symmetrisch bezüglich $\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_n$ ist und verschwindet, wenn zwei dieser Zahlen aneinander gleich sind, so erkennt man, dass

die Anzahl $f_{S_1}(w)$ der Systeme von w Transpositionen $t_1, t_2, \cdots t_w$, welche der Bedingung

$$t_1 t_2 \cdots t_w = 1$$

genügen, durch die Gleichung

$$(11)\quad f_{s_1}(w)=\sum\frac{\Delta^2(\varkappa_1,\varkappa_2,\cdots\varkappa_n)}{\varkappa_1!^2\varkappa_2!^2\cdots\varkappa_n!^2}\Big[\frac{\varkappa_1(\varkappa_1-1)}{2}+\frac{\varkappa_2(\varkappa_2-1)}{2}+\cdots+\frac{\varkappa_n(\varkappa_n-1)}{2}-\frac{1}{6}n(n-1)(n+4)\Big]^w$$

gegeben ist, in welcher die Summation über alle Lösungen der Gleichung

$$\varkappa_1+\varkappa_2+\cdots+\varkappa_n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

in nicht-negativen ganzen Zahlen $\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_n$ *zu erstrecken ist.*

In der Folge schreibe ich die Gleichung (10) indem ich mit $(\varkappa)$ die Nummer des Lösungssystem $(\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_n)$ bezeichne, in der Form

$$(12)\qquad \frac{1}{n!}f(w\,|\,n)=A_1B_1^w+A_2B_2^w+\cdots+A_kB_k^w,$$

wo dann also

$$(13)\quad A_\varkappa=\left(\frac{\Delta(\varkappa_1,\varkappa_2,\cdots\varkappa_n)}{\varkappa_1!\,\varkappa_2!\cdots\varkappa_n!}\right)^2,\quad B_\varkappa=\sum_{i=1}^{n}\frac{\varkappa_i(\varkappa_i-1)}{2}-\frac{1}{6}n(n-1)(n+4)$$

zu setzen und $f(w\,|\,n)$ für $f_{s_1}(w)$ geschrieben ist, um die Abhängigkeit dieser Grösse von n anzudeuten.

Dass die Zahlen $B_1, B_2, \cdots B_k$ übereinstimmen mit den von mir (R. Seite 12) eingeführten Zahlen $f_1, f_2, \cdots f_k$ erkennt man auf folgende Weise. Setzt man

$$\nu_n=\varkappa_1,\ \nu_{n-1}=\varkappa_2-1,\ \nu_{n-2}=\varkappa_3-2,\cdots \nu_1=\varkappa_n-(n-1),$$

so wird nach (1) und (2)

$$\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_n=n,\ \nu_1\geqq\nu_2\geqq\nu_3\geqq\cdots\geqq\nu_n\geqq 0,$$

und der Ausdruck für $B_\varkappa$ lässt sich in der Form

$$B_\varkappa=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\nu_i+n-i)(\nu_i+n-i-1)-\frac{1}{6}n(n-1)(n+4)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\nu_i(\nu_i-1)-\sum_{i=1}^{n}i\,\nu_i+n$$

schreiben. Dieses ist aber gerade der Ausdruck, durch welchen ich in meiner Arbeit R. die Zahlen $f_\varkappa$ definirt habe.*)

Aus der Gleichung (12) ziehe ich noch eine Folgerung, welche für die weiteren Betrachtungen wichtig ist. Bildet man nämlich die Potenzreihe

*) Der innere Zusammenhang der bezüglichen Ueberlegungen in meiner Arbeit R. mit F. III zeigt sich darin, dass Herr Frobenius dieselben Untergruppen der symmetrischen Gruppe bei der Bestimmung der Charaktere der letzteren zu Hülfe zieht, welche bei mir a. a. O. vorkommen.

$$(14)\quad F_n(u) = \frac{1}{n!}\left\{ f(0|n) + f(1|n)\frac{u}{1!} + f(2|n)\frac{u^2}{2!} + \cdots + f(w|n)\frac{u^w}{w!} + \cdots \right\},$$

so zeigt die Gleichung (12) unmittelbar, dass die hierdurch definirte Function

$$(15)\qquad F_n(u) = A_1 e^{B_1 u} + A_2 e^{B_2 u} + \cdots + A_k e^{B_k u}$$

ist. Umgekehrt folgt natürlich aus den Gleichungen (14) und (15) wieder die Gleichung (12).

Für die niedrigsten Werthe von n findet man:

$$(16)\quad \begin{cases} F_2(u) = \frac{1}{(2!)^2}(e^u + e^{-u}), \\ F_3(u) = \frac{1}{(3!)^2}(e^{3u} + e^{-3u} + 4), \\ F_4(u) = \frac{1}{(4!)^2}(e^{6u} + e^{-6u} + 9(e^{2u} + e^{-2u}) + 4), \\ F_5(u) = \frac{1}{(5!)^2}(e^{10u} + e^{-10u} + 16(e^{5u} + e^{-5u}) + 25(e^{2u} + e^{-2u}) + 36), \\ F_6(u) = \frac{1}{(6!)^2}(e^{15u} + e^{-15u} + 25(e^{9u} + e^{-9u}) + 81(e^{5u} + e^{-5u}) \\ \qquad\qquad + 125(e^{3u} + e^{-3u}) + 256). \end{cases}$$

Der Factor 125 in der letzten Function setzt sich aus den Quadraten 100 und 25 zusammen.

Das an sich sinnlose Zeichen $F_1(u)$ möge durch die Festsetzung

$$(17)\qquad F_1(u) = 1$$

definirt werden. Bei der Berechnung numerischer Beispiele wendet man am besten die Darstellung der Zahlen $A_\varkappa$ und $B_\varkappa$ durch die Zahlen $a_1, a_2, \cdots, b_1, b_2, \cdots$ an. (Vgl. (8) und (9).)

§ 4.

Von irgend welchen Transpositionen will ich sagen, dass sie die Elemente a, b mit einander verbinden oder in Verbindung setzen, wenn unter ihnen entweder die Transposition (ab) vorkommt oder wenn die Elemente $a_1, a_2, \cdots a_m$ so gewählt werden können, dass die Transpositionen $(aa_1), (a_1a_2), (a_2a_3), \cdots (a_mb)$ sich unter jenen Transpositionen finden. Jedes System von Transpositionen wird entweder sämmtliche auftretenden Elemente mit einander verbinden oder es werden diese Elemente in Gruppen zerfallen so, dass die Elemente einer Gruppe mit einander, aber mit keinem Elemente einer anderen Gruppe durch die Transpositionen verbunden werden. Es seien nun unter den $f(w|n)$ Lösungen der Gleichung

$$(1)\qquad t_1 t_2 \cdots t_w = 1$$

$\varphi(w|n)$ vorhanden, welche sämmtliche n Elemente mit einander in Verbindung setzen. Dann ist

$$(2) \qquad R(w|n) = \frac{1}{n!}\varphi(w|n), \quad (n = 3, 4, 5, \cdots)$$

die Anzahl der n-blättrigen Riemann'schen Flächen mit w gegebenen Verzweigungspunkten*). Für $n = 2$ stellt $R(w|2) = \frac{1}{2}\varphi(w|2)$ nur $\frac{1}{2}$ von der Anzahl der dann existirenden Riemann'schen Flächen vor. Denn diese Anzahl ist offenbar $= 0$ oder 1, je nachdem w ungerade oder gerade ist, und entsprechend ist $\varphi(w|2) = 0$ oder 1.

Die Anzahl $\varphi(w|n)$ und damit auch $R(w|n)$ lässt sich nun durch die Anzahl $f(w|n)$ ausdrücken, wie ich in R. Seite 14 angegeben habe. Da ich an jener Stelle der Kürze halber einige Zwischenrechnungen fortgelassen habe, so will ich hier die betreffenden Ueberlegungen etwas ausführlicher darstellen.

Betrachtet man irgend eine Lösung $(t_1, t_2, \cdots t_w)$ der Gleichung (1), so werden bezüglich derselben die n Elemente, mit welchen die Transpositionen gebildet sind, in Gruppen

$$(3) \quad G = a_1, \cdots a_{n_0}, \; G_1 = b_1, \cdots b_{n_1}, \; G_2 = c_1, \cdots c_{n_2}, \cdots G_r = l_1, \cdots l_{n_r}$$

zerfallen, der Art, dass die Elemente der Gruppe G gar nicht bei den Transpositionen $t_1, t_2, \cdots t_w$ vorkommen und die Elemente jeder der anderen Gruppen nur je unter sich durch die Transpositionen mit einander verbunden werden.

Die Gruppe G kann ganz fortfallen, in welchem Falle dann $n_0 = 0$ ist; die Anzahl r der übrigen Gruppen ist mindestens 1, jede der Zahlen $n_1, n_2, \cdots n_r$ mindestens 2 und natürlich

$$(4) \qquad n_0 + n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n.$$

Diejenigen der Transpositionen $(t_1, t_2, \cdots t_w)$, welche die Elemente von G_1 verbinden, seien in derselben Reihenfolge, in welcher sie in der Reihe $t_1, t_2, \cdots t_w$ auftreten, mit $t'_1, t'_2, \cdots t'_{w_1}$ bezeichnet, die entsprechende Bedeutung komme $t''_1, t''_2, \cdots t''_{w_2}$ bezüglich der Gruppe G_2 zu u. s. w. Dann ist offenbar

$$(5) \qquad t'_1 t'_2 \cdots t'_{w_1} = 1, \; t''_1 t''_2 \cdots t''_{w_2} = 1, \cdots t_1^{(r)} t_2^{(r)} \cdots t_{w_r}^{(r)} = 1$$

und

$$(6) \qquad w_1 + w_2 + \cdots + w_r = w \quad (w_1 > 1, \; w_2 > 1, \cdots w_r > 1).$$

Nun zähle man zunächst ab, wie viele Lösungen $(t_1, t_2, \cdots t_w)$ der Gleichung (1) existiren, für welche diese bestimmte Gruppenzerlegung (3) und

*) S. R. § 4.

die den Gruppen $G_1, G_2, \cdots G_r$ zukommenden Zahlen $w_1, w_2, \cdots w_r$ vorgeschrieben sind. Da die Gleichungen (5) bezüglich $\varphi(w_1|n_1)$, $\varphi(w_2|n_2), \cdots$ $\cdots \varphi(w_r|n_r)$ Lösungen besitzen und unter den $w!$ möglichen Anordnungen von w Elementen $t'_1, t'_2, \cdots t'_{w_1}, t''_1, t''_2, \cdots t''_{w_2}, \cdots t^{(r)}_1, t^{(r)}_2, \cdots t^{(r)}_{w_r}$ sich $\frac{w!}{w_1!\, w_2! \cdots w_r!}$ befinden, bei welchen die Elemente $t'_1, t'_2, \cdots t'_{w_1}$ in vorgeschriebener Reihenfolge, ebenso die Elemente $t''_1, t''_2, \cdots t''_{w_2}$ in vorgeschriebener Reihenfolge u. s. w. auftreten, so wird

$$\frac{w!}{w_1!\, w_2! \cdots w_r!}\, \varphi(w_1|n_1)\, \varphi(w_2|n_2) \cdots \varphi(w_r|n_r)$$

die hier in Betracht gezogene Anzahl sein. Daher ist

$$(7)\quad \Phi(n_1, n_2, \cdots n_r) = \sum_{w_1, w_2, \cdots w_r} \frac{w!}{w_1!\, w_2! \cdots w_r!}\, \varphi(w_1|n_1)\, \varphi(w_2|n_2) \cdots \varphi(w_r|n_r),$$

die Summe erstreckt über die Werthsysteme $w_1, w_2, \cdots w_r$, welche (6) genügen, die Anzahl der Lösungen $(t_1, t_2, \cdots t_w)$ der Gleichung (1), für welche die Gruppenzerlegung (3) vorgeschrieben ist.

Bei Festhaltung der Zahlen $n_0, n_1, n_2, \cdots n_r$ lassen sich die n Elemente auf $\frac{n!}{n_0!\, n_1!\, n_2! \cdots n_r!}$ Weisen in $r+1$ Gruppen $G, G_1, G_2, \cdots G_r$ zerlegen. Bildet man folglich die Summe

$$(8)\qquad \Psi(r) = \sum_{n_0, n_1 \cdots n_r} \frac{n!}{n_0!\, n_1! \cdots n_r!}\, \Phi(n_1, n_2, \cdots n_r),$$

$$(n_0 + n_1 + \cdots + n_r = n,\ n_0 \geqq 0,\ n_1 > 1,\ n_2 > 1, \cdots n_r > 1),$$

so hat man alle Lösungen der Gleichung (1) gezählt, für welche die n Elemente in r Systeme je unter einander verbundener zerfallen. Dabei hat man aber jede dieser Lösungen $r!$ Mal gezählt, weil freilich jeder Lösung $t_1, t_2, \cdots t_w$, eine bestimmte Gruppenzerlegung (3) entspricht, aber die Reihenfolge, in welcher man die Gruppen $G_1, G_2, \cdots G_r$ aufschreibt, dabei noch ganz willkürlich gewählt werden kann.

Hiernach wird nun die Gesammtzahl $f(w|n)$ der Lösungen $(t_1, t_2, \cdots t_w)$ der Gleichung (1) durch

$$\Psi(1) + \frac{1}{2!}\Psi(2) + \frac{1}{3!}\Psi(3) + \cdots$$

vorgestellt, oder es ist

$$(9)\ f(w|n) = \sum_{r=1,2,3,\cdots} \frac{1}{r!} \sum \frac{n!}{n_0!\, n_1! \cdots n_r!}\, \frac{w!}{w_1!\, w_2! \cdots w_r!}\, \varphi(w_1|n_1)\, \varphi(w_2|n_2) \cdots \varphi(w_r|n_r),$$

wobei in der inneren Summe $n_0, n_1, \cdots n_r, w_1, w_2, \cdots w_r$ alle ganzzahligen Werthsysteme annehmen müssen, welche den Gleichungen (4) und (6) und

überdies den Bedingungen $n_0 \geqq 0, n_1>1, \cdots n_r>1,\ w_1>1, w_2>1, \cdots w_r>1$ genügen.

Um nun aus der Gleichung (9) $\varphi(w\,|\,n)$ zu bestimmen, dividire ich die Gleichung durch $n!\,w!$ und multiplicire mit

$$u^w x^n = u^{w_1+w_2+\cdots+w_r} x^{n_0+n_1+n_2+\cdots+n_r},$$

unter u und x Variable verstanden. Sodann summire ich über $w=2,3,\cdots$, $n=2,3,\cdots$. Auf diese Weise kommt zunächst, wenn

$$(10)\qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{w,n} f(w\,|\,n)\frac{u^w}{w!}\frac{x^n}{n!} = \bar F(u,x), & (w, n = 2, 3, \cdots), \\ \displaystyle\sum_{w,n} \varphi(w\,|\,n)\frac{u^w}{w!}\frac{x^n}{n!} = \bar \Phi(u,x), & (w, n = 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

gesetzt wird,

$$(11)\qquad \bar F(u,x) = \sum_{r=1,2,3,\cdots}\frac{1}{r!}\sum_{n_0=0}^{\infty}\frac{x^{n_0}}{n_0!}[\bar\Phi(u,x)]^r = e^x\left(e^{\bar\Phi(u,x)}-1\right).$$

Nun sei, wie im vorigen Paragraphen

$$(12)\qquad F_n(u) = \frac{1}{n!}\sum_{w=0}^{\infty} f(w\,|\,n)\frac{u^w}{w!},\quad F_1(u)=1$$

und entsprechend

$$(13)\qquad \Phi_n(u) = \frac{1}{n!}\sum_{w=2}^{\infty} \varphi(w\,|\,n)\frac{u^w}{w!},\quad \Phi_1(u)=1.$$

Ferner werde

$$(14)\qquad \sum_{n=1}^{\infty} F_n(u)x^n = F(u,x),$$

$$(15)\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(u)x^n = \Phi(u,x)$$

gesetzt. Dann ist

$$F(u,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{w=0}^{\infty} f(w\,|\,n)\frac{u^w}{w!}\frac{x^n}{n!} = \bar F(u,x) + e^x - 1,$$

$$\Phi(u,x) = x + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{w=2}^{\infty} \varphi(w\,|\,n)\frac{u^w}{w!}\frac{x^n}{n!} = \bar\Phi(u,x) + x,$$

und folglich, nach (11),

$$(16)\qquad 1 + F(u,x) = e^{\Phi(u,x)}.$$

Hieraus ergiebt sich

$$\Phi(u,x) = \lg(1+F(u,x)) = F(u,x) - \frac{1}{2}[F(u,x)]^2 + \frac{1}{3}[F(u,x)]^3 - + \cdots,$$

oder, indem man die Coefficienten von x^n links und rechts vergleicht:

$$\Phi_n(u) = \sum_{r=1,2,\cdots} \frac{(-1)^{r-1}}{r} \sum_{n_1,n_2,\cdots n_r} F_{n_1}(u) F_{n_2}(u) \cdots F_{n_r}(u), \tag{17}$$

wobei die innere Summation über alle Lösungen der Gleichung

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n,$$

in positiven ganzen Zahlen $n_1, n_2, \cdots n_r$ auszudehnen ist. Z. B. wird

$$\Phi_2(u) = F_2(u) - \frac{1}{2}[F_1(u)]^2,$$

$$\Phi_3(u) = F_3(u) - F_1(u) F_2(u) + \frac{1}{3}[F_1(u)]^3,$$

u. s. w.

Durch die Gleichung (17) *ist nun die Bestimmung der Anzahl der n-blättrigen Riemann'schen Flächen mit w gegebenen einfachen Verzweigungspunkten vollendet.* Diese Anzahl $R(w|n)$ ist nämlich der Coefficient von $\frac{u^w}{w!}$ in der Entwickelung von $\Phi_n(u)$ nach Potenzen von u, und die letztere Function ist nach Gleichung (17) in Verbindung mit Gleichung (15) des vorigen Paragraphen als eine endliche Summe von Gliedern der Form Ce^{bu}, wo C rational und b ganzzahlig ist, darstellbar. Hat man $\Phi_n(u)$ in der Gestalt

$$\Phi_n(u) = \sum Ce^{bu} \tag{18}$$

dargestellt, so ist dann also

$$R(w|n) = \sum Cb^w \tag{19}$$

der Ausdruck für die in Rede stehende Anzahl Riemann'scher Flächen.

Ich stelle zum Schluss die Ausdrücke (18) der Function $\Phi_n(u)$ für die niedrigsten Werthe von n zusammen. Auf Grund der Gleichung (17) und der Formeln (16) des vorigen Paragraphen ergiebt sich:

$$\Phi_2(u) = \frac{1}{(2!)^2}[e^u + e^{-u} - 2],$$

$$\Phi_3(u) = \frac{1}{(3!)^2}[e^{3u} + e^{-3u} - 9(e^u + e^{-u}) + 16],$$

$$\Phi_4(u) = \frac{1}{(4!)^2}[e^{6u} + e^{-6u} - 16(e^{3u} + e^{-3u}) - 9(e^{2u} + e^{-2u}) \\ + 144(e^u + e^{-u}) - 240],$$

$$\Phi_5(u) = \frac{1}{(5!)^2}[(10u) - 25(6u) + 16(5u) - 100(4u) + 400(3u)$$
$$+ 600(2u) - 4000(u) + 6216].$$

$$\Phi_6(u) = \frac{1}{(6!)^2}((15u) - 36(10u) + 25(9u) - 225(7u) + 700(6u)$$
$$- 720(5u) + 7200(4u) - 15200(3u) - 34200(2u)$$
$$- 163575(u) - 242240].$$

Dabei habe ich in den beiden letzten Gleichungen allgemein (ku) an Stelle von $e^{ku} + e^{-ku}$ geschrieben.

Aus den vorstehenden Gleichungen ergeben sich für $n = 3, 4, 5, 6$ dieselben Werthe für die Anzahl der n-blättrigen Riemann'schen Flächen mit w gegebenen Verzweigungspunkten, wie ich sie in meiner Arbeit R. Seite 17 angegeben habe.

Zürich, 8. November 1900.

Ueber eine besondere Gattung endlicher discreter Gruppen.

Von

ALFRED LOEWY in Freiburg i. B.

Eine jede Gruppe $\mathfrak{G}$, deren Ordnung eine Primzahlpotenz ist, hat die Eigenschaft, dass sich jede beliebige ihrer Untergruppen in eine Compositionsreihe einordnen lässt. Wie man sofort sieht, trifft diese Thatsache auch für alle zerfallenden Gruppen, die sich als directes Product von Gruppen, deren Ordnungen Primzahlpotenzen sind, darstellen lassen, zu. Man kann nun zeigen, *dass mit den Gruppen, deren Ordnungen Primzahlpotenzen sind, und denen, die das directe Product solcher Gruppen sind, sämmtliche Gruppen erschöpft sind, bei denen eine jede Untergruppe in einer der Compositionsreihen, die man zu der gegebenen Gruppe construiren kann, vorkommt.*

Der Beweis beruht auf folgender einfacher Ueberlegung: Ist p^k die höchste Potenz der Primzahl p, die in der Ordnung einer Gruppe $\mathfrak{G}_1$ aufgeht, so sind bekanntlich alle Untergruppen der Ordnung p^k innerhalb $\mathfrak{G}_1$ ähnlich. Hieraus folgt: Ist $\mathfrak{P}$ eine Gruppe der Ordnung p^k, die in einer Gruppe $\mathfrak{G}_1$ invariant ist, und ist p^k die höchste Potenz der Primzahl p, die in der Ordnung von $\mathfrak{G}_1$ aufgeht, so ist $\mathfrak{P}$ auch eine invariante Untergruppe jeder Gruppe, welche $\mathfrak{G}_1$ als invariante Untergruppe enthält. Sei jetzt eine Gruppe $\mathfrak{G}$ von der Ordnung

$$p_1^{\lambda_1} \cdot p_2^{\lambda_2} \cdots p_\nu^{\lambda_\nu},$$

wobei $p_1, p_2, \cdots, p_\nu$ lauter verschiedene Primzahlen bedeuten, vorgelegt, dann enthält $\mathfrak{G}$ nach einem bekannten Sylow'schen Satz ν Untergruppen $\mathfrak{P}_i$ $(i = 1, 2, \cdots, \nu)$ von den Ordnungen $p_i^{\lambda_i}$ $(i = 1, 2, \cdots, \nu)$. Wenn sich jede Untergruppe von $\mathfrak{G}$ in eine Compositionsreihe von $\mathfrak{G}$ einordnen lassen soll, so muss dies auch für jede beliebige der Untergruppen $\mathfrak{P}_i$ zutreffen; jede Untergruppe $\mathfrak{P}_i$ ist dann, wie durch wiederholte Anwendung des angeführten Hilfssatzes geschlossen werden kann, nothwendig invariant in $\mathfrak{G}$; mithin enthält $\mathfrak{G}$ ν invariante Untergruppen

$\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots, \mathfrak{P}_\nu$ der Ordnungen $p_1^{\lambda_1}, p_2^{\lambda_2}, \cdots, p_\nu^{\lambda_\nu}$ und ist daher das directe Product derselben.

Zu der betrachteten Gruppengattung gehören offenbar die von Herrn Dedekind*) untersuchten Gruppen, bei denen sämmtliche Untergruppen in der vorgelegten Gruppe invariant sind.

Die hier betrachtete Gruppengattung ist, wie ich nachräglich bemerke, auch schon wegen einer anderen ihr charakteristischen Eigenschaft Gegenstand der Untersuchung gewesen. In seinem trefflichen Buch „theory of groups of finite order"**) beweist nämlich Herr Burnside das folgende Theorem:

If a group G, of order $p^\alpha q^\beta \cdots r^\gamma$, where $p, q, \cdots r$ are distinct primes, has a series of self-conjugate subgroups:

$$H_1, H_2, \cdots, H_{n-1}, H_n, G,$$

such that in G/H_r every operation of H_{r+1}/H_r is self-conjugate, then G is the direct product of groups of order $p^\alpha, q^\beta, \cdots, r^\gamma$.

Dieses Burnside'sche Resultat lässt sich nun sofort mit Untersuchungen von Herrn Ahrens in Zusammenhang bringen. In seiner Arbeit***) „über eine besondere Classe von Substitutionsgruppen" überträgt Herr Ahrens den von Lie in der Theorie der continuirlichen Transformationsgruppen eingeführten Begriff der adjungirten Gruppe in die Theorie der endlichen discreten Gruppen. Die von Herrn Ahrens jeder endlichen discreten Gruppe zugeordnete adjungirte Gruppe ist nichts anderes als die von Herrn Hölder eingeführte Gruppe der cogredienten Isomorphismen, welche man zu jeder endlichen discreten Gruppe bilden kann (Vgl. math. Encyklopädie, Artikel: Endliche discrete Gruppen von Burkhardt, Bd. I, p. 220, a. a. O., Z. 6 v. u. lies BAB^{-1} statt $BA^{-1}B^{-1}$). Bildet man zu einer Gruppe die Gruppe der cogredienten Isomorphismen, so kann man zu der so erhaltenen Gruppe wieder die Gruppe der cogredienten Isomorphismen bilden, u. s. w. fortfahren. Herr Ahrens fragt nun nach denjenigen endlichen discreten Gruppen, bei denen die Bildung der successiven adjungirten Gruppen, oder, was dasselbe ist, der successiven cogredienten Isomorphismengruppen schliesslich zur Identität führt. Das Resultat, zu dem Herr Ahrens gelangt, lässt sich auf folgende Art aussprechen: bei diesen Gruppen kann man eine derartige Anordnung treffen, wie sie auch der Burnside'sche Satz verlangt. Mithin gewinnt man das Theorem:

---

*) Math. Annalen, Bd. 48, p. 548.

**) Cambridge, 1897, p. 115. Theorem VIII.

***) Berichte über die Verhandlungen der Kgl. Sächsischen Gesellschaft der Wiss. zu Leipzig. Math.-phys. Classe 1897, p. 616 ff.

Diejenigen Gruppen, welche in das directe Product von Gruppen, deren Ordnungen Primzahlpotenzen sind, zerfallen, sind die einzigen Gruppen, bei welchen die succesiven adjungirten Gruppen (cogredienten Isomorphismengruppen) schliesslich mit der Identität enden.

Die hier behandelten endlichen discreten Gruppen bilden also in zweifacher Hinsicht (vgl. den vorigen Aufsatz und das Ahrens'sche Resultat: alle continuirlichen Transformationsgruppen vom Range Null und auch nur diese haben die Eigenschaft, dass ihre successiven adjungirten Gruppen schliesslich mit der Identität endigen*)) das Analogon zu den Killing'schen endlichen continuirlichen Transformationsgruppen vom Range Null. Ich gehe auf diesen Punkt um so lieber ein, als es auch Herrn G. A. Miller sowohl in seinem werthvollen *Report on recent progress in the theory of the groups of a finite order***), in dem er die Ahrens'schen Ergebnisse bespricht***), wie in der Arbeit „On the simple isomorphisms of a Hamiltonian group to itself"†) entgangen zu sein scheint, dass die von Herrn Ahrens angeregte Frage durch das Burnside'sche Theorem ihre Lösung gefunden hat.

*) W. Ahrens, Zur Theorie der adjungirten Gruppe. Ber. über die Verh. der K. Sächsischen Gesellsch. d. W. zu Leipzig, math.-phys. Classe, 1897, p. 358.

**) Bulletin of the American mathem. society, Vol. 5, (1898—99), p. 227 ff.

***) A. a. O. p. 230.

†) Bulletin of the American mathem. society, Vol. 5, (1898—99), p. 292.

Zur Theorie der endlichen continuirlichen Transformationsgruppen.

Von

Alfred Loewy in Freiburg i. B.

In seinen grundlegenden Untersuchungen zu Lies Theorie der endlichen continuirlichen Transformationsgruppen hat Herr Killing*) eine besondere Gattung von Gruppen von recht einfacher Structur, die er als Gruppen vom Range Null bezeichnet, eingeführt. Diese Gruppen sind nicht nur selbst integrable Gruppen, sondern auch die erste derivirte Gruppe jeder integrablen Gruppe ist eine Gruppe vom Range Null. Nach den Killing'schen Resultaten ist eine Gruppe vom Range Null dadurch charakterisirt, dass die sämmtlichen in ihr enthaltenen zweigliedrigen Untergruppen nur aus paarweise vertauschbaren Transformationen bestehen. Eine andere Definition der Gruppen vom Range Null, welche sich auf das Verhalten der successiven adjungirten Gruppen stützt, ist später von Herrn W. Ahrens**) angegeben worden. Die folgenden Zeilen sollen dem Nachweis einer neuen charakteristischen Eigenschaft der Gruppen vom Range Null gewidmet sein. *Die Gruppen vom Range Null sind dadurch ausgezeichnet, dass sie die einzigen endlichen continuirlichen Transformationsgruppen sind,*

---

*) W. Killing, Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen. Math. Annalen, Bd. 31, p. 252; Bd. 33, p. 1; Bd. 34, p. 57; Bd. 36, p. 161.

Als weitere Litteratur über die Gruppen vom Range Null sind die folgenden Arbeiten zu nennen:

K. A. Umlauf, Ueber die Zusammensetzung der endlichen Transformationsgruppen, insbesondere der Gruppen vom Range Null. Leipziger auf Veranlassung von Herrn F. Engel verfasste Dissertation. 1891.

E. Cartan, Sur la structure des groupes de transformations finis et continus. Thèse de Paris. 1894.

Vgl. ferner die Darstellung bei Sophus Lie in dem dritten Bande seiner unter Mitwirkung von Herrn F. Engel erschienenen Theorie der Transformationsgruppen, p. 774. Leipzig 1893.

**) W. Ahrens, Berichte über die Verhandlungen der kgl. sächsischen Gesellschaft der Wiss. zu Leipzig, math.-phys. Classe, 1897, p. 358.

*bei denen jede beliebige Untergruppe sich in eine Compositionsreihe**) *der Gruppe einordnen lässt.*

Um dieses Resultat herzuleiten, beweise ich zunächst den folgenden Hilfssatz:

Eine jede beliebige $p-1$ gliedrige Untergruppe einer p gliedrigen Gruppe $\mathfrak{H}$ vom Range Null ist eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{H}$.

Das angegebene Theorem gilt für alle zweigliedrigen Gruppen vom Range Null, denn diese bestehen nur aus vertauschbaren Transformationen. Wir können daher den Satz für alle $p-1$ gliedrigen Gruppen vom Range Null als gültig annehmen und brauchen ihn nur für p gliedrige Gruppen vom Range Null zu beweisen. Es sei $\mathfrak{H}_1$ irgend eine $p-1$ gliedrige Untergruppe einer p gliedrigen Gruppe $\mathfrak{H}$ vom Range Null, dann ist $\mathfrak{H}_1$ auch vom Range Null und besitzt mithin wie jede Gruppe vom Range Null mindestens eine ausgezeichnete infinitesimale Transformation, d. h. eine Transformation, welche mit allen Transformationen von $\mathfrak{H}_1$ vertauschbar ist. Nehmen wir an, dass diese ausgezeichnete Transformation von $\mathfrak{H}_1$ auch in $\mathfrak{H}$ ausgezeichnet ist, so kann man infolge der Existenz dieser ausgezeichneten Transformation eine mit $\mathfrak{H}$ meroedrisch isomorphe Gruppe Γ construiren, welche ebenso wie $\mathfrak{H}$ vom Range Null, aber nur $p-1$ gliedrig ist. Γ enthält dann eine $p-2$ gliedrige Untergruppe Γ_1, welche mit $\mathfrak{H}_1$ meroedrisch isomorph ist. Da unser Theorem für alle $p-1$ gliedrigen Gruppen vom Range Null als gültig angenommen wurde, so ist Γ_1 eine invariante Untergruppe von Γ. Hieraus aber folgt, dass $\mathfrak{H}_1$ auch in $\mathfrak{H}$ invariant ist. Sollte keine der ausgezeichneten Transformationen von $\mathfrak{H}_1$ in $\mathfrak{H}$ ausgezeichnet sein, so muss $\mathfrak{H}$ wie jede Gruppe vom Range Null wenigstens eine ausgezeichnete Transformation, die dann nicht in $\mathfrak{H}_1$ enthalten ist, besitzen; nimmt man diese zu den infinitesimalen Transformationen, welche $\mathfrak{H}_1$ erzeugen, hinzu, so wird die Gruppe $\mathfrak{H}$ erhalten. Hieraus ersieht man sofort, dass $\mathfrak{H}_1$ in diesem zweiten Fall sicher auch eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{H}$ ist. Damit ist unser Hilfssatz erwiesen.

Beachtet man, dass jede Untergruppe einer Gruppe vom Range Null auch vom Range Null ist und dass jede s gliedrige integrable Untergruppe einer r gliedrigen Gruppe, falls $s < r-1$ ist, in wenigstens einer $s+1$ gliedrigen Untergruppe der r gliedrigen Gruppe enthalten ist,**) so folgt, wenn man den bewiesenen Hilfssatz benützt, dass jede beliebige Untergruppe einer Gruppe vom Range Null sich in eine Compositionsreihe einordnen lässt.

---

*) Ich benütze, wie es in der Theorie der endlichen discreten Gruppen geschieht, die Bezeichnung „*Compositionsreihe*“, welche Lie in seiner Theorie der Transformationsgruppen Bd. III, p. 704 eine *Normalreihe von Untergruppen* nennt.

**) Lie-Engel, Theorie der Transformationsgruppen, Bd. III, p. 681, Satz 8.

Um den Nachweis zu führen, dass mit den Gruppen vom Range Null sämmtliche Gruppen erschöpft sind, bei denen sich jede Untergruppe in eine Compositionsreihe einordnen lässt, dienen folgende Ueberlegungen:

Wenn $\mathfrak{G}$ irgend eine r-gliedrige Gruppe ist, bei welcher sich jede Untergruppe in eine Compositionsreihe einordnen lässt, so zieht die Existenz einer jeden s-gliedrigen Untergruppe, wobei $s < r-1$ ist, die Existenz einer $s+1$ gliedrigen Untergruppe nach sich. Sind nämlich $X_1, X_2, \cdots, X_s$ die infinitesimalen Transformationen einer s-gliedrigen Untergruppe von $\mathfrak{G}$, so giebt es infolge unserer Voraussetzung über die Structur von $\mathfrak{G}$ noch weitere t infinitesimale Transformationen

$$X_{s+1},\ X_{s+2},\ \cdots,\ X_{s+t},$$

dass die $s+t$ infinitesimalen Transformationen $X_1, X_2, \cdots, X_{s+t}$ eine $s+t$ gliedrige Untergruppe von $\mathfrak{G}$ bilden und die s infinitesimalen Transformationen $X_1, X_2, \cdots, X_s$ eine s gliedrige invariante Untergruppe der $s+t$ gliedrigen Gruppe constituiren. $X_1, X_2, \cdots, X_s$ bilden dann mit einer jeden der t Transformationen $X_{s+1}, X_{s+2}, \cdots, X_{s+t}$ eine $s+1$ gliedrige Untergruppe von $\mathfrak{G}$. Infolgedessen besitzt $\mathfrak{G}$ auch eine $r-1$ gliedrige Untergruppe, welche wegen der verlangten Eigenschaft nothwendig in $\mathfrak{G}$ invariant ist. Diese $r-1$ gliedrige invariante Untergruppe von $\mathfrak{G}$ möge aus den Transformationen $X_1, X_2, \cdots, X_{r-1}$ bestehen, $\mathfrak{G}$ kann dann durch Hinzunahme einer weiteren Transformation X_r dargestellt werden. Da X_r selbst in einer Untergruppe, die wenigstens zweigliedrig ist, invariant sein muss, so folgt: es giebt wenigstens eine Transformation in $\mathfrak{G}$, die mit X_r vertauschbar ist. Folglich ist X_r sicher in einer Gruppe vom Range Null, welche Untergruppe von $\mathfrak{G}$ ist, enthalten; die Gruppe höchster Gliederzahl vom Range Null, in welcher X_r enthalten ist, sei m gliedrig; hierbei ist $m \geqq 2$; wir wollen $m < r$ annehmen. Seien $X_r, X_{r-1}, X_{r-2}, \cdots, X_{r-m+1}$ die m infinitesimalen Transformationen dieser m gliedrigen Gruppe vom Range Null, die mit $\mathfrak{G}_m$ bezeichnet werde, so kann man $\mathfrak{G}$ aus $\mathfrak{G}_m$ durch Hinzunahme von $r-m$ weiteren infinitesimalen Transformationen $X_1, X_2, \cdots, X_{r-m}$ erzeugen; dabei kann man $X_1, X_2, \cdots, X_{r-m}$ derartig wählen, dass die Schaar von Transformationen $e_1 X_1 + e_2 X_2 + \cdots + e_{r-m} X_{r-m}$, mit den $r-m$ Parametern $e_1, e_2, \cdots, e_{r-m}$ von den Transformationen der Gruppe G_m invariant gelassen wird; es gelten also die Relationen:

$$\text{(A)}\quad (X_{r-k} X_\mu) = \sum_1^{r-m} {}^{\nu}\, c_{r-k\mu\nu} X_\nu \quad (k = 0, 1, \cdots, m-1;\ \mu = 1, 2, \cdots, r-m);$$

hierbei bedeuten $(X_{r-k} X_\mu)$ in bekannter Weise die in Lie's Transformationstheorie gebräuchlichen Klammersymbole und die Grössen c Con-

stanten.*) Wegen der vorausgesetzten Eigenschaft von $\mathfrak{G}$ ist die Gruppe $\mathfrak{G}_m$ vom Range Null in einer $m + m'$ gliedrigen Untergruppe von $\mathfrak{G}$ invariant; diese $m + m'$ gliedrige Untergruppe kann durch die Transformationen:

$$X_r, X_{r-1}, \cdots X_{r-m+1}, Y_1, Y_2, \cdots, Y_{m'},$$

wobei $m' \geqq 1$ ist und $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{m'}$ lineare homogene Functionen von $X_1, X_2, \cdots, X_r$ mit constanten Coefficienten bedeuten, erzeugt gedacht werden. Betrachten wir jetzt die $m + 1$ Transformationen $X_r, X_{r-1}, \cdots, X_{r-m+1}, Y_1$, so bilden diese eine $m + 1$ gliedrige Untergruppe $\mathfrak{G}_{m+1}$ von $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{G}_m$ ist dabei in $\mathfrak{G}_{m+1}$ invariant. Die $m + 1$ gliedrige Gruppe $\mathfrak{G}_{m+1}$ kann auch durch die Transformationen $X_r, X_{r-1}, \cdots, X_{r-m+1}, Y_1'$, wobei Y_1' nur eine lineare homogene Function mit constanten Coefficienten von $X_1, X_2, \cdots, X_{r-m}$ ist, erzeugt werden. Da $X_r, X_{r-1}, \cdots, X_{r-m+1}$ eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{G}_{m+1}$ bilden, so sieht man infolge der Relationen (A), dass Y_1' mit allen Transformationen von $\mathfrak{G}_m$ vertauschbar sein muss; daher ist die Gruppe $\mathfrak{G}_{m+1}$ auch vom Range Null. Mithin ist $\mathfrak{G}_m$ nicht die Untergruppe höchster Gliederzahl vom Range Null, welche X_r enthält. Hieraus kann der Schluss gezogen werden, dass $\mathfrak{G}$ selbst vom Range Null sein muss.

---

*) Vgl. Umlauf, a. a. O. p. 31 oder Lie-Engel, Theorie der Transformationsgruppen, Bd. III, p. 775.

Le prolongement analytique et les séries sommables.

Par

Emile Borel à Paris.

I.

Le but de ce petit Mémoire est de préciser la notion du *polygone de sommabilité*, notion que j'ai indroduite dans mon Mémoire *Sur les séries de Taylor admettant leur cercle de convergence comme coupure* (Journal de M. Jordan 1896, p. 445). Rappelons brièvement les résultats qui y sont établis.

Soit
$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots$$
une série de Taylor dont le rayon de convergence n'est ni nul ni infini; on appelle *fonction entière associée* la fonction:
$$F(z) = a_0 + a_1 \frac{z}{1} + a_2 \frac{z^2}{1\cdot 2} + a_3 \frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots.$$
Dès lors l'intégrale
$$f(z) = \int_0^\infty e^{-a} F(az)\, da$$
prise suivant un chemin réel, représente la fonction $f(z)$ dans tout *le polygone de sommabilité*. Ce polygone est défini de la manière suivante: joignons l'origine ($z = 0$) à chaque point singulier*) A de $f(z)$ par une droite D; élevons en A une perpendiculaire Δ à la droite D, les droites Δ forment le polygone de sommabilité. Pour préciser, on peut dire que pour obtenir ce polygone on supprime la portion du plan située, par rapport à chaque droite Δ, du côté qui ne renferme pas l'origine. On voit que, si les points singuliers sont en nombre limité, le polygone est rectiligne; il peut présenter des parties curvilignes si la fonction admet des lignes singulières; car notre règle conduit alors à prendre l'enveloppe

*) Bien entendu, si $f(z)$ n'est pas uniforme, on ne se préoccupe que des points singuliers de la branche obtenue en suivant les rayons issus de l'origine.

des toutes les droites Δ correspondant aux divers points de la ligne singulière.

La question qui va principalement nous occuper se trouve ainsi posée dans le mémoire cité. «Dans le cas des points singuliers les plus simples, j'avais montré (Fondements de la théorie des séries divergentes sommables Journal de M. Jordan 1896) que c'était précisément là la région de sommabilité; ici nous pouvons seulement affirmer que la région de sommabilité *comprend ce polygone;* nous ne sommes pas certain qu'elle ne soit pas plus grande, bien que cela paraisse peu probable; mais ce point, qu'il serait intéressant d'élucider, n'a pas d'importance pour l'application que nous avons en vue».

C'est cette question que nous allons résoudre, dans le sens prévu, en utilisant la notion de *sommabilité absolue,* que j'ai introduite dans mon *Mémoire sur les séries divergentes* (Annales de l'Ecole Normale, 1900).

D'une manière précise, nous allons démontrer la proposition suivante

Théorème I. Soit $f(z)$ une série de Taylor et $F(z)$ la fonction entière associée. Considérons le produit

$$e^{-a}F(az) \tag{1}$$

et donnons à z un argument déterminé α et un module variable, Il existe alors une valeur ϱ du module telle que, pour $|z| < \varrho$, le produit (1) *reste fini lorsque a augmente indéfiniment, tandis que, pour $|z| > \varrho$, ce produit prend des valeurs supérieures en module à tout nombre assignable*): le point $z = \varrho e^{i\alpha}$ appartient au contour du polygone de sommabilité relatif à $f(z)$.*

On voit que cette proposition, en permettant de déterminer le polygone de sommabilité par l'étude de la fonction associée, fournit un procédé de recherche des points singuliers de $f(z)$. A ce sujet, on peut faire une remarque assez curieuse; l'étude de la fonction associée pour un argument α de z et les arguments voisins permet de déterminer un côté du polygone de sommabilité et, en abaissant de l'origine une perpendiculaire sur ce coté, on obtient un point singulier, dont l'argument est en général, fort différent de α, bien qu'on l'ait obtenu par l'étude de la fonction associée, uniquement dans le voisinage de l'argument α.

II.

Nous établirons d'abord le théorème suivant.

Théorème II. Soit $f(z)$ une série de Taylor, $F(z)$ la fonction entière associée. Soit M un point z du plan, tel que le produit

$$e^{-a}F(az)$$

*) Ce qui ne veut pas dire que le produit tend vers l'infini.

reste fini lorsque a augmente indéfiniment. Le fonction $f(z)$ n'a pas de point singulier à l'intérieur du cercle décrit sur OM comme diamètre (Elle peut en avoir sur le contour du cercle).

Remarquons d'abord que, par la substitution (z, kz) on peut, sans altérer la généralité, supposer réelle et positive la valeur de z correspondant au point M. Par hypothèse le produit $e^{-a}F(az)$ reste fini; nous pouvons donc écrire, quelque soit a:

$$(1) \qquad |e^{-a}F(az)| < A,$$

A étant un nombre fixe.

Cela posé, soit ε un nombre positif arbitrairement petit; nous poserons

$$z' = (1-\varepsilon)z$$

et nous considérons le cercle décrit sur OM' comme diamètre (M' correspond à z'). Cela posé, considérons l'intégrale, prise suivant le chemin réel

$$(2) \qquad \int_0^\infty e^{-a}F(az')\,da;$$

cette intégrale a visiblement un sens; car $z' = (1-\varepsilon)z$ et si l'on pose $a(1-\varepsilon) = \tau$, elle devient

$$\int_0^\infty e^{-\frac{\tau}{1-\varepsilon}}F(bz)\frac{d\tau}{1-\varepsilon}$$

et la quantité à intégrer est inférieure en module à

$$e^{\tau\left(1-\frac{1}{1-\varepsilon}\right)}A\frac{1}{1-\varepsilon},$$

en vertu de l'inégalité (1). On voit dès lors que, non seulement l'intégrale (2) a un sens, mais que l'erreur commise, si on la limite supérieurement à un nombre B est inférieure à:

$$\frac{A}{1-\varepsilon}\int_B^\infty e^{-\frac{\tau\varepsilon}{1-\varepsilon}}dt = \frac{A}{\varepsilon}e^{-\frac{B\varepsilon}{1-\varepsilon}}.$$

Faisons maintenant dans l'intégrale (2) la substitution

$$az' = x;$$

nous obtenons, en remplaçant z' par z,

$$(3) \qquad \int_0^\infty e^{-\frac{x}{z}} F(x) \frac{dx}{z}$$

et conservant toujours le chemin d'intégration réel, faisons varier z, de toutes les manières possibles, à l'intérieur du cercle décrit sur OM' comme diamètre. Quelle que soit la position de z à l'intérieur de ce cercle ou sur ce cercle, la partie réelle de $\frac{1}{z}$ est supérieure ou égale à la partie réelle de $\frac{1}{z'}$; par suite l'intégrale (3) a un sens, de même que l'intégrale (2) et l'on peut calculer la *même* limite supérieure pour l'erreur commise lorsqu'on limite supérieurement l'intégrale à un nombre B au lieu de $+\infty$. C'est dire que l'intégrale converge uniformément. Dans ces conditions elle définit dans le domaine considéré une fonction analytique régulière en tous les points de ce domaine. D'ailleurs, dans la région commune à ce domaine et au cercle de convergence de $f(z)$, l'intégration terme à terme, qui est légitime dans cette région, montre que la fonction analytique coïncide avec $f(z)$; donc la fonction $f(z)$ est holomorphe à l'intérieur du cercle décrit sur OM' comme diamètre. Comme le point M' diffère aussi peu que l'on veut du point M, cette fonction ne peut admettre de point singulier à l'intérieur du cercle décrit sur OM comme diamètre, ce que nous voulions établir.

III.

Nous allons maintenant établir une proposition qui est en quelque sorte la réciproque de la précédente; nous l'établissons pour être complet, bien qu'elle soit à peu près entièrement développée dans le mémoire cité.

Théorème III. Soit $f(z)$ une série de Taylor, $F(z)$ la fonction entière associée, C un cercle décrit sur OM comme diamètre. Si la fonction $f(z)$ est holomorphe à l'intérieur du cercle et sur le cercle, on peut affirmer que l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-a} F(az)\, da$$

dans laquelle z désigne l'affixe du point M, a un sens et est égale à $f(z)$. De plus, il existe des nombres fixes A et B tels que l'on ait, quelque soit a

$$|e^{-a} F(az)| < Ae^{-ka}$$

Pour établir cette proposition, remarquons d'abord, comme plus haut, que rien n'empêche de supposer M réel et positif. De plus la fonction

$f(z)$ étant holomorphe sur le cercle C, on peut tracer un cercle concentrique plus grand C', tel qu'elle soit encore holomorphe sur C' et dans son intérieur. Soit M' le point réel et positif de C'. M' correspond à une valeur de z que nous pouvons désigner par $z(1+\varepsilon)$.

Cherchons maintenant à exprimer $F(az)$ par une intégrale prise le long de C'. On a

$$F(az) = a_0 + a_1\frac{az}{1} + a_2\frac{a^2z^2}{1\cdot 2} + \cdots + a_n\frac{a^nz^n}{n!} + \cdots.$$

Mais on sait que l'on a

$$a_n = \frac{1}{2i\pi}\int_{C'} \frac{f(u)\,du}{u^{n+1}}.$$

On a donc

$$F(az) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C'} e^{\frac{az}{u}}\frac{du}{u}$$

et

$$e^{-a}F(az) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C'} e^{a\left(\frac{z}{u}-1\right)}\frac{du}{u}.$$

Lorsque le point z est en M et que le point u décrit le cercle C' le point $\frac{z}{u}$ décrit aussi un cercle, dont un diamètre est aussi dirigé suivant l'axe réel et dont il est aisé de déterminer les deux points situés sur cet axe, lesquels correspondent à $u = z(1+\varepsilon)$ et à $u = -z\varepsilon$; on obtient ainsi les deux points $\frac{1}{1+\varepsilon}$ et $\frac{-1}{\varepsilon}$.

On voit immédiatement que, quelque soit $\frac{z}{u}$ sur le contour de ce cercle, l'on a

$$\text{partie réelle de } \left(\frac{z}{u} - 1\right) < \frac{1}{1+\varepsilon} - 1 = \frac{-\varepsilon}{1+\varepsilon}.$$

Dès lors, en désignant par R le rayon de C' on a évidemment

$$(4) \qquad |e^{-a}F(az)| < Re^{\frac{-a\varepsilon}{1+\varepsilon}}\frac{1}{\varepsilon}.$$

C'est le résultat que nous voulions obtenir. Quant au fait que l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-a}F(az)$$

est égale à $F(z)$, il résulte de ce que l'inégalité (4) pourrait être démontrée de même pour tous les points d'une aire voisine de l'axe réel et réunis-

sant l'origine au point M. Dès lors l'intégrale définit dans cette aire une fonction analytique, qui, coïncidant avec $f(z)$ à l'intérieur du cercle de convergence, lui est identique*).

Notre proposition est donc complètement établie.

IV.

Il nous reste à faire voir que les Théorèmes II et III que nous venons de démontrer, entrainent comme conséquence immédiate le Théorème I, dont la démonstration est notre but principal.

Il suffit pour cela de faire la remarque suivante: soit C un cercle décrit sur le segment OM comme diamètre, et A un point du plan. Si l'on élève en A la perpendiculaire à OA, cette perpendiculaire rencontrera le segment OM (c'est-à-dire passera entre O et M) on ne le remontrera pas, suivant que le point A est intérieur ou extérieur au cercle C.

D'après cela supposons M extérieur au polygone de sommabilité; OM rencontre donc l'un des côtés de ce polygone et le point singulier A correspondant est intérieur au cercle C. Il n'est donc pas possible (Théorème II) que le produit $e^{-a}F(az)$ soit fini en M. Si, au contraire, M est intérieur au polygone de sommabilité, c'est dire qu'aucun côté de ce polygone ne rencontre le segment OM; dès lors tous les points singuliers A sont extérieurs au cercle C et le produit $e^{-a}F(az)$ est fini en M (Théorème III).

Enfin, si le point M était sur le contour du polygone, il y aurait des points singuliers sur le contour de C et on ne pourrait plus rien affirmer.

En résumé, nous voyons que *le polygone de sommabitité marque sur chaque rayon issu de O la limite des points z pour lesquels $e^{-a}F(az)$ reste fini pour $a=\infty$*, cette propriété pouvant subsister ou non pour le point limite. C'est là le point fondamental que nous nous proposions d'établir.

Au point de vue de la sommabilité on peut faire les remarques suivantes; il résulte de ce qui précède que la série $f(z)$ est *absolument sommable* à l'intérieur du polygone de sommabilité et ne l'est pas à l'extérieur. En d'autres termes l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-a}\,|F(az)|\,da \tag{5}$$

a un sens, ou non, suivant que z est intérieur, ou extérieur, à ce polygone; il y a doute sur le contour.

---

*) On peut prendre, par exemple, pour l'aire considérée, une bande rectangulaire d'épaisseur $\frac{\varepsilon z}{2}$, allant de l'origine jusqu'au point $z\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)$.

La somme est définie par l'intégrale

$$(6) \qquad \int_0^\infty e^{-a} F(az)\,da$$

et nous ne pouvons affirmer que cette intégrale n'a pas de sens à l'extérieur du polygone. Mais il faut observer qu'au point de vue des applications, l'intégrale (5) est beaucoup plus aisée à étudier que l'intégrale (6); il y a tout avantage à l'y substituer. Cette étude conduit d'ailleurs évidemment aux règles énoncées plus haut.

St. Paul, par Tournemire (Aveyron), le 4 octobre 1900.

Zur Theorie der trilinearen ternären Form.

Von

PH. MAENNCHEN in Alzey.

In meiner Arbeit: Die Transformation der trilinearen ternären Form in eine theilweise symmetrische, Giessener Dissertation, Leipzig 1898*), werden sechs Invarianten der trilinearen ternären Form

$$z_1 \Sigma a_{ik} x_i y_k + z_2 \Sigma b_{ik} x_i y_k + z_3 \Sigma c'_{ik} x_i y_k \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

aufgestellt, von denen u. a. bewiesen wird, dass sie bis auf die Vorzeichen einander gleich sind. Nur drei von diesen Invarianten sind dem Bau nach wesentlich von einander verschieden, nämlich diejenigen, die bereits B. Igel, Monatshefte für Mathematik und Physik 1894 Jahrgang 5, mit D, E und F bezeichnet hat**).

Diese Bezeichnungen sollen hier beibehalten werden; es ist

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 & -b_{31} & -b_{32} & -b_{33} & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & 0 & -c_{31} & -c_{32} & -c_{33} & c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 0 & -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & 0 & 0 & 0 & -b_{11} & -b_{12} & -b_{13} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 & 0 & 0 & -c_{11} & -c_{12} & -c_{13} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ -b_{21} & -b_{22} & -b_{23} & b_{11} & b_{12} & b_{13} & 0 & 0 & 0 \\ -c_{21} & -c_{22} & -c_{23} & c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = D,$$

---

*) Daselbst ist zu lesen: S. 5 Z. 2 v. o. 1883 statt 1887, S. 6 Z. 8 v. u. 1894 statt 1884, S. 9 Z. 12 v. o. $D_{y,\xi,z}$ statt $D_{\eta,\xi,z}$, S. 16 Z. 7 v. u. $(32, 23, m)$ statt $(32, 21, m)$, S. 31 Z. 16 v. u. von a_{31} statt von x, S. 32 Z. 2 v. o. D_{14} statt E_{14}.

**) Siehe auch M. Pasch. Mathematische Annalen 1899, Band 52, S. 127.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -a_{13} & -a_{23} & -a_{33} & a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ 0 & 0 & 0 & -b_{13} & -b_{23} & -b_{33} & b_{12} & b_{22} & b_{32} \\ 0 & 0 & 0 & -c_{13} & -c_{23} & -c_{33} & c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & 0 & 0 & 0 & -a_{11} & -a_{21} & -a_{31} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} & 0 & 0 & 0 & -b_{11} & -b_{21} & -b_{31} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 & -c_{11} & -c_{21} & -c_{31} \\ -a_{12} & -a_{22} & -a_{32} & a_{11} & a_{21} & a_{31} & 0 & 0 & 0 \\ -b_{12} & -b_{22} & -b_{32} & b_{11} & b_{21} & b_{31} & 0 & 0 & 0 \\ -c_{12} & -c_{22} & -c_{32} & c_{11} & c_{21} & c_{31} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = E,$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -c_{11} & -c_{12} & -c_{13} & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 0 & 0 & -c_{21} & -c_{22} & -c_{23} & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & 0 & -c_{31} & -c_{32} & -c_{33} & b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 & -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 & -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 & 0 & 0 & -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} \\ -b_{11} & -b_{12} & -b_{13} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ -b_{21} & -b_{22} & -b_{23} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ -b_{31} & -b_{32} & -b_{33} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = F,$$

und zwar ist $D = -E = -F$ (Dissertation S. 19).

Bezeichnet man die Determinante $\Sigma \pm a_{11} a_{22} a_{33}$ mit ∇_a, die ebenso aus b_{ik} und c_{ik} gebildeten Determinanten mit ∇_b und ∇_c, ferner mit $\alpha_{ik}, \beta_{ik}, \gamma_{ik}$ die Adjuncten von a_{ik} in ∇_a, von b_{ik} in ∇_b, von c_{ik} in ∇_c, und ersetzt man endlich in D, E und F die a_{ik}, b_{ik}, c_{ik} durch $\alpha_{ik}, \beta_{ik}, \gamma_{ik}$, so entstehen drei neue Invarianten, die Δ, E und Φ heissen mögen.

Nun entsteht die Frage: Welcher Zusammenhang besteht zwischen D, E, F einerseits und Δ, E, Φ andererseits?

Ich multiplicire F mit der folgenden Determinante:

$$\begin{vmatrix} -\gamma_{11} & -\gamma_{12} & -\gamma_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\gamma_{21} & -\gamma_{22} & -\gamma_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\gamma_{31} & -\gamma_{32} & -\gamma_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha_{11} & -\alpha_{12} & -\alpha_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha_{21} & -\alpha_{22} & -\alpha_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha_{31} & -\alpha_{32} & -\alpha_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_{11} & -\beta_{12} & -\beta_{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_{21} & -\beta_{22} & -\beta_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_{31} & -\beta_{32} & -\beta_{33} \end{vmatrix}.$$

Der Werth dieser Determinante ist auf Grund der oben eingeführten Bezeichnungen gleich $-\nabla_\alpha\cdot\nabla_\beta\cdot\nabla_\gamma$. Es ergiebt sich das folgende Product:

$$-F\cdot\nabla_\alpha\cdot\nabla_\beta\cdot\nabla_\gamma$$

$$=\begin{vmatrix}
0 & 0 & 0 & \Sigma c_{1k}\alpha_{1k} & \Sigma c_{1k}\alpha_{2k} & \Sigma c_{1k}\alpha_{3k} & -\nabla_b & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & \Sigma c_{2k}\alpha_{1k} & \Sigma c_{2k}\alpha_{2k} & \Sigma c_{2k}\alpha_{3k} & 0 & -\nabla_b & 0\\
0 & 0 & 0 & \Sigma c_{3k}\alpha_{1k} & \Sigma c_{3k}\alpha_{2k} & \Sigma c_{3k}\alpha_{3k} & 0 & 0 & -\nabla_b\\
-\nabla_c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Sigma a_{1k}\beta_{1k} & \Sigma a_{1k}\beta_{2k} & \Sigma a_{1k}\beta_{3k}\\
0 & -\nabla_c & 0 & 0 & 0 & 0 & \Sigma a_{2k}\beta_{1k} & \Sigma a_{2k}\beta_{2k} & \Sigma a_{2k}\beta_{3k}\\
0 & 0 & -\nabla_c & 0 & 0 & 0 & \Sigma a_{3k}\beta_{1k} & \Sigma a_{3k}\beta_{2k} & \Sigma a_{3k}\beta_{3k}\\
\Sigma b_{1k}\gamma_{1k} & \Sigma b_{1k}\gamma_{2k} & \Sigma b_{1k}\gamma_{3k} & -\nabla_a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\Sigma b_{2k}\gamma_{1k} & \Sigma b_{2k}\gamma_{2k} & \Sigma b_{2k}\gamma_{3k} & 0 & -\nabla_a & 0 & 0 & 0 & 0\\
\Sigma b_{3k}\gamma_{1k} & \Sigma b_{3k}\gamma_{2k} & \Sigma b_{3k}\gamma_{3k} & 0 & 0 & -\nabla_a & 0 & 0 & 0
\end{vmatrix}.$$

Ferner multiplicire ich Φ mit

$$\nabla_a\cdot\nabla_b\cdot\nabla_c=\begin{vmatrix}
b_{11} & b_{12} & b_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
b_{21} & b_{22} & b_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
b_{31} & b_{32} & b_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{31} & a_{32} & a_{33}
\end{vmatrix},$$

und zwar componire ich Zeile mit Zeile, wie bei der vorigen Multiplication, doch betrachte ich jetzt die Resultate der Composition als Zeilenelemente, während ich sie dort als Spaltenelemente wählte.

Es ergiebt sich alsdann das folgende Product:

$$\Phi\cdot\nabla_a\cdot\nabla_b\cdot\nabla_c$$

$$=\begin{vmatrix}
0 & 0 & 0 & \Sigma b_{1k}\gamma_{1k} & \Sigma b_{1k}\gamma_{2k} & \Sigma b_{1k}\gamma_{3k} & -\nabla_b & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & \Sigma b_{2k}\gamma_{1k} & \Sigma b_{2k}\gamma_{2k} & \Sigma b_{2k}\gamma_{3k} & 0 & -\nabla_b & 0\\
0 & 0 & 0 & \Sigma b_{3k}\gamma_{1k} & \Sigma b_{3k}\gamma_{2k} & \Sigma b_{3k}\gamma_{3k} & 0 & 0 & -\nabla_b\\
-\nabla_c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Sigma c_{1k}\alpha_{1k} & \Sigma c_{1k}\alpha_{2k} & \Sigma c_{1k}\alpha_{3k}\\
0 & -\nabla_c & 0 & 0 & 0 & 0 & \Sigma c_{2k}\alpha_{1k} & \Sigma c_{2k}\alpha_{2k} & \Sigma c_{2k}\alpha_{3k}\\
0 & 0 & -\nabla_c & 0 & 0 & 0 & \Sigma c_{3k}\alpha_{1k} & \Sigma c_{3k}\alpha_{2k} & \Sigma c_{3k}\alpha_{3k}\\
\Sigma a_{1k}\beta_{1k} & \Sigma a_{1k}\beta_{2k} & \Sigma a_{1k}\beta_{3k} & -\nabla_a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\Sigma a_{2k}\beta_{1k} & \Sigma a_{2k}\beta_{2k} & \Sigma a_{2k}\beta_{3k} & 0 & -\nabla_a & 0 & 0 & 0 & 0\\
\Sigma a_{3k}\beta_{1k} & \Sigma a_{3k}\beta_{2k} & \Sigma a_{3k}\beta_{3k} & 0 & 0 & -\nabla_a & 0 & 0 & 0
\end{vmatrix}.$$

Hier stelle ich zunächst die Spalten so, dass die Reihenfolge 456 789 123 zu Stande kommt. In der nun entstandenen Determinante bringe ich die Zeilen in die Reihenfolge 456 789 123. So entsteht die Determinante:

$$\begin{vmatrix}
0 & 0 & 0 & \Sigma c_{1k}\alpha_{1k} & \Sigma c_{1k}\alpha_{2k} & \Sigma c_{1k}\alpha_{3k} & -\nabla_c & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \Sigma c_{2k}\alpha_{1k} & \Sigma c_{2k}\alpha_{2k} & \Sigma c_{2k}\alpha_{3k} & 0 & -\nabla_c & 0 \\
0 & 0 & 0 & \Sigma c_{3k}\alpha_{1k} & \Sigma c_{3k}\alpha_{2k} & \Sigma c_{3k}\alpha_{3k} & 0 & 0 & -\nabla_c \\
-\nabla_a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Sigma a_{1k}\beta_{1k} & \Sigma a_{1k}\beta_{2k} & \Sigma a_{1k}\beta_{3k} \\
0 & -\nabla_a & 0 & 0 & 0 & 0 & \Sigma a_{2k}\beta_{1k} & \Sigma a_{2k}\beta_{2k} & \Sigma a_{2k}\beta_{3k} \\
0 & 0 & -\nabla_a & 0 & 0 & 0 & \Sigma a_{3k}\beta_{1k} & \Sigma a_{3k}\beta_{2k} & \Sigma a_{3k}\beta_{3k} \\
\Sigma b_{1k}\gamma_{1k} & \Sigma b_{1k}\gamma_{2k} & \Sigma b_{1k}\gamma_{3k} & -\nabla_b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\Sigma b_{2k}\gamma_{1k} & \Sigma b_{2k}\gamma_{2k} & \Sigma b_{2k}\gamma_{3k} & 0 & -\nabla_b & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\Sigma b_{3k}\gamma_{1k} & \Sigma b_{3k}\gamma_{2k} & \Sigma b_{3k}\gamma_{3k} & 0 & 0 & -\nabla_b & 0 & 0 & 0
\end{vmatrix}$$

Diese ist einschliesslich des Vorzeichens sowohl identisch mit $\Phi \cdot \nabla_a \cdot \nabla_b \cdot \nabla_c$, als auch, wie man leicht einsieht, mit $-F \cdot \nabla_\alpha \cdot \nabla_\beta \cdot \nabla_\gamma$. Daraus folgt:

$$\Phi \cdot \nabla_a \cdot \nabla_b \cdot \nabla_c = -F \cdot \nabla_\alpha \cdot \nabla_\beta \cdot \nabla_\gamma,$$

oder

$$\Phi = -F \cdot \nabla_a \cdot \nabla_b \cdot \nabla_c.$$

Beachtet man nun, dass $D = -E = -F$, also auch $\Delta = -\mathsf{E} = -\Phi$ ist, so kann man aus der zuletzt gewonnenen Formel die beiden folgenden ableiten:

$$\Delta = -D \cdot \nabla_a \cdot \nabla_b \cdot \nabla_c,$$
$$\mathsf{E} = -E \cdot \nabla_a \cdot \nabla_b \cdot \nabla_c.$$

In ähnlicher Weise könnte man die Determinanten

$$\Sigma \pm a_{11} b_{12} c_{13}, \quad \Sigma \pm a_{21} b_{22} c_{23}, \quad \Sigma \pm a_{31} b_{32} c_{33}$$

etwa mit $\nabla_{1k}, \nabla_{2k}, \nabla_{3k}$ bezeichnen, ferner mit $\alpha'_{ik}, \beta'_{ik}, \gamma'_{ik}$ die Adjuncten von a_{ik}, b_{ik}, c_{ik} in ∇_{ik}. Dann ist, wenn man wieder alle a_{ik}, b_{ik}, c_{ik} durch die entsprechenden $\alpha'_{ik}, \beta'_{ik}, \gamma'_{ik}$ ersetzt:

$$\Delta' = -D \cdot \nabla_{1k} \cdot \nabla_{2k} \cdot \nabla_{3k},$$
$$\mathsf{E}' = -E \cdot \nabla_{1k} \cdot \nabla_{2k} \cdot \nabla_{3k},$$
$$\Phi' = -F \cdot \nabla_{1k} \cdot \nabla_{2k} \cdot \nabla_{3k}.$$

Endlich ergeben sich bei Einführung der analog definirten Determinanten $\nabla_{k1}, \nabla_{k2}, \nabla_{k3}$ und der Adjuncten $\alpha''_{ik}, \beta''_{ik}, \gamma''_{ik}$ die Beziehungen:

$$\Delta'' = -D \cdot \nabla_{k1} \cdot \nabla_{k2} \cdot \nabla_{k3},$$
$$\mathsf{E}'' = -E \cdot \nabla_{k1} \cdot \nabla_{k2} \cdot \nabla_{k3},$$
$$\Phi'' = -F \cdot \nabla_{k1} \cdot \nabla_{k2} \cdot \nabla_{k3}.$$

Die Beweise lassen sich entweder auch auf dem angegebenen Wege führen, oder, was weit einfacher ist, man kann sie aus dem für Δ, E, Φ geführten Beweise herleiten. Man muss alsdann den letzteren für D, E und F in der Gestalt führen, die sie annehmen, wenn a_{ik} durch a_{ik1}, b_{ik} durch a_{ik2}, c_{ik} durch a_{ik3} ersetzt wird (vergl. Dissertation S. 8ff. und Pasch a. a. O. S. 128).

Alzey, im September 1900.

Beiträge zur Theorie und Anwendung der Variationsrechnung.

(Erster Aufsatz.)

Von

Adolf Kneser in Berlin.

Die einfachste isoperimetrische Aufgabe im weiteren Sinne des Wortes verlangt, wenn x und y rechtwinklige Coordinaten in der Ebene sind, zwischen zwei gegebenen Punkten eine Curve zu ziehen, welche dem Integral

$$K = \int g\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) dx$$

einen vorgeschriebenen Werth verleiht, und dabei das Integral

$$J = \int f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) dx$$

zu einem Extremum macht. Im Wesentlichen dieselbe Bedeutung hat folgende Aufgabe. Es sollen x und y als Functionen von t so bestimmt werden, dass das Integral

$$J = \int F(x, y, x', y')\, dt$$

ein Extremum werde, das Integral

$$K = \int G(x, y, x', y')\, dt$$

aber einen vorgeschriebenen Werth erhalte. Dabei bedeuten, wie fortan immer, Accente die Ableitungen nach t; die Functionen F und G sind bezüglich der letzten beiden Argumente homogen von der Dimension Eins, und überall, wo x' von Null verschieden ist, durch die Gleichungen

$$F(x, y, x', y') = x' f\left(x, y, \frac{y'}{x'}\right),$$

$$G(x, y, x', y') = x' g\left(x, y, \frac{y'}{x'}\right)$$

definirt. Alsdann erhält man als nothwendige Bedingungen des Extremums

für x und y als die gesuchten Functionen von t die Differentialgleichungen*)

$$F_x - F'_{x'} + \lambda(G_x - G'_{x'}) = 0,$$
$$F_y - F'_{y'} + \lambda(G_y - G'_{y'}) = 0,$$

in welchen die partiellen Ableitungen durch Anheftung des Arguments als Suffix bezeichnet sind, und λ eine Constante bedeutet, welche die isoperimetrische genannt wird. Die Curven, welche diesen Differentialgleichungen genügen, heissen die Extremalen des vorgelegten Problems.

Die principiell wichtige und nicht immer leicht zu beantwortende Frage, in welchem Umfange von einer Extremale, genauer von einem von Singularitäten freien Stück einer solchen, in dessen Elementen die Functionen F und G ein reguläres Verhalten zeigen, das gesuchte Extremum wirklich geliefert wird, führt bekanntlich auf den Begriff der conjugirten Punkte. Die einer Extremale $\mathfrak{C}$ angehörigen Punkte 0 und 1, welche einen Bogen von der angegebenen Beschaffenheit einschliessen, heissen conjugirt, wenn sie durch eine zweite Extremale verbunden werden können, welche der ersten unendlich nahe liegt, und bis auf unendlich kleine Grössen höherer Ordnung denselben Werth des von 0 bis 1 erstreckten Integrals K wie die Curve $\mathfrak{C}$ ergiebt; integrirt man längs der letzteren von 0 über 1 hinaus bis zu einem Punkte 2 hin, so ist bekannt, dass der Bogen 02 im Allgemeinen das gesuchte relative Extremum nicht mehr liefert.

Scheeffer ist der erste, der einen Beweis dieses Satzes publicirt hat, und zwar auf Grund einer ausgedehnten Theorie der zweiten Variation**). Auf wesentlich anderen Principien beruht der Beweis, den ich in § 40 meines Lehrbuchs der Variationsrechnung gegeben habe; hier werden hauptsächlich gewisse Enveloppen der vom Punkte 0 ausgehenden Extremalen betrachtet, und es zeigt sich, dass im Allgemeinen schon der Bogen 01 selbst das verlangte Extremum nicht mehr liefert. Auf den vorliegenden Blättern gedenke ich einen Beweis für das Aufhören des Extremums zu geben, dessen Grundgedanke von Weierstrass herrührt und mir aus einer mangelhaften Nachschrift von Vorlesungen bekannt geworden ist. Der ursprüngliche Beweis von Weierstrass, wenn ein solcher überhaupt in einigermassen vollständiger Ausarbeitung vorhanden ist, dürfte indessen wenigstens äusserlich von dem hier durchgeführten ziemlich stark abweichen; dies lehrt schon ein Blick auf die Dissertation

*) Kneser, Lehrbuch der Variationsrechnung (Braunschweig 1900), vierter Abschnitt.

**) Bd. 25 dieser Annalen.

von Hormann*), in welcher ein Theil der Weierstrass'schen Argumentation veröffentlicht ist. In welchem Umfange man übrigens die hier folgenden Entwicklungen als Eigenthum des grossen Meisters ansehen will, ist mir gleichgültig; die Hauptsache ist, dass die bezeichnete wichtige Frage der Variationsrechnung allseitig geklärt werde, und dazu hoffe ich beizutragen.

§ 1.

Besondere Darstellung der durch einen festen Punkt gehenden Extremalen.

Eine Schar von Extremalen, welche durch den festen Punkt 0 gehen, sei durch die Gleichungen

$$x = \xi(t, a, b), \quad y = \eta(t, a, b) \tag{1}$$

dargestellt; $\mathfrak{C}$ sei die specielle Extremale

$$x = \xi(t, a_0, b_0), \quad y = \eta(t, a_0, b_0), \tag{2}$$

$\mathfrak{B}$ ein im Punkte 0 beginnender Bogen derselben, längs dessen die partiellen Ableitungen ξ_t, η_t nirgends zugleich verschwinden, und F, G in der Umgebung jedes Werthsystems

$$x = \xi, \quad y = \eta, \quad x' = \xi_t, \quad y' = \eta_t$$

reguläre analytische Functionen ihrer Argumente sind. Durchläuft ferner t das dem Bogen $\mathfrak{B}$ entsprechende Intervall, und ist $a = a_0$, $b = b_0$, so seien die Functionen $\xi(t, a, b)$, $\eta(t, a, b)$ regulär.

Eine der Curve $\mathfrak{C}$ benachbarte stellen wir in der Form

$$\bar{x} = \xi(\tau, a, b), \quad \bar{y} = \eta(\tau, a, b) \tag{3}$$

dar und wählen τ so als Function von t, dass allgemein der Punkt $(\bar{x}, \bar{y})$ auf der im Punkte (x, y) errichteten Normale der Curve (2) oder $\mathfrak{C}$ liegt. Nimmt man in den Ableitungen von ξ und η, wenn nichts anderes ausdrücklich festgesetzt wird, das Argumentsystem t, a_0, b_0, so hat man, um das bezeichnete Ziel zu erreichen, die Gleichung

$$(\bar{x} - x)\xi_t + (\bar{y} - y)\eta_t = 0 \tag{4}$$

anzusetzen. Die Gleichungen (3) kann man zufolge der vorausgesetzten Beschaffenheit der Functionen ξ, η schreiben

$$\begin{aligned} \bar{x} - x &= \xi_t(\tau - t) + \xi_a(a - a_0) + \xi_b(b - b_0) + [\tau - t, a - a_0, b - b_0]_2, \\ \bar{y} - y &= \eta_t(\tau - t) + \eta_a(a - a_0) + \eta_b(b - b_0) + [\tau - t, a - a_0, b - b_0]_2, \end{aligned} \tag{5}$$

*) Untersuchung über die Grenzen, zwischen welchen Unduloide und Nodoide etc. Göttingen 1887.

wobei die eckige Klammer mit einem Suffix k eine Potenzreihe der eingeklammerten Argumente bedeutet, welche mit Gliedern k^{ter} Dimension beginnt und convergirt, sobald die Argumente dem absoluten Werthe nach gewisse positive Constanten nicht überschreiten.

Die Gleichungen (4), (5) kann man nun benutzen, um $\bar{x}-x$, $\bar{y}-y$, $\tau-t$ als Potenzreihen von $a-a_0$ und $b-b_0$ zu entwickeln. Bringt man nämlich in den Gleichungen (5) alle Glieder von rechts auf die linke Seite hinüber, so hat die Functionaldeterminante der linken Seiten der drei Gleichungen (4), (5) nach den Argumenten $\tau-t$, $\bar{x}-x$, $\bar{y}-y$ für das Werthsystem $t=\tau$, $\bar{x}=x$, $\bar{y}=y$ den Ausdruck

$$\begin{vmatrix} \xi_t & \eta_t & 0 \\ -1 & 0 & \xi_t \\ 0 & -1 & \eta_t \end{vmatrix} = \xi_t^2+\eta_t^2,$$

ist also auf dem Bogen $\mathfrak{B}$ zufolge der eingeführten Voraussetzung von Null verschieden. Dabei sind die in $a-a_0$, $b-b_0$ linearen Glieder der erhaltenen Ausdrücke $\bar{x}-x$, $\bar{y}-y$, $\tau-t$ dieselben, wie wenn in den Gleichungen (4), (5) überhaupt nur in den fünf Differenzen $\bar{x}-x, \cdots b-b_0$ lineare Glieder vorhanden wären; man erhält somit

$$(6)\qquad \begin{aligned} \bar{x} &= x - \frac{\eta_t(A(a-a_0)+B(b-b_0))}{\xi_t^2+\eta_t^2} + [a-a_0,\ b-b_0]_2, \\ \bar{y} &= y + \frac{\xi_t(A(a-a_0)+B(b-b_0))}{\xi_t^2+\eta_t^2} + [a-a_0,\ b-b_0]_2, \end{aligned}$$

$$(7)\qquad \tau - t = [a-a_0,\ b-b_0]_1,$$

wobei die Coefficienten der Potenzreihe (7) von t abhängen, und gesetzt ist

$$A = \xi_t\eta_a - \xi_a\eta_t\Big|^{a=a_0,\,b=b_0}, \quad B = \xi_t\eta_b - \xi_b\eta_t\Big|^{a=a_0,\,b=b_0}.$$

Bezeichnet man daher die rechten Seiten der Gleichungen (6) durch $\mathsf{\Xi}(t,a,b)$, $\mathsf{H}(t,a,b)$, so erhält man für das Curvensystem (1) eine neue Darstellung in den Gleichungen

$$(8)\qquad \begin{aligned} x &= \mathsf{\Xi}(t,a,b) = \xi(\tau,a,b), \\ y &= \mathsf{H}(t,a,b) = \eta(\tau,a,b), \end{aligned}$$

und für die specielle Extremale $\mathfrak{C}$ ergiebt sich

$$(9)\qquad \begin{aligned} x &= \mathsf{\Xi}(t,a_0,b_0) = \xi(t,a_0,b_0), \\ y &= \mathsf{H}(t,a_0,b_0) = \eta(t,a_0,b_0). \end{aligned}$$

Dabei sind die Functionen $\mathsf{\Xi}$, H für alle dem Bogen $\mathfrak{B}$ zugehörigen Werthsysteme (t, a_0, b_0), mithin auch für alle von diesen hinreichend wenig abweichenden regulär. Die beiden Curven (8) und (9) sind durch die

Werthe der Variablen t so auf einander bezogen, dass irgend ein Punkt der ersteren auf der Normale des entsprechenden Punktes der letzteren liegt.

Natürlich ist es möglich, dass die Gleichungen (6) oder (8) nicht die ganze Schar der Extremalen (1) darstellen, da der Convergenzbereich der Reihen Ξ, H kleiner sein kann als derjenige der Reihen ξ, η; die Gleichungen (8) liefern dann, was für unsre Zwecke genügt, nur diejenigen Extremalen (1), welche von $\mathfrak{C}$ hinreichend wenig abweichen.

§ 2.

Differentialgleichung für den Normalabstand zweier benachbarten Extremalen.

Setzt man

$$P = F_x - F'_{x'}, \quad Q = F_y - F'_{y'},$$
$$R = G_x - G'_{x'}, \quad S = G_y - G'_{y'},$$

so sind die Differentialgleichungen der Extremalen

$$P + \lambda R = 0, \quad Q + \lambda S = 0. \tag{10}$$

Wegen der Homogeneität der Functionen F, G ist nun

$$F_x\left(x, y, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}\right) \cdot \frac{d\tau}{dt} = F_x(x, y, x', y'),$$
$$F_{x'}\left(x, y, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}\right) \quad = F_{x'}(x, y, x', y'),$$

also auch

$$\frac{dF_{x'}(x, y, x', y')}{dt} = \frac{dF_{x'}\left(x, y, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}\right)}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt},$$

und da analoge Gleichungen für G gelten, so multiplicirt sich jede der Grössen P, Q, R, S, wenn man an Stelle der unabhängigen Variablen t eine andere τ einführt, mit dem Factor $\frac{dt}{d\tau}$. Ist dieser von Null verschieden, wie es z. B. bei der Beziehung (7) für hinreichend kleine Werthe von $|a - a_0|$ und $|b - b_0|$ offenbar der Fall ist, so gelten die Gleichungen (10) in ungeänderter Form, gleichviel ob man t oder τ als unabhängige Variable nimmt; bildet man dieselben zunächst, indem man $\xi(\tau, a, b)$ nnd $\eta(\tau, a, b)$ für x und y setzt, mit dem Argument τ, und ersetzt dieses sodann der Gleichung (7) gemäss durch t, so folgt auf Grund der Gleichungen (8), dass man in den Gleichungen (10) für x und y auch die Werthe Ξ und H eingesetzt denken kann.

Wir führen nun die Voraussetzung ein, dass für die Curven (1) die isoperimetrische Constante λ an der Stelle $a = a_0$, $b = b_0$ eine reguläre Function von a und b sei, deren erste Ableitungen nicht beide ver-

schwinden; setzt man dann für jede Function $\varphi(a, b)$ als Definition des Zeichens $\delta\varphi$ die Gleichung

$$\delta\varphi = \varphi_a(a_0, b_0)\delta a + \varphi_b(a_0, b_0)\delta b$$

an, sodass δ ein specielles Differentialzeichen ist, so ergiebt sich aus den Gleichungen (10)

$$\text{(11)} \qquad \begin{aligned} \delta P + \lambda\delta R + R\delta\lambda &= 0, \\ \delta Q + \lambda\delta S + S\delta\lambda &= 0, \end{aligned}$$

und diese Gleichungen gelten, wie gezeigt, wenn man für x und y die Werthe Ξ und H einsetzt. Alsdann erhält man den Gleichungen (6) zufolge

$$\text{(12)} \qquad \delta x = \delta\Xi = Xv, \quad \delta y = \delta\mathsf{H} = Yv,$$

wobei gesetzt ist

$$X = \frac{-\eta_t}{\sqrt{\xi_t^2 + \eta_t^2}}, \quad Y = \frac{+\xi_t}{\sqrt{\xi_t^2 + \eta_t^2}}, \quad v = \frac{A da + B db}{\sqrt{\xi_t^2 + \eta_t^2}}.$$

Nimmt man, wie wir es thun wollen, die Quadratwurzeln positiv, so sind X und Y die Richtungscosinus derjenigen Normale der Curve $\mathfrak{C}$ oder (2), welche zur Richtung wachsender t ebenso liegt, wie die $+y$-Axe zur $+x$-Axe.

Um nun die Gleichungen (11) umzuformen, gehen wir von der Identität

$$F = x'F_{x'} + y'F_{y'}$$

aus, welche die Function F als homogen bezüglich der Argumente x', y' charakterisirt. Aus dieser Identität folgt, indem man differenzirt,

$$x'F_{x'x'} + y'F_{x'y'} = x'F_{y'x'} + y'F_{y'y'} = 0,$$

und hieraus, da x' und y' längs des betrachteten Bogens $\mathfrak{B}$ nirgends zugleich verschwinden

$$\text{(13)} \qquad F_{x'x'} = \frac{y'^2 F^1}{x'^2 + y'^2}, \quad F_{x'y'} = \frac{-x'y'F^1}{x'^2 + y'^2}, \quad F_{y'y'} = \frac{x'^2 F^1}{x'^2 + y'^2},$$

wobei gesetzt ist

$$F^1 = F_{x'x'} + F_{y'y'}.$$

Definirt man eine analoge Grösse G^1 ausgehend von der Function G, so hat der Ausdruck

$$H^1 = F^1 + \lambda G^1$$

dieselbe Bedeutung im Verhältniss zur Function

$$H = F + \lambda G.$$

Jetzt berücksichtigen wir, dass das Differentialzeichen δ seiner Definition

nach mit dem Zeichen der Differentiation nach t vertauscht werden kann; daraus folgt

$$\delta x' = (\nu X)', \quad \delta y' = (\nu Y)'$$

(14) $$y'\delta x' - x'\delta y' = -\nu'\sqrt{x'^2 + y'^2}$$

wobei den Gleichungen (9) gemäss

$$x' = \xi_t(t, a_0, b_0) = \Xi_t(t, a_0, b_0),$$
$$y' = \eta_t(t, a_0, b_0) = \mathsf{H}_t(t, a_0, b_0).$$

zu setzen ist; ferner erhält man

$$\delta P = \delta F_x - \delta(F_{x'}') = \delta F_x - \frac{d\delta F_{x'}}{dt}$$
$$= \left(F_{xx} - \frac{dF_{xx'}}{dt}\right)\delta x + \left(F_{xy} - \frac{dF_{x'y}}{dt}\right)\delta y$$
$$+ (F_{xy'} - F_{yx'})\delta y' - \frac{d}{dt}(F_{x'x'}\delta x' + F_{x'y'}\delta y').$$

Bildet man den analogen Ausdruck für δQ und versteht unter F_2 eine ganze rationale Function von X, Y und den zweiten Ableitungen von F sowie den Ableitungen dieser Grössen nach t, so ergiebt sich auf Grund der Gleichungen (13) und (14)

$$X\delta P + Y\delta Q = F_2\nu - X\frac{d}{dt}(F^1 X\nu') - Y\frac{d}{dt}(F^1 Y\nu'),$$

und vermittelst der Identitäten

$$X^2 + Y^2 = 1, \quad XX' + YY' = 0$$

erhält man schliesslich

(15) $$X\delta P + Y\delta Q = F_2\nu - \frac{d}{dt}(F^1\nu').$$

Diese Gleichung bleibt gültig, wenn man F, P, Q durch G, R, S ersetzt und unter G_2 das Analogon von F_2 versteht; hieraus folgt, wenn man

$$H_2 = F_2 + \lambda G_2$$

setzt, auf Grund der Gleichungen (11)

$$H_2\nu - \frac{d}{dt}(H^1\nu') + (XR + YS)\delta\lambda = 0.$$

Nun gelten die Identitäten

$$x'R + y'S = 0, \quad x'X + y'Y = 0;$$

also kann man

$$R = XU, \quad S = YU, \quad U = XR + YS$$

setzen, und die erhaltene Differentialgleichung geht in folgende Form über:

(16) $$H_2\nu - \frac{d}{dt}(H^1\nu') + U\delta\lambda = 0.$$

Diese Relation tritt im vorliegenden Extremumsproblem an die Stelle derjenigen linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung, welcher beim einfachsten Problem des absoluten Extremums der Normalabstand zweier unendlich nahe benachbarten Extremalen genügt*); man erinnere sich z. B. der Differentialgleichung für den Normalabstand zweier benachbarten geodätischen Linien, aus welchen Bonnet so schöne Resultate abgeleitet hat.**)

§ 3.

Folgerungen aus der erhaltenen Differentialgleichung.

Setzt man

$$\lambda_a(a_0, b_0) = \lambda_a^0, \quad \lambda_b(a_0, b_0) = \lambda_b^0,$$

und führt in die Gleichung (16) für $\delta\lambda$ den definitionsmässigen Werth

$$\delta\lambda = \lambda_a^0 da + \lambda_b^0 db$$

ein; trennt man sodann die mit da und db multiplicirten Theile, und erinnert sich der Definition von v, so erhält man die Gleichungen

$$(17) \quad \begin{aligned} &H_2 \frac{A}{\sqrt{\xi_t^2+\eta_t^2}} - \frac{d}{dt}\left[H^1 \frac{d}{dt}\left(\frac{A}{\sqrt{\xi_t^2+\eta_t^2}}\right)\right] + U\lambda_a^0 = 0, \\ &H_2 \frac{B}{\sqrt{\xi_t^2+\eta_t^2}} - \frac{d}{dt}\left[H^1 \frac{d}{dt}\left(\frac{B}{\sqrt{\xi_t^2+\eta_t^2}}\right)\right] + U\lambda_b^0 = 0, \end{aligned}$$

in welchen überall $a = a_0$, $b = b_0$ gesetzt zu denken ist. Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen mit A, die zweite mit B und benutzt die allgemeine Identität

$$u \frac{d}{dt}(H^1 v') - v \frac{d}{dt}(H^1 u') = \frac{d}{dt}[H^1(uv' - vu')],$$

so ergiebt sich

$$(18) \quad \frac{d}{dt}\left[\frac{H^1(AB' - BA')}{\xi_t^2+\eta_t^2}\right] = \frac{U(A\lambda_b^0 - B\lambda_a^0)}{\sqrt{\xi_t^2+\eta_t^2}}.$$

Um diese Gleichung zu integriren, gehen wir davon aus, dass die Extremalen

$$x = \xi(t, a, b), \quad y = \eta(t, a, b)$$

durch den festen Punkt 0, dessen Coordinaten x_0, y_0 seien, hindurchgehen. Der zu diesem Punkte gehörige Werth von t, den wir t_0 nennen, wird im Allgemeinen auf verschiedenen Curven der Schar (1) verschiedene Werthe haben, also eine Function von a und b sein, welche den Gleichungen

$$(19) \quad x_0 = \xi(t_0, a, b), \quad y_0 = \eta(t_0, a, b)$$

---

*) Kneser, Lehrbuch der Variationsrechnung § 24.

**) Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces, Bd. 3, Nr. 630.

genügt, und für $a = a_0$, $b = b_0$, d. h. für die Curve $\mathfrak{C}$, etwa den Werth t_{00} annimmt. Da nun mindestens eine der Grössen $\xi_t(t_{00}, a_0, b_0)$, $\eta_t(t_{00}, a_0, b_0)$ nach den für den Bogen $\mathfrak{B}$ geltenden Voraussetzungen von Null verschieden ist, so kann man aus mindestens einer der Gleichungen (19) die Grösse t_0 als eine an der Stelle $a = a_0$, $b = b_0$ reguläre Function von a und b berechnen. Differenzirt man demgemäss die Gleichungen (19) nach a, so ergiebt sich

$$(20)\qquad \begin{aligned} &\xi_t(t_0, a, b)\frac{\partial t_0}{\partial a} + \xi_a(t_0, a, b) = 0,\\ &\eta_t(t_0, a, b)\frac{\partial t_0}{\partial a} + \eta_a(t_0, a, b) = 0, \end{aligned}$$

und hieraus folgt

$$\begin{vmatrix} \xi_t(t_0, a, b), & \xi_a(t_0, a, b) \\ \eta_t(t_0, a, b), & \eta_a(t_0, a, b) \end{vmatrix} = 0;$$

diese Gleichung bleibt offenbar gültig, wenn man ξ_a, η_a durch ξ_b, η_b ersetzt, und speciell folgt

$$(21)\qquad A\Big|^{t_{00}} = B\Big|^{t_{00}} = 0.$$

Integrirt man daher die Gleichung (18), in welcher $a = a_0$, $b = b_0$ gesetzt wurde, vom Punkte 0 aus, so erhält man

$$(22)\qquad \frac{H^1(AB' - BA')}{\xi_t^2 + \eta_t^2} = \int\limits_{t_{00}}^{t} \frac{U(A\lambda_b^0 - B\lambda_a^0)}{\sqrt{\xi_t^2 + \eta_t^2}}\,dt.$$

Eine weitere für das Folgende wichtige Relation ergiebt sich, wenn man aus den Gleichungen (17) die Grösse U eliminirt:

$$\frac{H_2(A\lambda_b^0 - B\lambda_a^0)}{\sqrt{\xi_t^2 + \eta_t^2}} - \frac{d}{dt}\Big[H^1\frac{d}{dt}(A\lambda_b^0 - B\lambda_a^0)\Big] = 0.$$

Jetzt werde die neue Voraussetzung eingeführt, dass die Grösse H^1 längs des Bogens $\mathfrak{B}$ von Null verschieden sei; dann kann aus der letzten Gleichung ein wichtiger Schluss gezogen werden. Betrachtet man dieselbe nämlich als lineare Differentialgleichung mit der Unbekannten $A\lambda_b^0 - B\lambda_a^0$, so ist H^1 der Coefficient der zweiten Ableitung, und dieser wie die übrigen Coefficienten sind bei den eingeführten Voraussetzungen längs des Bogens $\mathfrak{B}$ reguläre Functionen von t. Bringt man daher die Gleichung auf eine solche Form, dass die zweite Ableitung den Coefficienten Eins hat, so sind die übrigen Coefficienten ebenfalls längs des Bogens $\mathfrak{B}$ regulär, und hieraus folgt, dass die Grösse $A\lambda_b^0 - B\lambda_a^0$ längs des Bogens $\mathfrak{B}$ niemals mit ihrer Ableitung nach t zugleich verschwindet, wenn sie nicht etwa identisch verschwindet.

§ 4.
Die für die conjugirten Punkte charakteristische Determinante.

Nach diesen Vorbereitungen bilden wir die Determinante, deren Verschwinden den zum Punkte 0 auf der Curve $\mathfrak{C}$ conjugirten Punkt charakterisirt. Es werde, indem man längs irgend einer Curve der Schar (1) integrirt, gesetzt

$$\omega(t, a, b) = \int_{t_0}^{t} G\big(\xi(t, a, b),\ \eta(t, a, b),\ \xi_t(t, a, b),\ \eta_t(t, a, b)\big)\, dt;$$

dann ist jene Determinante

$$\Delta(t, a, b) = \frac{\partial(\xi, \eta, \omega)}{\partial(t, a, b)}.$$

Verschwindet dieselbe nämlich für $a = a_0$, $b = b_0$ und irgend einen Werth von t_1, der auf der Curve $\mathfrak{C}$ zum Punkte 1 gehört, so kann man die Gleichungen

$$d\xi = d\eta = d\omega = 0$$

durch passende Wahl der Differentiale dt, da, db befriedigen. Man hat also zwei die Punkte 0 und 1 verbindende, unendlich nahe benachbarte Extremalen, welche der Grösse ω oder dem Integral K denselben Werth verleihen, wenn man von 0 bis 1 integrirt.

Um nun die Determinante Δ in eine zur Discussion geeignete Form zu bringen, gehen wir davon aus, dass offenbar

$$\omega_a = \int_{t_0}^{t} \frac{\partial G}{\partial a}\, dt - \frac{\partial t_0}{\partial a}\, G\Big|^{t_0}$$

$$= \int_{t_0}^{t} (G_x \xi_a + G_y \eta_a + G_{x'} \xi_{ta} + G_{y'} \eta_{ta})\, dt - \frac{\partial t_0}{\partial a}\, G\Big|^{t_0},$$

oder nach einer partiellen Integration

$$\omega_a = G_{x'} \xi_a + G_{y'} \eta_a \Big|_{t_0}^{t} - \frac{\partial t_0}{\partial a}\, G\Big|^{t_0} + \int_{t_0}^{t} (R\xi_a + S\eta_a)\, dt,$$

wobei unter den Functionszeichen G, $G_{x'}$, $\cdots$ natürlich stets die Argumente ξ, η, ξ_t, η_t genommen zu denken, in diesen aber die Grössen a, b nicht specialisirt sind. Eine analoge Formel erhält man für ω_b; setzt man diese Werthe in die Determinante Δ ein, und berücksichtigt die Relationen (20), so folgt durch eine elementare Umformung

$$\Delta(t, a, b) = \begin{vmatrix} \xi_t & \xi_a & \xi_b \\ \eta_t & \eta_a & \eta_b \\ 0 & \int\limits_{t_0}^{t}(R\xi_a + S\eta_a)\,dt & \int\limits_{t_0}^{t}(R\xi_b + S\eta_b)\,dt \end{vmatrix}.$$

Jetzt setzen wir $a = a_0$, $b = b_0$, sodass t_0 den Werth t_{00} erhält, und führen folgende Bezeichnungen ein:

$$M = -\int\limits_{t_{00}}^{t}(R\xi_a + S\eta_a)\,dt = -\int\limits_{t_{00}}^{t} U(X\xi_a + Y\eta_a)\,dt$$

$$= \int\limits_{t_{00}}^{t} \frac{UA\,dt}{\sqrt{\xi_t^2 + \eta_t^2}},$$

$$N = -\int\limits_{t_{00}}^{t}(R\xi_b + S\eta_b)\,dt = -\int\limits_{t_{00}}^{t} U(X\xi_b + Y\eta_b)\,dt$$

$$= \int\limits_{t_{00}}^{t} \frac{UB\,dt}{\sqrt{\xi_t^2 + \eta_t^2}};$$

dann erhält die auf die Curve $\mathfrak{C}$ bezügliche Grösse Δ die einfache Form

$$\Delta = \Delta(t, a_0, b_0) = \begin{vmatrix} M & N \\ A & B \end{vmatrix}. \tag{23}$$

Da ferner offenbar

$$\begin{vmatrix} M' & N' \\ A & B \end{vmatrix} = 0,$$

so folgt

$$\Delta_t(t, a_0, b_0) = \Delta' = \begin{vmatrix} M & N \\ A' & B' \end{vmatrix}. \tag{24}$$

Die Formel (22) nimmt in den neuen Zeichen folgende Gestalt an:

$$\frac{H^1(AB' - BA')}{\xi_t^2 + \eta_t^2} = M\lambda_b^0 - N\lambda_a^0. \tag{25}$$

Combinirt man diese Gleichung mit der den Formeln (23), (24) zufolge bestehenden Identität

$$\begin{vmatrix} M & N \\ \lambda_a^0 & \lambda_b^0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} B & -A \\ B' & -A' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Delta & \Delta' \\ B\lambda_a^0 - A\lambda_b^0 & B'\lambda_a^0 - A'\lambda_b^0 \end{vmatrix},$$

so ergiebt sich

$$\Delta(A'\lambda_b^0 - B'\lambda_a^0) - \Delta'(A\lambda_b^0 - B\lambda_a^0) = \frac{H^1(AB' - A'B)^2}{\xi_t^2 + \eta_t^2}. \tag{26}$$

Jetzt sei der auf dem Bogen $\mathfrak{B}$ zum Argumente t_1 gehörige Punkt 1 der erste, für welchen, wenn man vom Punkte 0 aus die Curve entlang geht, die Grösse $\Delta(t, a_0, b_0)$ verschwindet, sodass

$$\Delta(t_1, a_0, b_0) = 0$$

und die Punkte 0 und 1 conjugirt sind, die Grösse $\Delta(t, a_0, b_0)$ aber, wenn t zwischen t_{00} und t_1 liegt, von Null verschieden ist; die Formeln (20), (21), (23) ergeben beiläufig

$$\Delta(t_{00}, a_0, b_0) = 0.$$

Alsdann ist die Grösse $\Delta(t, a_0, b_0)$ als Function von t an der Stelle t_1 regulär, da dies von ξ, η, ω für das System $t = t_1$, $a = a_0$, $b = b_0$ gilt; man kann also entwickeln in der Form

$$\Delta(t, a_0, b_0) = (t - t_1)^k \{c + [t - t_1]_1\},$$

wobei k eine positive ganze Zahl und c von Null verschieden ist.

Um nun aus der Gleichung (26) gewisse Schlüsse ziehen zu können, unterscheiden wir verschiedene Fälle, welche die Grösse $A\lambda_b^0 - B\lambda_a^0$ für $t = t_1$ darbieten kann.

1) Es sei

$$A\lambda_b^0 - B\lambda_a^0\Big|^{t_1} \gtrless 0;$$

dann hat auf der linken Seite der Gleichung (26) die niedrigste vorkommende Potenz von t den Exponenten $k - 1$. Die rechte Seite aber muss, da H^1 für $t = t_1$ nicht verschwindet, mit einer geraden Potenz von $t - t_1$ beginnen; somit folgt

$$k \equiv 1 \pmod{2}.$$

2) Es gelte, ohne dass der Ausdruck

$$A\lambda_b^0 - B\lambda_a^0$$

identisch verschwindet, die Gleichung

$$A\lambda_b^0 - B\lambda_a^0\Big|^{t_1} = 0; \tag{27}$$

dann folgt aus § 3

$$A'\lambda_b^0 - B'\lambda_a^0\Big|^{t_1} \gtrless 0. \tag{28}$$

Hier unterscheiden wir zwei Unterfälle.

a) Mindestens eine der Grössen A, B, etwa B sei für $t = t_1$, von Null verschieden; dann ergiebt die Gleichung (27)

$$\lambda_a^0 = \frac{A\lambda_b^0}{B}\Big|^{t_1},$$

$$A'\lambda_b^0 - B'\lambda_a^0\Big|^{t_1} = \frac{\lambda_b^0}{B}(A'B - AB')\Big|^{t_1}.$$

Man hätte also der Ungleichung (28) zufolge eine Entwicklung von der Form

$$\frac{\lambda_b^0}{B}(A'B-AB') = C + [t-t_1]_1,$$

wobei C von Null verschieden ist. Die rechte Seite der Gleichung (26) würde also für $t=t_1$ überhaupt nicht verschwinden, und $\Delta(t, a_0, b_0)$ könnte den Factor $t-t_1$ nicht zweimal oder noch öfter enthalten; es ergäbe sich somit $k=1$.

b) Wenn dagegen

$$A\Big|^{t_1} = B\Big|^{t_1} = 0,$$

so liegt ein Ausnahmefall vor, in welchem über das Verhalten der Grösse $\Delta(t, a_0, b_0)$ für $t=t_1$ nichts Sicheres auszusagen ist. Es ist möglich, dass sie in diesem Falle ihr Vorzeichen an der Stelle $t=t_1$ nicht wechselt, was in den Fällen 1) und 2a) offenbar geschieht; hätte man z. B. die Entwicklungen

$$A = (t-t_1)^l\{\alpha+[t-t_1]_1\}, \quad B = (t-t_1)^m\{\beta+[t-t_1]_1\},$$

wobei

$$|\alpha|>0, \quad |\beta|>0, \quad l \geqq m,$$

so hätte man

$$AB'-A'B = \alpha\beta(m-l)(t-t_1)^{l+m-1} + [t-t_1]_{l+m},$$

also jedenfalls

$$AB'-A'B = (t-t_1)^r\{C+[t-t_1]_1\},$$

wobei

$$|C|>0, \quad r \geqq l.$$

Andrerseits hat man nach § 3 zu setzen

$$A\lambda_b^0 - B\lambda_a^0 = \gamma(t-t_1) + [t-t_1]_2,$$

wobei

$$|\gamma|>0;$$

wenn nun angenommen wird

$$\Delta(t, a_0, b_0) = (t-t_1)^k\{\Gamma+[t-t_1]_1\}, \quad |\Gamma|>0,$$

so kommt in dem Ausdrucke

$$\Delta(A'\lambda_b^0 - B'\lambda_a^0) - \Delta'(A\lambda_b^0 - B\lambda_a^0)$$

die niedrigste Potenz von $t-t_1$ in dem Gliede

$$\gamma\Gamma(1-k)(t-t_1)^k$$

vor; die Gleichung (26) ergiebt daher, wenn $k>1$, keinen Widerspruch, sondern die Folgerung $k=2r$.

3) Wenn die Grösse

$$A\lambda_b^0 - B\lambda_a^0$$

für jeden Werth von t verschwindet, so ergiebt die Gleichung (26)

$$AB'-A'B=0.$$

Wäre nun z. B. B nicht identisch gleich Null, so könnte man den Werth

$$\lambda_a^0 = \frac{\lambda_b^0 A}{B}$$

in die Gleichung (25) einführen, und erhielte dann die Identität

$$\frac{\lambda_b^0}{B}(MB - NA) = \frac{\lambda_b^0 \Delta}{B} = 0.$$

Verschwände etwa λ_b^0, so würde aus der vorletzten Gleichung dasselbe für λ_a^0 folgen; da aber nach einer in § 2 getroffenen Festsetzung λ_a^0 und λ_b^0 nicht beide verschwinden, so wäre identisch

$$\Delta(t, a_0, b_0) = 0,$$

was den Voraussetzungen widerspricht, da Δ zwischen den Punkten 0 und 1 von Null verschieden sein soll. Somit verschwinden mit der Grösse $A\lambda_b^0 - B\lambda_a^0$ bei den eingeführten Voraussetzungen zugleich auch die Grössen A und B einzeln für jeden Werth von t, speciell auch für $t = t_1$, womit man auf den Fall 2b) zurückkommt.

Das Hauptergebniss der ganzen bisherigen Entwicklung besteht darin, dass die Determinante $\Delta(t, a_0, b_0)$, abgesehen von einem gewissen Ausnahmefall, an der Stelle $t = t_1$ ihr Vorzeichen wechselt. Der Ausnahmefall ist dadurch charakterisirt, dass für $t = t_1$ auch die Grössen A und B verschwinden; da ξ_t und η_t nicht zugleich verschwinden, so haben in diesem Falle alle Determinanten zweiter Ordnung, welche aus der Matrix

$$\begin{matrix} \xi_t & \xi_a & \xi_b \\ \eta_t & \eta_a & \eta_b \end{matrix}$$

entspringen, den Werth Null.

§ 5.

Betrachtung einer speciellen Variation.

Es sei nun 2 ein beliebiger Punkt des Bogens $\mathfrak{B}$, und das Stück 02 werde so variirt, dass die Gleichungen

(29) $$\delta x = \nu X, \quad \delta y = \nu Y, \quad \nu \Big|^{t_0} = \nu \Big|^{t_2} = 0$$

bestehen. Dabei sei immer t_k das auf der Curve $\mathfrak{C}$ zum Punkte k gehörige Argument speciell also $t_0 = t_{00}$; durch X und Y seien dieselben Grössen wie in § 2 bezeichnet. Bei diesen Festsetzungen bleiben die Punkte 0 und 2 unvariirt; ν sei in dem Intervall von t_0 bis t_2 eine stetige mit stetiger erster und zweiter Ableitung versehene Function von t. Es sei ferner ΔK_{02} der Zuwachs, den das Integral K_{02}, d. h. das von t_0 bis t_2 längs des Bogens $\mathfrak{B}$ erstreckte Integral K erhält, wenn man die dem

Bogen $\mathfrak{B}$ entsprechenden Werthe x, y durch $x+\delta x$, $y+\delta y$ ersetzt, und die Grössen ν, ν' seien längs des ganzen Bogens 02 so klein, dass die in der Formel

$$\Delta K_{02} = G_{x'}\delta x + G_{y'}\delta y \Big|_{t_0}^{t_2} + \int_{t_0}^{t_2} (R\,\delta x + S\,\delta y)\,dt$$

$$+\int_{t_0}^{t_2} [\delta x,\ \delta y,\ \delta x',\ \delta y']_2\,dt$$

vorkommenden Potenzreihen bei der Voraussetzung (29) stets convergiren. Da nun die Identität

$$U = XR + YS$$

gilt, so kann man mit Rücksicht auf die letzten Gleichungen (29) schreiben

$$\Delta K_{02} = \int_{t_0}^{t_2} U\nu\,dt + \int_{t_0}^{t_2} [\nu,\nu']_2\,dt.$$

Diese Formel benutzen wir, um die Grösse ν so zu bestimmen, dass die Variation (29) zu den bei der vorliegenden isoperimetrischen Aufgabe zulässigen gehört, also K_{02} ungeändert lässt, und für ΔK_{02} den Werth Null ergiebt. Man erreicht dies, indem man

$$\nu = \varepsilon u + \zeta v \tag{30}$$

setzt, unter ε und ζ Constante, unter u und v Functionen von t, welche für $t=t_0$ und $t=t_2$ verschwinden, versteht und die Gleichung

$$\Delta K_{02} = \varepsilon\int_{t_0}^{t_2} Uu\,dt + \zeta\int_{t_0}^{t_2} Uv\,dt + [\varepsilon,\zeta]_2 = 0 \tag{31}$$

als Relation zwischen den Constanten ε und ζ ansetzt. Nimmt man diese hinreichend klein an, und haben u, v stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung, so hat die Grösse (30) die oben für ν geforderten Eigenschaften.

Wir wenden nun einen von Weierstrass*) herrührenden Kunstgriff an, und bestimmen die Functionen u und v so, dass

$$\int_{t_0}^{t_2} Uu\,dt = 0,\quad \int_{t_0}^{t_2} Uv\,dt \gtrless 0. \tag{32}$$

Letztere Bedingung ist jedenfalls dann zu erfüllen, wenn U nicht längs der ganzen Curve $\mathfrak{C}$ verschwindet. In diesem Falle aber hätte man die Gleichungen

$$R = S = 0,$$

*) Vgl. Kobb, Acta math. Bd. 17.

d. h. die Curve $\mathfrak{C}$ wäre Extremale des Integrals K im Sinne des absoluten Extremums und genügte den Differentialgleichungen des Problems

$$\delta K = 0.$$

Das ist von vornherein ausgeschlossen, wenn man, wie ich es in meinem Lehrbuch gethan habe, dem Begriff der Extremalen des isoperimetrischen Problems die Bestimmung beifügt, dass die betreffende Curve nicht zugleich Extremale eines der Integrale J, K im Sinne des absoluten Extremums sein soll. Wir wollen auch hier von diesem Falle, der meist kein besonderes Interesse darbietet, absehen, und demgemäss die Voraussetzungen (32) festhalten. Alsdann kann man ζ als Potenzreihe des Argumentes ε aus der Gleichung (31) berechnen und erhält die Formel

$$\zeta = [\varepsilon]_2, \tag{33}$$

deren rechte Seite in speciellen Fällen auch identisch verschwinden kann.

Um nun den Einfluss der Variation (29) auf den Werth des Integrals J zu erkennen, benutzen wir die zweite Variation desselben. Man versteht unter dieser Bezeichnung bekanntlich das verdoppelte Integral des Aggregats der Glieder zweiter Dimension in der Entwicklung der Differenz

$$F(x+\delta x,\ y+\delta y,\ x'+\delta x',\ y'+\delta y') - F(x, y, x', y') \tag{34}$$

nach Potenzen von δx, δy, $\delta x'$, $\delta y'$. Benutzt man daher das Zeichen δ nach der Operationsregel

$$\delta = \delta x \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \delta y \cdot \frac{\partial}{\partial y} + \delta x' \cdot \frac{\partial}{\partial x'} + \delta y' \cdot \frac{\partial}{\partial y'},$$

so ist das bezeichnete Integral

$$\delta^2 J = \int (\delta x\, \delta F_x + \delta y\, \delta F_y + \delta x'\, \delta F_{x'} + \delta y'\, \delta F_{y'})\, dt;$$

integrirt man theilweise, so erhält man hierfür die neue Form

$$\delta x\, \delta F_{x'} + \delta y\, \delta F_{y'} + \int dt \left[\delta x \left(\delta F_x - \frac{d\delta F_{x'}}{dt}\right) + \delta y \left(\delta F_y - \frac{d\delta F_{y'}}{dt}\right)\right]$$
$$= \delta x\, \delta F_{x'} + \delta y\, \delta F_{y'} + \int dt [\delta x\, \delta P + \delta y\, \delta Q].$$

Die vor dem Integralzeichen erschienenen Glieder verschwinden, wenn man von t_0 bis t_2 integrirt und die Annahme (29) gelten lässt; man erhält dann auf grund der in § 2 benutzten Identität (15) den Ausdruck

$$\delta^2 J_{02} = \int_{t_0}^{t_2} dt (\delta P\, \delta x + \delta Q\, \delta y) = \int_{t_0}^{t_2} \nu \left(F_2 \nu - \frac{d}{dt}(F^1 \nu')\right) dt,$$

indem man durch die Indices an dem Zeichen J das Integrationsintervall bezeichnet. Setzt man den erhaltenen Ausdruck in die Grösse ΔJ_{02}, d. h.

das von t_0 bis t_2 genommene Integral der Differenz (34) ein, und transformirt die in δx, $\delta x'$, δy, $\delta y'$ linearen Glieder mittelst der bekannten partiellen Integration, so erhält man

$$\Delta J_{02} = \int_{t_0}^{t_2} (P\delta x + Q\delta y)\,dt + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_2} v\left(F_2 v - \frac{d(F^1 v')}{dt}\right) dt$$
$$+ \int_{t_0}^{t_2} [v, v']_3\,dt$$

und diese Grösse ist der Zuwachs, den das Integral J_{02} bei der Variation (29) erfährt. Bildet man die analoge Formel für die Grösse ΔK_{02}, deren Werth nach (31) Null ist, und addirt sie, mit λ multiplicirt, zur letzten Gleichung, so verschwinden den Gleichungen

$$P + \lambda R = Q + \lambda S = 0$$

zufolge die in δx und δy linearen Glieder, und man erhält das Resultat

$$\Delta J_{02} = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_2} v\left\{H_2 v - \frac{d(H^1 v')}{dt}\right\} dt + \int_{t_0}^{t_2} [v, v']_3\,dt.$$

Setzt man hier für v den Werth (30) ein, und berücksichtigt die Beziehung (33), so folgt

$$\Delta J_{02} = \frac{\varepsilon^2}{2}\int_{t_0}^{t_2} u\left\{H_2 u - \frac{d(H^1 u')}{dt}\right\} dt + [\varepsilon]_3,$$

oder auch, wenn θ eine neue Constante bedeutet,

$$(35)\qquad 2\Delta J_{02} = \theta\varepsilon^2\int_{t_0}^{t_2} u^2\,dt + \varepsilon^2\int_{t_0}^{t_2} u\left\{(H_2 - \theta)u - \frac{d(H^1 u')}{dt}\right\} dt + [\varepsilon]_3.$$

§ 6.

Die betrachtete Variation weiter specialisirt.

Das Ziel der ferneren Untersuchung besteht nun darin, u so zu bestimmen, dass in dem erhaltenen Ausdrucke ΔJ_{02} das zweite Integral verschwindet, sodass ΔJ_{02} bei hinreichend kleinen Werthen von ε das Vorzeichen mit der Constanten θ gemein hat. Kann diese dabei willkürlich gelassen werden, also positiv und negativ sein, so gilt dasselbe von ΔJ_{02}, und das in der isoperimetrischen Aufgabe geforderte Extremum wird von dem Bogen 02 sicher nicht mehr geliefert. Nun verschwindet

ja das bezeichnete Integral, wenn man für u eine Lösung der Differentialgleichung

$$(H_2 - \theta)\, u - \frac{d(H^1 u')}{dt} = 0$$

setzt; die Schwierigkeit besteht dann aber hauptsächlich darin, dass u für $t = t_2$ verschwinden und ausserdem der ersten Gleichung (32) genügen muss. Einen besser brauchbaren Werth u erhält man, wenn man unter c eine gewisse von t unabhängige Grösse versteht, und eine Gleichung

$$(H_2 - \theta) u - \frac{d(H^1 u')}{dt} + c\,U = 0 \tag{36}$$

ansetzt; gelingt es, u dieser Gleichung und der ersten Relation (32) gemäss zu bestimmen, so hat man

$$\int_{t_0}^{t_2} \left[(H_2 - \theta) u - \frac{d(H^1 u')}{dt}\right] u\, dt = - c \int_{t_0}^{t_2} u\, U dt = 0\,.$$

Es bleibt jetzt noch übrig, die auf den Werth t_2 bezügliche Bedingung durch passende Wahl von c und t_2 zu erfüllen, und die nöthigen Stetigkeitseigenschaften längs des Bogens 02 sicher zu stellen.

Um zunächst das letztgenannte Ziel zu erreichen, gehen wir von den Gleichungen (17) des § 3 aus, welche zeigen, dass der Gleichung (36) für $\theta = 0$ und bei passender Wahl der Constante c durch die Grössen

$$\frac{A}{\sqrt{\xi_t^2 + \eta_t^2}}, \quad \frac{B}{\sqrt{\xi_t^2 + \eta_t^2}} \tag{37}$$

genügt wird, und wenden einen allgemeinen Satz*) an, durch welchen die Abhängigkeit der Lösungen eines beliebigen simultanen Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung von den Anfangswerthen der Unbekannten charakterisirt wird. Ist ein solches System nach den Ableitungen der Unbekannten aufgelöst, und kennt man ein Lösungssystem $\mathfrak{S}$, in welchem die Unbekannten längs des Intervalls $\mathfrak{J}$ regulär sind, so bleibt diese Eigenschaft unter einer gewissen Voraussetzung allen Lösungssystemen erhalten, in welchen die Anfangswerthe der Unbekannten, etwa die am unteren Ende des Intervalls $\mathfrak{J}$ erreichten, von den entsprechenden des Systems $\mathfrak{S}$ hinreichend wenig abweichen, und die Differenz der Werthe einer Unbekannten in dem einen und anderen Lösungssystem ist als Potenzreihe der Differenzen entsprechender Anfangswerthe darzustellen. Die Voraussetzung, welche hinzugefügt werden muss, besteht darin, dass die in den Differentialgleichungen erscheinenden Ausdrücke für die Ableitungen der Unbekannten für alle im Intervall $\mathfrak{J}$ vom System $\mathfrak{S}$ gelieferten

*) S. z. B. **Kneser**, Lehrbuch der Variationsrechnung § 27.

Werthsysteme der Unbekannten reguläre analytische Functionen ihrer Argumente sind. Diese Voraussetzung ist für ein gewisses Intervall in dem System erster Ordnung erfüllt, durch welches man die Gleichung (36) ersetzen kann, indem man θ und u' neben u als Unbekannte ansieht und die Gleichungen

$$\frac{d\theta}{dt} = 0, \quad \frac{du}{dt} = u'$$

hinzufügt; kennt man eine längs des Bogens $\mathfrak{B}$ reguläre Lösung der Gleichung

$$H_2 u - \frac{d(H^1 u')}{dt} + cU = 0,$$

so ergiebt dieselbe, da H^1 längs des Bogens $\mathfrak{B}$ nicht verschwindet, in dem diesem Bogen entsprechenden Intervall der Grösse t nur Werthsysteme (u, u', θ), für welche der Ausdruck der Grösse $\frac{du'}{dt}$ sich regulär verhält; für die Ausdrücke $\frac{du}{dt}$ und $\frac{d\theta}{dt}$ ist dies selbstverständlich. Da nun die Grössen (37) längs des Bogens $\mathfrak{B}$ regulär sind und beziehentlich den Gleichungen

$$H_2 u - \frac{d(H^1 u')}{dt} + \lambda_a^0 U = 0,$$

$$H_2 u - \frac{d(H^1 u')}{dt} + \lambda_b^0 U = 0$$

genügen, so folgt, dass auch den Gleichungen

$$(38) \qquad \begin{aligned} (H_2 - \theta)p - \frac{d(H^1 p')}{dt} + \lambda_a^0 U = 0, \\ (H_2 - \theta)q - \frac{d(H^1 q')}{dt} + \lambda_b^0 U = 0 \end{aligned}$$

durch Functionen genügt werden kann, die längs des Bogens 02 regulär und den Bedingungen

$$p\Big|^{t_0} = q\Big|^{t_0} = 0$$

unterworfen sind. Setzt man noch

$$p' - \frac{A}{\sqrt{\xi_t^2 + \eta_t^2}}\Bigg|^{t_0} = \iota, \qquad q' - \frac{B}{\sqrt{\xi_t^2 + \eta_t^2}}\Bigg|^{t_0} = \varkappa,$$

so erhält man nach dem ausgesprochenen allgemeinen Satze längs der ganzen Strecke 02 die Darstellungen

$$(39) \qquad p = \frac{A}{\sqrt{\xi_t^2 + \eta_t^2}} + [\theta, \iota]_1, \quad q = \frac{B}{\sqrt{\xi_t^2 + \eta_t^2}} + [\theta, \varkappa]_1,$$

wobei die Coefficienten der rechts erscheinenden Potenzreihen von $\theta, \iota, \varkappa$ reguläre Functionen von t sind.

Setzen wir nun

$$u = \alpha p + \beta q,$$

und verstehen unter α und β Constante, so hat dieser Ausdruck die für u geforderten Stetigkeitseigenschaften und verschwindet für $t = t_0$; es muss noch bewirkt werden, dass die Gleichungen

$$(40) \qquad u\Big|^{t_2} = 0, \quad \int_{t_0}^{t_2} Uu\,dt = 0.$$

bestehen. Dazu kommt man durch passende Wahl der Constanten α, β und der bis jetzt willkürlichen Stelle t_2. Schreibt man nämlich die letzten Gleichungen in der Form

$$(41) \qquad \alpha p + \beta q\Big|^{t_2} = 0, \quad \alpha\int_{t_0}^{t_2} Up\,dt + \beta\int_{t_0}^{t_2} Uq\,dt = 0,$$

so ist offenbar, dass man ihnen durch Werthe α, β, welche nicht beide verschwinden, genügen kann, sobald die Grösse t_2 der Gleichung

$$(42) \qquad \begin{vmatrix} p\Big|^{t_2} & q\Big|^{t_2} \\ \int_{t_0}^{t_2} Up\,dt & \int_{t_0}^{t_2} Uq\,dt \end{vmatrix} = 0$$

gemäss bestimmt wird. Wenn man allgemein die Bezeichnung

$$\Theta(t, \theta, \iota, \varkappa) = p\int_{t_0}^{t} Uq\,dt - q\int_{t_0}^{t} Up\,dt,$$

einführt, so gilt dann die Gleichung

$$(43) \qquad \Theta(t_2, \theta, \iota, \varkappa) = 0.$$

Nun folgen aus den Ausdrücken (39) und der in § 4 gegebenen Definition der Zeichen M, N, Δ, da t_0 jetzt immer den Werth t_{00} hat, die Gleichungen

$$\int_{t_0}^{t} Up\,dt = M + [\theta, \iota]_1, \quad \int_{t_0}^{t} Uq\,dt = N + [\theta, \varkappa]_1,$$

$$\Theta(t, \theta, \iota, \varkappa) = \frac{1}{\sqrt{\xi_t^2 + \eta_t^2}} \begin{vmatrix} A & B \\ M & N \end{vmatrix} + [\theta, \iota, \varkappa]_1$$

$$(44) \qquad = \frac{\Delta(t, a_0, b_0)}{\sqrt{\xi_t^2 + \eta_t^2}} + [\theta, \iota, \varkappa]_1.$$

Hieraus aber kann man folgern, dass die Gleichung (42) bei hinreichend kleinen absoluten Werthen der Constanten θ, ι, $\varkappa$ für einen Werth t_2

besteht, welcher, wenn jene Constanten verschwinden, gegen die Grenze t_1 convergirt. Die Grösse $\Delta(t, a_0, b_0)$ ändert nämlich in der Stelle $t = t_1$ nach § 4 ihr Vorzeichen, wenn der dort näher bezeichnete Ausnahmefall ausgeschlossen wird. Ist daher

$$t_0 < t_3 < t_1 < t_4$$

und sind die Differenzen $t_4 - t_1$, $t_1 - t_3$ beliebig klein, so haben die Grössen $\Delta(t_3, a_0, b_0)$ und $\Delta(t_4, a_0, b_0)$ verschiedene Vorzeichen. Dasselbe gilt der Gleichung (44) zufolge von den Grössen $\Theta(t_3, \theta, \iota, \varkappa)$ und $\Theta(t_4, \theta, \iota, \varkappa)$, sobald die absoluten Werthe von θ, ι, $\varkappa$ hinreichend klein sind, und es giebt zwischen t_3 und t_4 mindestens eine Stelle t, für welche

$$\Theta(t, \theta, \iota, \varkappa) = 0;$$

diese werde für t_2 genommen. Alsdann besteht die Gleichung (42) oder (43), und die Gleichungen (41) können durch Constante α, β, welche nicht beide verschwinden, erfüllt werden, sodass der Ausdruck

$$u = \alpha p + \beta q$$

für das jetzt bestimmte Intervall 02 alle Eigenschaften, welche in § 4 von der Function u gefordert wurden, besitzt. Ausserdem gelten die Gleichungen (38); somit folgt

$$(H_2 - \theta) u - \frac{d(H^1 u')}{dt} + (\alpha \lambda_a^0 + \beta \lambda_b^0) U = 0, \tag{45}$$

$$\int_{t_0}^{t_2} u \left\{ (H_2 - \theta) u - \frac{d(H^1 u')}{dt} \right\} dt = -(\alpha \lambda_a^0 + \beta \lambda_b^0) \int_{t_0}^{t_2} U u \, dt = 0,$$

und die Gleichung (35) ergiebt

$$2 \Delta J_{02} = \theta \varepsilon^2 \int_{t_0}^{t_2} u^2 dt + [\varepsilon]_3. \tag{46}$$

Hiermit ist das Ziel der Untersuchung erreicht, sobald wir sicher sind, dass u nicht identisch verschwindet. In diesem Falle würde aus der Gleichung (45) die Identität

$$(\alpha \lambda_a^0 + \beta \lambda_b^0) U = 0$$

folgen. Da nun wegen der in § 5 erwähnten näheren Bestimmung des Begriffs der Extremalen die Grösse U nicht längs der Curve $\mathfrak{C}$ verschwinden kann, so würde folgen

$$\alpha \lambda_a^0 + \beta \lambda_b^0 = 0;$$

hieraus würde sich, wenn z. B. λ_a^0 von Null verschieden ist, ergeben

$$\alpha = -\frac{\beta \lambda_b^0}{\lambda_a^0}, \quad u = \frac{\beta}{\lambda_a^0} (\lambda_a^0 q - \lambda_b^0 p),$$

und da die Grössen α, β nicht beide verschwinden, erhielte man die neue Identität

$$\lambda_b^0 p - \lambda_a^0 q = 0$$

oder, wenn man die Ausdrücke (39) einsetzt,

$$\frac{\lambda_b^0 A - \lambda_a^0 B}{\sqrt{\xi_t^2 + \eta_t^2}} + [\theta, \iota, \varkappa]_1 = 0.$$

Somit würde auch der Ausdruck $\lambda_b^0 A - \lambda_a^0 B$ identisch verschwinden, was nach § 4 nur in dem von der Untersuchung ausgeschlossenen Ausnahmefall möglich wäre.

Unter den eingeführten Voraussetzungen hat also u und den Gleichungen (30), (33) zufolge auch v nicht in dem ganzen Intervall von t_0 bis t_2 den Werth Null, und die Formel (46) zeigt, dass das in der vorgelegten Aufgabe geforderte Extremum jedenfalls von dem Bogen der Curve $\mathfrak{C}$, welcher dem Intervall von t_0 bis t_4 entspricht, nicht mehr geliefert wird. Denn ist ε hinreichend klein, so hat ΔJ_{02} das Vorzeichen mit θ gemein, kann also positiv und negativ werden. Positiven und negativen Werthen θ wird dabei im Allgemeinen nicht derselbe Werth von t_2 entsprechen, aber doch stets ein Werth des Intervalls von t_3 bis t_4, sodass jedenfalls innerhalb des Intervalls von t_0 bis t_4 Variationen der Curve $\mathfrak{C}$ construirt werden können, welche, ohne den Werth K zu ändern, das Integral J sowohl vermehren wie vermindern. Damit ist gezeigt, dass das Extremum aufhört, sobald der betrachtete Bogen über den zu seinem Anfangspunkte conjugirten hinausreicht.

Endlich ergeben die Formeln (29), (30), (33), da die Constante ε beliebig klein genommen werden kann, dass nicht nur δx, δy, sondern auch $\delta x'$, $\delta y'$ dem absoluten Werthe nach unterhalb einer beliebig vorgeschriebenen Grenze verbleiben können; für den Bogen 04 ist also schon dasjenige Extremum nicht mehr vorhanden, welches ich in meinem Lehrbuch als das schwache bezeichnet habe.

Ueber eine hinreichende Bedingung für das Maximum und Minimum einfacher Integrale.

Von

G. v. Escherich in Wien.

In den folgenden Blättern wird versucht die hinreichende Bedingung, die Herr Kneser*) für das Extremum einfacher Integrale angab, unter allgemeineren Voraussetzungen herzuleiten. Die hierbei angestellten Betrachtungen stehen in engem Zusammenhange mit den Entwickelungen, die ich in früheren Untersuchungen über die zweite Variation der einfachen Integrale veröffentlichte**), und führen von hier aus durch zwei sehr nahe liegende Bemerkungen (§ 3) zum Ziele.

§ 1.

Zum leichteren Verständnisse sollen zunächst die Voraussetzungen und Sätze, auf denen die späteren Entwickelungen beruhen, zusammengestellt werden.

1) Es wird vorausgesetzt: 1) dass die Functionen

$$f(x, y_1 \cdots y_n;\ y_1' \cdots y_n');\quad \varphi_k(x, y_1 \cdots y_n;\ y_1' \cdots y_n') \quad (k=1,2\cdots m<n)$$

sammt ihren drei ersten partiellen Ableitungen nach den Veränderlichen $x, y_1 \cdots y_n, y_1' \cdots y_n'$ in einem homogenen Continuum ($\mathfrak{C}$)***) dieser Veränderlichen, in dem $a \leqq x \leqq b$ ist, stetig sind. 2) Dass das System von Differentialgleichungen

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial y_i} - \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial F}{\partial y_i'} = 0; \quad \dfrac{dy_i}{dx} = y_i' & (i=1,2\cdots n), \\ \varphi_k(x, y_1 \cdots y_n;\ y_1' \cdots y_n') = 0 & (k=1,2\cdots m), \end{cases}$$

*) Diese Annalen Bd. 51, pag. 321.

**) Die zweite Variation einfacher Integrale. Mitteilung I, II, III, Wien. Ber. 1898, Bd. CVII, pag. 1191, 1267, 1383. Mitteilung IV, Wien. Ber. 1899, Bd. CVIII, pag. 1269. Sie werden hier als Mitt. angeführt.

***) Pringsheim, Math. Encyklopädie Bd. II, pag. 46.

wo $F = f + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \varphi_k$ ist und die $\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_m$ unbekannte Functionen des x bezeichnen, eine für alle $a \leqq x \leqq b$ eindeutige und stetige Lösung $y_1 \cdots y_n$; $y_1' \cdots y_n'$; $\lambda_1 \cdots \lambda_m$ besitzt, von der die $y_1 \cdots y_n$, $y_1' \cdots y_n'$ in ($\mathfrak{C}$) liegen und die $y_1 \cdots y_n$ in $x = a$ und $x = b$ gegebene Werthe annehmen; 3) Dass längs der Curve (C), welche durch diese Lösung im Gebiete der $x, y_1 \cdots y_n$ bestimmt wird, die Determinante

$$R = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial y_1' \partial y_1'}; \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial y_1' \partial y_n'}; & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1'}; \cdots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_1'} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y_1' \partial y_n'}; \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial y_n' \partial y_n'}; & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_n'}; \cdots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_n'} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1'} \;; \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_n'} \;; & 0 \;\cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_1'} \;; \cdots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_n'} \;; & 0 \;\cdots & 0 \end{vmatrix}$$

nirgends verschwinde*).

In Folge dieser Voraussetzung (3) liegt nunmehr, da die Coefficienten in (A) stetig sind, gewiss kein singulärer Punkt dieses Systems von Differentialgleichungen auf (C) und muss in jedem ihrer Punkte mindestens eine Determinante m^{ten} Grades der Matrix

$$M = \begin{Vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1'}; \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_n'} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_1'}; \cdots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_n'} \end{Vmatrix}$$

von Null verschieden sein. Ist im Anfangspunkte a etwa $\frac{\partial(\varphi_1, \cdots \varphi_m)}{\partial(y_1', \cdots y_m')} \neq 0$, so kann aus den Werthen, welche $y_{m+1}', \cdots y_n'$; $y_1 \cdots y_n$; $\lambda_1 \cdots \lambda_m$ in a besitzen, als Anfangswerthen die Lösung mittelst der Cauchy-Lipschitz'schen

*) Dass diese Voraussetzung, die enger ist, als die von Clebsch (J. f. Math. 55), Mayer (J. f. Math. 69), Scheeffer (Math. Ann. 25) angenommene, für eine eingehendere Behandlung der II. Variation nicht entbehrt werden kann, habe ich bereits in Mitt. I, pag. 1211 hervorgehoben. Auch Kneser zieht sie l. c. § 4 und 5 heran.

oder Cauchy-Picard'schen Methode hergeleitet werden*). Sie liegt dann in dem zu ihren Anfangswerthen in a gehörigen Regularitätsintervalle**) und ist wegen Voraussetzung (1) nach diesen differentiirbar***).

2) Die gefundene Lösung erfüllt eine nothwendige Bedingung, damit das Integral

$$(1)\qquad \int_a^b f(x, y_1 \cdots y_n, y_1' \cdots y_n')\, dx = \int_a^b F\, dx = J \qquad \left(\frac{dy_k}{dx} = y_k'\right)$$

für die $y_1, y_2, \cdots y_n$, die in a und b die vorgegebenen Werthe besitzen und den Gleichungen

$$\varphi_k(x, y_1 \cdots y_n, y_1' \cdots y_n') = 0 \qquad (k = 1, 2 \cdots m)$$

genügen, zu einem Max. oder Min. werde. Sind die Functionen η_1, $\eta_2, \cdots \eta_n$ sammt ihren ersten Ableitungen von x in ab eindeutig und stetig, und verschwinden die $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_n$ in den Endpunkten von ab, so wird, wenn man den $y_1, y_2, \cdots y_n$ bez. die Variationen $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_n$ ertheilt, die zugehörige zweite Variation des Integrals

$$(2)\qquad \delta^2 J = \int_a^b \sum_{i,k=1}^{n} (a_{ik}\eta_i'\eta_k' + 2 b_{ik}\eta_i'\eta_k + c_{ik}\eta_i\eta_k)\, dx,$$

$$(3)\qquad a_{ik} = \frac{\partial^2 F}{\partial y_i' \partial y_k'}; \quad b_{ik} = \frac{\partial^2 F}{\partial y_i' \partial y_k}; \quad c_{ik} = \frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_k};$$

wo $F(x, y_1 \cdots y_n; y_1' \cdots y_n')$ längs (C) zu nehmen ist. Kann das Gleichungssystem

$$\varphi_k(x, y_1 + \eta_1, \cdots y_n + \eta_n, y_1' + \eta_1', \cdots y_n' + \eta_n') = 0 \quad (k = 1, 2 \cdots m),$$

dem die $\eta_1, \eta_2 \cdots \eta_n$ längs (C) genügen sollen, durch die Gleichungen

$$(4)\quad \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i'}\eta_i' + \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i}\eta_i\right) \equiv \sum_{i=1}^{n} (\alpha_{ki}\eta_i' + \beta_{ki}\eta_i) \equiv \omega_k(\eta) = 0 \quad (k = 1, 2 \cdots m)$$

ersetzt werden, so lässt sich $\delta^2 J$ transformiren mit Hilfe des Systems von Differentialgleichungen der II[ten] Ordnung

---

*) Die Grundzüge für diese Behandlung sind gegeben in Mitt. I (§ II, 2, p. 128); in weiterer Ausführung für den Fall analytischer Functionen bei Kneser l. c. p. 340, § 5.

**) Painlevé Bull. soc. math. t. 27, 1899.

***) Bendixon Bull. soc. math. t. 24, 1896 und G. v. Escherich, Wien. Ber. 1899 Bd. 188, p. 622.

$$(5)\quad \begin{cases} \psi_i(z,r) = \sum\limits_{k=1}^{n}\Big[c_{ki}z_k + b_{ki}z_k' - \dfrac{d}{dx}(b_{ik}z_k + a_{ik}z_k')\Big] \\ \qquad\qquad + \sum\limits_{k=1}^{m}\Big(\beta_{ki}r_k - \dfrac{d}{dx}(\alpha_{ki}r_k)\Big) = 0 \quad (i=1,2\cdots n), \\ \omega_i(z) = \sum\limits_{k=1}^{n}(\alpha_{ik}z_k' + \beta_{ik}z_k) = 0 \qquad (i=1,2\cdots m), \end{cases}$$

das ich in Ermangelung einer schon bestehenden Bezeichnung das accessorische System von Differentialgleichungen nannte*). Dasselbe hat die Eigenschaft sich selbst adjungirt zu sein, denn bezeichnet man mit (z, r) das System von $(n+m)$ Grössen $z_1, z_2 \cdots z_n$; $r_1 \cdots r_m$ und mit (u, ϱ) ein anderes derartiges System, so ist:

$$(6)\quad \sum_{i=1}^{n} u_i\psi_i(z,r) + \sum_{k=1}^{m}\varrho_k\omega_k(z) - \Big[\sum_{i=1}^{n} z_i\psi_i(u,\varrho) + \sum_{k=1}^{m} r_k\omega_k(u)\Big]$$
$$= \frac{d}{dx}\Big\{\sum_{i,k}[a_{ik}(z_iu_k' - u_iz_k') + b_{ik}(z_iu_k - u_iz_k)]$$
$$- \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ki}(r_ku_i - \varrho_kz_i)\Big\} \equiv \frac{d}{dx}\psi(z,r;u,\varrho);$$

der bilineare Differentialausdruck (6) $\psi(z, r; u, \varrho)$ hat die Eigenschaft für je zwei Lösungen (z, r) und (u, ϱ) von (5) im ganzen Intervalle ab einen constanten Werth anzunehmen. Im Falle dieser Null ist, nenne ich die beiden Integralsysteme oder Lösungen conjugirt. Es giebt nun Gruppen von Lösungen der Gleichungen (5), in denen je zwei zu einander conjugirt sind. Die grösste Anzahl von linear-unabhängigen Lösungen, die zu einer solchen Gruppe zusammentreten können, ist n: sie bilden dann ein System conjugirter Lösungen oder kurz conjugirtes System.

Sind (u^1, ϱ^1); $(u^2, \varrho^2) \cdots (u^n, \varrho^n)$ die n Glieder eines solchen Systems, so soll es mit $((u^k, \varrho^k))$ bezeichnet und

$$\sum \pm u_1^1 u_2^2 \cdots u_n^n = \Delta(u^1, u^2 \cdots u^n)$$

seine Determinante genannt werden. Es giebt unendlich viele conjugirte Systeme, insbesondere sind auch, da für $u_i = z_i = 0$ $(i = 1, 2, \cdots n)$ in ξ, auch $\psi(z, r, u, \varrho) = 0$ wird, jedem Punkte ξ von ab unendlich viele zugeordnet, welche die dem Punkte ξ conjugirten heissen mögen. Ihre Determinanten unterscheiden sich nur um von Null verschiedene von x

*) Seine Integration und Eigenschaften sind in Mitt. I (IX, pag. 1234) und Mitt. II (pag. 1294—1326) untersucht.

unabhängige Factoren und verschwinden insgesammt in ξ; mit $\Delta(x, \xi)$ werde in üblicher Weise irgend eine von ihnen bezeichnet.

3) Besteht ein conjugirtes System $((u^k, \varrho^k))$, dessen Determinante in $\alpha\beta (a \leqq \alpha < \beta \leqq b)$ nicht verschwindet und erfüllen die $\eta_1, \eta_2 \cdots \eta_n$, die in $a\alpha$ und $b\beta$ Null seien, in ab die früher angegebenen Bedingungen, so lässt sich, wie Clebsch zuerst zeigte, $\delta^2 J$ in eine reducirte Form bringen*):

$$\delta^2 J = \int_\alpha^\beta \sum_{i,k} a_{ik} \zeta_i \zeta_k \, dx, \tag{7}$$

wo

$$\zeta_i = \frac{1}{\Delta(u^1, u^2 \cdots u^n)} \begin{vmatrix} \eta_i' \; ; & \eta_1, & \cdots & \eta_n \\ (u_i^1)' ; & u_1^1, & \cdots & u_n^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (u_i^n)' ; & u_1^n, & \cdots & u_n^n \end{vmatrix} \tag{8}$$

und also

$$\sum_{k=1}^n \alpha_{ik} \zeta_k = 0 \qquad (i = 1, 2 \cdots m). \tag{9}$$

Aus dieser reducirten Form ergiebt sich als nothwendige Bedingung, damit $\delta^2 J$ ihr Zeichen nicht ändere und somit für das Eintreten eines Extremums**):

(10) die Form $\sum\limits_{i,k} a_{ik} \zeta_i \zeta_k$ mit den Nebenbedingungen

$$\sum_{k=1}^n \alpha_{ik} \zeta_k = 0 \qquad (i = 1, 2 \cdots m)$$

muss in jedem Punkte von ab definit sein und in allen vom selben Zeichen.

Ist speciell $\Delta(x, a)$, die Determinante eines dem Anfangspunkte a conjugirten Systems, nirgends in $(a + 0, b)$ Null, so giebt es unendlich viele conjugirte Systeme, deren Determinante in ab nirgends verschwindet***).

*) Die Ableitung bei Mayer (J. f. Math. Bd. 69) und die beiden von mir gegebenen (Mitt. I und IV) setzen voraus, dass die $\eta_1, \eta_2 \cdots \eta_n$ auch zweite Derivirte besitzen. Doch lässt sich, wie ich an einem anderen Orte zeigen werde, dieser Uebelstand leicht beseitigen.

**) Mitt. III (pag. 1384, XVII).

***) Dieser Satz wurde zuerst von Mayer (l. c.) unter einschränkenderen Voraussetzungen, die zum Theil sogar über das Integrations-Intervall ab hinausgehen, bewiesen. Er gilt auch ohne dieselben, wie aus Mitt. III, pag. 1412, XIX hervorgeht, wo der Beweis für die analoge Voraussetzung, dass $\Delta(x, b)$ in $(a, b - 0)$ nicht verschwinde, unter den im Texte gemachten Annahmen geführt wird.

§ 2.

Sind die in ab sammt ihren ersten Derivirten eindeutigen und stetigen Functionen des x: $\eta_1, \eta_2 \cdots \eta_n$ in a und b Null, und genügen sie längs (C) den Gleichungen

$$\varphi_k(x, y_1 + \eta_1 \cdots y_n + \eta_n;\ y_1' + \eta_1' \cdots y_n' + \eta_n') = 0 \quad (k = 1, 2 \cdots m),$$

so wird, wenn die $y_1 \cdots y_n$, $y_1' \cdots y_n'$ der Curve (C) durch die Variationen $\eta_1 \cdots \eta_n$, $\eta_1' \cdots \eta_n'$ wieder in Punkte des Continuums $(\mathfrak{C})$ übergeführt werden, die Darstellung des Restes der Taylor'schen Formel durch ein bestimmtes Integral für das Integral (1) die Aenderung ergeben:

$$(2^*) \qquad \Delta J = \frac{1}{2} \int_a^b \sum_{i,k} (\bar{a}_{ik} \eta_i' \eta_k' + 2 \bar{b}_{ik} \eta_i' \eta_k + \bar{c}_{ik} \eta_i \eta_k)\, dx,$$

wo bekanntlich

$$(3^*) \qquad \bar{a}_{ik} = 2 \int_0^1 \frac{\partial^2 F(\ )}{\partial y_i' \partial y_k'} (1 - \lambda)\, d\lambda; \quad \bar{b}_{ik} = 2 \int_0^1 \frac{\partial^2 F(\ )}{\partial y_i' \partial y_k} (1 - \lambda)\, d\lambda;$$

$$\bar{c}_{ik} = 2 \int_0^1 \frac{\partial^2 F(\ )}{\partial y_i \partial y_k} (1 - \lambda)\, d\lambda,$$

und in ( ) das Argument: $x, y_1 + \lambda \eta_1, \cdots y_n + \lambda \eta_n;\ y_1' + \lambda \eta_n', \cdots y_n' + \lambda \eta_n'$ einzusetzen ist. Die m Bedingungsgleichungen für die η lassen sich analog in die Form bringen

$$(4^*) \quad \begin{cases} \bar{\omega}_k(\eta) = \sum_{i=1}^{n} (\bar{\alpha}_{ki} \eta_i' + \bar{\beta}_{ki} \eta_i) = 0 \qquad (i = 1, 2 \cdots m), \\[2ex] \bar{\alpha}_{ki} = \int_0^1 \frac{\partial \varphi_k(\ )}{\partial y_i'} d\lambda, \quad \bar{\beta}_{ki} = \int_0^1 \frac{\partial \varphi_k(\ )}{\partial y_i} d\lambda, \end{cases}$$

wo in ( ) wieder das obige Argument gehört. Wegen der Voraussetzungen in § 1, 1) sind die Grössen in (3*) und (4*) stetige Functionen der η und η', und daher ebenso wie diese stetige Functionen des x in ab. Mit unendlich klein werdenden η und η' gehen sie daher in die gleichen ungestrichenen Buchstaben von (3) und (4) über.

Die Analogie dieser Formeln mit denen in § 1, 2) führt wieder zu einem analogen accessorischen Systeme von Differentialgleichungen:

$$(5^*) \quad \bar{\psi}_i(z, r) = 0 \quad (i = 1, 2 \cdots n); \qquad \bar{\omega}_i(z) = 0 \quad (i = 1, 2 \cdots m),$$

das aus (5) erhalten wird, indem man darin die Buchstaben überstreicht. Dasselbe kann in gleicher Weise zur Transformation von ΔJ verwendet werden, wie (5) zu der von $\delta^2 J$: Besteht ein conjugirtes System von (5*) $((\bar{z}^k, \bar{\imath}^k))$ dessen Determinante in ab nicht verschwindet, so kann ΔJ in

$$\Delta J = \frac{1}{2}\int_a^b \sum_{i,k} \bar{a}_{ik}\bar{\xi}_i\bar{\xi}_k dx \tag{7*}$$

übergeführt werden, wo die $\bar{\xi}$ durch den analogen Ausdruck von (8) gegeben sind und den (9) analogen Gleichungen genügen. Ist daher überdies $\sum \bar{a}_{ik}\bar{\xi}_i\bar{\xi}_k$ nicht im ganzen Intervall ab Null und überall gleich bezeichnet, so hat auch ΔJ dieses Zeichen.

Diese Annahmen treffen nun für genügend kleine $|\eta|$ und $|\eta'|$ zu unter den Voraussetzungen, dass: 1) $\Delta(x, a)$ in § 1, 3) in $(a+0, b)$ nicht verschwindet und 2) die nothwendige Bedingung (10) erfüllt ist.

Die Richtigkeit dieser Behauptung ergiebt sich als Folge der beiden nachstehenden Bemerkungen.

§ 3.

1) Ist $\Phi(x, v_1, \cdots v_n)$ eine stetige Function der $x, v_1, \cdots v_n$ in einem homogenen Continuum ($\mathfrak{B}$), dem auch die Stellen $a \leqq x \leqq b$, $v_1 = 0, \cdots \cdots v_n = 0$ angehören und ist $\Phi(x, 0 \cdots 0)$ in ab nirgends Null, so besteht immer eine Zahl $\varepsilon < 0$, so dass auch $\Phi(x, v_1, \cdots v_n)$ nicht Null wird, für alle Punkte von ($\mathfrak{B}$), in denen $|v_1|, |v_2|, \cdots |v_n| < \varepsilon$ ist. Setzt man $v_k = \chi_k(x)$ $(k = 1, 2 \cdots n)$, einer in ab stetigen Function von x, so wird auch $\Phi(x, \chi_1(x), \cdots \chi_n(x))$ in ab nicht Null, wenn daselbst

$$|\chi_k(x)| < \varepsilon \quad (k = 1, 2 \cdots n)$$

bleibt.

Existirt insbesondere zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart, dass für alle $a \leqq x \leqq b$: $|\Phi(x, \chi_1(x) \cdots \chi_n(x)) - \Phi(x, 0 \cdots 0)| < \varepsilon$, sobald in ab überall $|\chi_k(x)| < \delta$ $(k = 1, 2 \cdots n)$ ist, und verschwindet die stetige Function von x: $\Phi(x, 0 \cdots 0)$ in ab nicht, so wird daselbst auch $\Phi(x, \chi_1(x) \cdots \chi_n(x))$ nicht Null, wenn δ unter einer von Null verschiedenen, oberen Grenze bleibt.

2) Es seien $f_k(x, w_1 \cdots w_m, y_1, \cdots y_n)$ $(k = 1, 2 \cdots n)$ sammt ihren ersten partiellen Ableitungen nach den w und y in einen homogenen Continuum ($\mathfrak{B}$), dem die Stellen $x_0, 0, \cdots 0, y_1^0, \cdots y_n^0$ und $x_0, w_1^0, \cdots w_n^0, Y_1^0, \cdots Y_n^0$ angehören, eindeutige stetige Functionen von $x, w_1, \cdots w_m, y_1, \cdots y_n$ und die in einer Umgebung von x_0 stetigen Functionen des x: $u_1, u_2, \cdots u_m$, die in x_0 bez. die Werthe $w_1^0, \cdots w_m^0$ annehmen, lägen in ($\mathfrak{B}$). Construirt

man dann — etwa nach der Cauchy-Picard'schen Methode — für das Normalsystem

$$\frac{dy_k}{dx} = f_k(x, 0, \cdots 0, y_1, \cdots y_n) \qquad (k = 1, 2 \cdots n)$$

aus $y_1^0, \cdots y_n^0$ und für

$$\frac{dY_k}{dx} = f_k(x_1, u_1, \cdots u_m; \; Y_1, \cdots Y_n) \quad (k = 1, 2 \cdots n)$$

aus $Y_1^0, \cdots Y_n^0$ als Anfangswerthen in x_0 die Lösungen, so wird, wenn $|Y_k^0 - y_k^0|$ $(k = 1, 2, \cdots n)$ und $|u_1|, |u_2|, \cdots |u_m| < \delta$ sind, in der beiden Lösungen gemeinsamen Umgebung von x_0, deren Radius h sei,

$$|Y_k^0 - y_k^0| < (e^{(n+m)M|x-x_0|} - 1)\,\delta < (e^{(n+m)Mh} - 1)\,\delta, \quad (k = 1, 2 \cdots n)$$

wo M eine positive Zahl bedeutet, nicht kleiner als die absoluten Beträge der ersten Derivirten der Functionen f_k nach den $w_1, \cdots w_m, y_1, \cdots y_n$ in $(\mathfrak{B})$. Wie die Formel lehrt, sind die $Y_1, Y_2, \cdots Y_n$ auch stetige Functionen der $w_1^0, w_2^0, \cdots w_n^0, u_1, u_2, \cdots u_n$ in $(\mathfrak{B})$.

Sind speciell die Differentialgleichungen linear, so kann für h das Intervall genommen werden, in dem die Coefficienten beider Gleichungen stetig nach x bleiben*).

§ 4.

1) Bildet man $R(\lambda)$ aus R (§ 1, 1)), indem man darin für a_{ii}: $a_{ii} - \lambda$ $(i = 1, 2 \cdots n)$ setzt, so hat bekanntlich die Gleichung $R(\lambda) = 0$ lauter reelle Wurzeln. Wenn diese (von Null verschieden und) gleich bezeichnet sind, aber auch nur dann ist die quadratische Form (10) an der betreffenden Stelle x definit, wobei sie das Zeichen der Wurzeln hat. Der absolute Betrag des Coefficienten von λ^{n-m}, des höchsten Gliedes der Gleichung: M^2 (§ 1, 1)) und ihr absolutes Glied $R(0) = R$ stehen in dem Zusammenhang, dass das erstere ohne das letztere nicht verschwindet. Da nach Voraussetzung dieses in ab nicht verschwindet, so wird daselbst auch jenes nicht Null. Sind in x die Zahlen μ und μ' bezüglich nicht kleiner als die absoluten Beträge der dem ersten nachfolgenden und dem letzten vorangehenden Coefficienten im nach fallenden Potenzen geordneten $R(\lambda)$, so liegen die absoluten Beträge der Wurzeln zwischen den Zahlen $\frac{|R|}{\mu' + |R|} < \frac{M^2 + \mu}{M^2}$. Ist daher r_0 das Minimum von $|R|$ und μ_0, jenes von M^2 in ab und behalten μ und μ' ihre Bedeutung für alle x in ab bei, so liegen die absoluten Beträge sämmtlicher Wurzeln von $R(\lambda) = 0$ für alle x von ab zwischen den Grenzen $\frac{r_0}{\mu' + r_0} < \frac{\mu_0 + \mu}{\mu_0}$, wo μ_0 und $r_0 > 0$ sind.

*) Picard, Traité t. III, p. 92.

Aendern sich in (10) die Coefficienten der quadratischen Form und der Bedingungsgleichungen stetig, so ist dies auch mit den Coefficienten der Gleichung $R(\lambda) = 0$ und daher auch mit ihren Wurzeln der Fall. War also die Form anfänglich definit, so wird sie bei dieser Aenderung mit demselben Zeichen definit bleiben, so lange keine Wurzel Null oder unendlich wird, somit, da m_0 nur mit r_0 verschwinden kann, gewiss so lange $R(0)$ nicht Null wird. Die sämmtlichen $\bar{a}_{ik}$ und $\bar{\alpha}_{ik}$ sind nun stetige Functionen der x, η und η', die für $\lim \eta = \lim \eta' = 0$ bez. in a_{ik} und α_{ik} übergehen. Bezeichnet daher $\bar{R}(0)$ die Determinante, die aus R entsteht, wenn darin die Buchstaben überstrichen werden, so existirt (§ 3, 1)), da R in ab nicht Null wird und $\bar{R}(0)$ stetig nach x, η und η' ist, ein $\delta' > 0$ derart, dass auch $\bar{R}(0)$ in ab nicht verschwindet, wenn $|\eta|$ und $|\eta'| < \delta'$ sind. Die quadratische Form in (7*) ist demnach für alle zulässigen η und η', welche dieser Bedingung genügen, definit vom selben Zeichen wie (10).

2) Da $\bar{R}(0)$ für jedes derartige Werthesystem der η und η', ebenso wie R, in ab nicht verschwindet, so haben die Systeme (5) und (5*) alle Eigenschaften gemein, die eine Folge dieser Voraussetzung sind.

Construirt man zu jeder Lösung (u^k, ϱ^k) des dem Punkte a conjugirten Systems $(\!(u^k, \varrho^k)\!)$ von (5) aus den gleichen Anfangswerthen in a die entsprechende $(\bar{u}^k, \bar{\varrho}^k)$ in (5*), so bilden diese ein a conjugirtes System in (5*); analog erhält man zu dem b conjugirten Systeme $(\!(w^k, \sigma^k)\!)$ in (5) ein b conjugirtes System $(\!(\bar{w}^k, \bar{\sigma}^k)\!)$ in (5*). Da $\Delta(x, a)$ nach Voraussetzung (2) in b nicht Null ist, so sind die Systeme $(\!(u^k, \varrho^k)\!)$ und $(\!(w^k, \sigma^k)\!)$ linear unabhängig. Es lassen sich daher die Constanten γ in

$$v^k = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^k w^i, \quad r^k = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^k \sigma^i$$

gemäss den Gleichungen

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \gamma_\lambda^k \psi(w^\lambda, \sigma^\lambda;\, u^i, \varrho^i) = 0, \qquad \sum_{\lambda=1}^{n} \gamma_\lambda^k \psi(w^\lambda, \sigma^\lambda;\, u^{n+1-k}, \varrho^{n+1-k}) = c_{n+1-k}$$

$$(i = 1, \cdots (n-k)),\ (n-k+2) \cdots n),$$

wo c_{n+1-k} eine beliebige von Null verschiedene Zahl ist, für $k = 1, 2 \cdots n$ bestimmen, da die Determinante $\left|\psi(w^k, \sigma^k;\, u^i, \varrho^i)\right|_{i=1,2,\cdots n}^{k=1,2\cdots n}$ des Gleichungssystems, die von x unabhängig ist, nicht verschwindet*). Die beiden Systeme $(\!(u^k, \varrho^k)\!)$ und $(\!(v^k, r^k)\!)$ bilden zusammen ein involutorisches Fundamentalsystem*), denn es ist (u^k, ϱ^k) ausser zu (v^{n+1-k}, r^{n+1-k}) zu jeder anderen unter

*) Mitt. II, XV, pag. 1301—1307.

den $2n$ Lösungen conjugirt.*) Es lassen sich dann (von Null verschiedene) nur den Zeichen nach bedingte Zahlen $\mu_1, \mu_2, \cdots \mu_n$ bestimmen, so dass die Determinante des conjugirten Systems

$$(\!(z^k = v^k + \mu_k u^{n-k+1};\ \mathfrak{r}^k = r^k + \mu_k \varrho^{n-k+1})\!)$$

in ab nicht verschwindet.**)

Da $|\eta|$ und $|\eta'| < \delta'$ in ab und die Differentialgleichungen (5) und (5*) linear sind, so wird in ab (§ 3, 2)) $|\bar{u}^k - u^k|$ und $|\bar{v}^k - v^k|$ $(k = 1, 2 \cdots n)$ $< \nu\delta'$, wo ν eine bestimmte Zahl bedeutet. Nimmt man δ' genügend klein, so wird, da $\Delta(x, a) = \Delta(u^1, u^2, \cdots u^n)$ in b nicht Null ist, daselbst auch $\Delta(\bar{u}^1, \bar{u}^2, \cdots \bar{u}^n)$ nicht Null sein und es werden also die Systeme $(\!(\bar{u}^k, \bar{\varrho}^k)\!)$ und $(\!(\bar{w}^k, \bar{\sigma}^k)\!)$ linear unabhängig sein. Es lassen sich sonach, wenn mit $\bar{\psi}$ das Analogon zu (6) im Systeme (5*) bezeichnet wird, die $\bar{\gamma}$ in

$$\bar{v}^k = \sum_{i=1}^{n} \bar{\gamma}_i^k \bar{w}^i,\ \ \bar{r}^k = \sum_{i=1}^{n} \bar{\gamma}_i^k \bar{\sigma}^i$$

aus den Gleichungen

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \bar{\gamma}_\lambda^k \bar{\psi}(\bar{w}^\lambda, \bar{\sigma}^\lambda;\ \bar{u}^i, \bar{\varrho}^i) = 0, \qquad \sum_{\lambda=1}^{n} \bar{\gamma}_\lambda^k \bar{\psi}(\bar{w}^\lambda, \bar{\sigma}^\lambda;\ \bar{u}^{n+1-k}, \bar{\varrho}^{n+1-k}) = c_{n+1-k}$$

$$(i = 1, \cdots n-k, n-k+2, \cdots n)$$

für $k = 1, 2, \cdots n$ bestimmen. Die beiden Systeme $(\!(\bar{u}^k, \bar{\varrho}^k)\!)$ und $(\!(\bar{v}^k, \bar{r}^k)\!)$ bilden dann wieder ein involutorisches Fundamentalsystem, aus dem man das conjugirte System $(\!(\bar{z}^k = \bar{v}^k + \mu_k \bar{u}^{n+1-k},\ \bar{\mathfrak{r}}^k = \bar{r}^k + \mu_k \bar{\varrho}^{n+1-k})\!)$ herstellt. In dem jetzt angenommenen homogenen Continuum der x, η und η', dem die Stellen $a \leqq x \leqq b$, $\eta = \eta' = 0$ angehören, sind die $\bar{u}^k, \bar{\varrho}^k, \bar{w}^k, \bar{\sigma}^k, \bar{\gamma}_i^k$ und daher auch $\bar{z}^k, \bar{\mathfrak{r}}^k$ stetige Functionen von x, η und η', die mit unendlich klein werdenden η und η' bez. in $u^k, \varrho^k, w^k, \sigma^k, \gamma_i^k, z^k, \bar{\mathfrak{r}}^k$ übergehen. Die in diesem Continuum somit nach x, η und η' stetige Function $\Delta(\bar{z}^1, \bar{z}^2, \cdots \bar{z}^n)$ geht für $\eta = \eta' = 0$ in $\Delta(z^1, z^2, \cdots z^n)$ über, die in ab nirgends verschwindet. Sonach besteht nach § 3, 1) ein $\delta'' > 0$, derart, dass für alle Punkte des Continuums, für welche $|\eta|$ und $|\eta'| < \delta''$ ist, $\Delta(\bar{z}^1, \bar{z}^2, \cdots \bar{z}^n)$ in ab nicht Null wird.

Es besteht somit unter den Voraussetzungen in § 1, 1) und § 2 ein $\delta > 0$ derart, dass für alle zulässigen η und η', deren absolute Beträge kleiner als δ in ab bleiben: 1) ΔJ in die reducirte Form (7*) übergeführt

---

*) Mitt. II, pag. 1307—1309.

**) Mitt. III, pag. 1412, XIX.

werden kann und 2) die quadratische Form $\sum_{i,k} \bar{a}_{ik} \bar{\xi}_i \bar{\xi}_k$ definit vom selben Zeichen ist. ΔJ hat sonach für diese η und η' immer dasselbe Zeichen.

Die Erörterungen in § 2 und § 4, 1 führen noch zu folgender Bemerkung, die mit dem eben bewiesenen Satze eng zusammenhängt:

Ist im homogenen Continuum ($\mathfrak{C}$) (§ 1, 1)) ein zweites ($\mathfrak{C}'$) enthalten, dem die Curve (C) sammt den $y_1', y_2', \cdots y_n'$ längs derselben angehören und verschwindet darin weder $\bar{R}(0)$ noch $\Delta(\bar{u}^1, \bar{u}^2, \cdots \bar{u}^n)$, die Determinante des a conjugirten Systems in (5*), so hat ΔJ für alle zulässigen Variationen $\eta_1 \cdots \eta_n$, $\eta_1' \cdots \eta_n'$, welche bez. die $y_1 \cdots y_n$, $y_1' \cdots y_n'$ von (C) in Punkte von ($\mathfrak{C}'$) ändern, dasselbe Zeichen.

De formae, in quam geometra britannicus Hamilton integralia mechanices analyticae redegit, origine genuina.

Auctore FERDINANDO MINDING.*)

Ex quo celeberrimum ac certe sagacissimum Hamiltonii inventum geometris innotuit, statim Jacobi ejus excolendi atque augendi curam suscepit, quem paulo post alii insignes geometrae secuti sunt, inter quos hoc loco inprimis juvat in memoriam revocare Petropolitanum Ostrogradsky, quem nuper praematura morte abreptum dolemus. Hi omnes inventum Hamiltonianum latius extendere aliisque quaestionibus, quae primo saltem adspectu a proposita longe remotae esse videbantur, adaptare tanto successu conati sunt, ut methodi quae nunc ad tractanda problemata analytico-mechanica nec non in aliis analyseos sublimioris partibus huic generi affinibus usu veniunt, generalitate ac elegantia cum aetate prioribus comparari nequeant.

Sed quo latius patet campus investigationum ab inventis Hamiltonianis proficiscentium, tanto magis necessarium est principia quibus inventa illa

*) Den Wiederabdruck dieser Abhandlung rechtfertigt der bedeutsame Inhalt, der zu den für die moderne analytische Mechanik fundamentalen Untersuchungen von Lipschitz und Beltrami in nächster Beziehung steht. S. Schlömilch's Ztschr. Bd. 45 hist.-litter. Abth. S. 118. Die Abhandlung ist als Gratulationsschrift der Universität Dorpat für die Sternwarte Pulkowa erschienen, aber wie es scheint bis jetzt unbekannt geblieben. Sie trägt den Titel: Imperiali speculae astronomicae Pulcoviensi a. d. VII id. Aug. a. MDCCCLXIV quintum lustrum exactum celebranti gratulatur Universitas literarum Caesarea Dorpatensis. Inest Ferdinandi Mindingii disquisitio de formae, in quam geometra britannicus Hamilton integralia mechanices analyticae redegit, origine genuina. Dorpati Livonorum. Typis C. Mattiesenii. MDCCCLXIV. Sodann folgt eine Widmung: Speculae in Rossia primariae quinque lustra feliciter peracta congratulantes et Deum Optimum Maximum sospitet eam ac prosperet in perpetuum promovendae ut scientiae naviter pergat inservire maxima huius imperii generisque humani cum utilitate comprecantes studii oservantiaeque documentum hasce pagellas misimus Universitatis Literarum Dorpatensis Rector et Senatus.

A. Kneser.

nituntur, omni cura perscrutari, quae in eis latent inter se diversa, probe distinguere et quae in disquisitionum continuatione permixta occurrunt, in stabiliendis fundamentis segregare. Quoniam igitur praesens quaestio cum e calculo sublimiori tum e legibus mechanices pendeat, operae pretium erit, quid priori, quid alteri parti debeatur, dignoscere. Qua cogitatione motus cum recenti tempore omni studio in id incubuissem, ut primaria theoremata Hamiltoniana ad propositiones algebraicas quantum fieri posset simplicissimas revocarem, non dubitavi praesentem occasionem capessere fontemque monstrare quem illis derivandis aperuisse mihi visus sum. Attamen urgente jam tempore primaria tantum disquisitionis meae momenta succincte exposuisse hoc loco satis habebo.

Ponamus ex argumentis variabilibus $p_1 p_2 \cdots p_n$ eorumque differentialibus conflatum esse aggregatum hujusmodi, quod cum quantitatem repraesentet infinite parvam secundi ordinis, adscito novo argumento t, symbolo Ωdt^2 designare convenit, puta:

$$\text{I.}\quad \Omega dt^2 = E_{1\cdot 1} dp_1^2 + 2E_{1\cdot 2} dp_1 dp_2 + E_{2\cdot 2} dp_2^2 + 2E_{1\cdot 3} dp_1 dp_3 \\ + 2E_{2\cdot 3} dp_2 dp_3 + E_{3\cdot 3} dp_3^2 + 2E_{1\cdot 4} dp_1 dp_4 + \cdots + E_{n\cdot n} dp_n^2,$$

in quo factores litera E denotati dato modo ex argumentis p formati concipiantur. Aggregatum Ω essentialiter positivum esse suppono, sive ita comparatum, ut neque negativum evadere neque in nihilum abire possit, quicunque valores reales quantitatibus $\frac{dp_1}{dt}\,\frac{dp_2}{dt}\cdots\frac{dp_n}{dt}$ pro lubitu attribuantur, dum argumenta p vel omnino, vel saltem intra certos limites, prout fert natura problematum, arbitrarios valores induant.

His praemissis statim propero ad enuntiandum theorema in praesenti quaestione fundamentale hoc:

> Aggregatum signo Ωdt^2 denotatum revocari potest ad summam n quadratorum, $n-1$ quantitates constantes arbitrarias involventium, et quidem ita ut unum e dictis quadratis radicem habeat immediate integrabilem.

Theorema propositum formula sequente exhibetur:

$$\text{II.}\quad \begin{aligned} \Omega dt^2 = dV^2 &+ (C_{1\cdot 1} dp_1 + C_{1\cdot 2} dp_2 + C_{1\cdot 3} dp_3 + \cdots + C_{1\cdot n} dp_n)^2 \\ &+ (C_{2\cdot 2} dp_2 + C_{2\cdot 3} dp_3 + \cdots + C_{2\cdot n} dp_n)^2 \\ &+ (C_{3\cdot 3} dp_3 + C_{3\cdot 4} dp_4 + \cdots + C_{3\cdot n} dp_n)^2 \\ &+ \cdots\cdots\cdots \\ &+ \cdots\cdots\cdots \\ &+ (C_{n-1\cdot n-1} dp_{n-1} + C_{n-1\cdot n} dp_n)^2, \end{aligned}$$

in qua literae C diversis indicibus auctae nec non V functiones argumentorum p repraesentant, in quibus determinandis quaestio tota versatur.

Sit brevitatis gratia $\frac{dV}{dp_1} = v_1, \cdots$ generaliter $\frac{dV}{dp_\mu} = v_\mu$, ideoque

$$dV = v_1\,dp_1 + v_2\,dp_2 + \cdots + v_n\,dp_n.$$

Jam patet comparata forma data I. cum proposita II. prodire conditiones sequentes

$$\begin{aligned}
&E_{1\cdot1} - v_1^2 = C_{1\cdot1}^2, \quad E_{1\cdot2} - v_1v_2 = C_{1\cdot1}C_{1\cdot2}, \cdots E_{1\cdot n} - v_1v_n = C_{1\cdot1}C_{1\cdot n},\\
&E_{2\cdot2} - v_2^2 = C_{1\cdot2}^2 + C_{2\cdot2}^2, \quad E_{2\cdot3} - v_2v_3 = C_{1\cdot2}C_{1\cdot3} + C_{2\cdot2}C_{2\cdot3}, \cdots\\
&E_{3\cdot3} - v_3^2 = C_{1\cdot3}^2 + C_{2\cdot3}^2 + C_{3\cdot3}^2, \quad E_{3\cdot4} - v_3v_4 = C_{1\cdot3}C_{1\cdot4} + C_{2\cdot3}C_{2\cdot4}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + C_{3\cdot3}C_{3\cdot4},
\end{aligned}$$

quibus continuatis tandem pervenitur ad has:

$$\begin{gathered}
E_{n-1\cdot n} - v_{n-1}v_n = C_{1\cdot n-1}C_{1\cdot n} + C_{2\cdot n-1}C_{2\cdot n} + \cdots + C_{n-1\cdot n-1}C_{n\cdot n-1},\\
E_{n\cdot n} - v_n^2 = C_{1\cdot n}^2 + C_{2\cdot n}^2 + \cdots + C_{n-1\cdot n}^2.
\end{gathered}$$

Generaliter habemus:

III. $$E_{\mu\cdot\nu} - v_\mu v_\nu = C_{1\cdot\mu}C_{1\cdot\nu} + C_{2\cdot\mu}C_{2\cdot\nu} + \cdots + C_{\mu\cdot\mu}C_{\mu\cdot\nu},$$

siquidem $\mu < \nu$ vel $\mu = \nu$ esse concipitur.

Ex aequationibus propositis, quarum numerus est $\frac{n(n+1)}{2}$, facile eliminantur incognitae C, numero $\frac{n(n+1)}{2} - 1$; quo facto pervenitur ad aequationem differentialem partialem primi ordinis determinando V inservientem.

Quem in finem ex elementis E primo loco formetur complexus signo $\Delta(E_{\mu\cdot\nu})$ denotandus, quem determinantem hodierni mathematici appellare solent. Statuamus igitur:

IV. $$\Delta(E_{\mu\cdot\nu}) = \begin{vmatrix} E_{1\cdot1} & E_{1\cdot2} & E_{1\cdot3} & \cdots & E_{1\cdot n}\\ E_{1\cdot2} & E_{2\cdot2} & E_{2\cdot3} & \cdots & E_{2\cdot n}\\ E_{1\cdot3} & E_{2\cdot3} & E_{3\cdot3} & \cdots & E_{3\cdot n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\\ E_{1\cdot n} & E_{2\cdot n} & E_{3\cdot n} & \cdots & E_{n\cdot n} \end{vmatrix},$$

qui complexus, manifesto symmetricus quoniam $E_{\mu\cdot\nu} = E_{\nu\cdot\mu}$, substituto $E_{\mu\cdot\nu} - v_\mu v_\nu$ in locum $E_{\mu\cdot\nu}$ abit in sequentem:

$$\Delta(E_{\mu\cdot\nu} - v_\mu v_\nu) = \Delta',$$

quem introductis valoribus argumentorum $E_{\mu\cdot\nu} - v_\mu v_\nu$ ex aequationibus III. prodeuntibus facile intelligitur in nihilum abire. Quod, cum brevitati consulendum sit, simplici exemplo proposito sufficienter probabitur. Igitur si $n = 4$, complexus Δ' sequenti tabula repraesentatur, in qua pro $C_{\mu\cdot\nu}$ compendii causa simpliciter $(\mu\cdot\nu)$ scripsimus:

$$\begin{array}{llll}
(1\cdot1)(1\cdot1) & (1\cdot1)(1\cdot2)\cdot\quad\cdot & (1\cdot1)(1\cdot3)\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot & (1\cdot1)(1\cdot4)\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\
(1\cdot1)(1\cdot2) & (1\cdot2)(1\cdot2)+(2\cdot2)(2\cdot2) & (1\cdot2)(1\cdot3)+(2\cdot2)(2\cdot3)\cdot\quad\cdot & (1\cdot2)(1\cdot4)+(2\cdot2)(2\cdot4)\cdot\quad\cdot \\
(1\cdot1)(1\cdot3) & (1\cdot2)(1\cdot3)+(2\cdot2)(2\cdot3) & (1\cdot3)(1\cdot3)+(2\cdot3)(2\cdot3)+(3\cdot3)(3\cdot3) & (1\cdot3)(1\cdot4)+(2\cdot3)(2\cdot4)+(3\cdot3)(3\cdot4) \\
(1\cdot1)(1\cdot4) & (1\cdot2)(1\cdot4)+(2\cdot2)(2\cdot4) & (1\cdot3)(1\cdot4)+(2\cdot3)(2\cdot4)+(3\cdot3)(3\cdot4) & (1\cdot4)(1\cdot4)+(2\cdot4)(2\cdot4)+(3\cdot4)(3\cdot4)
\end{array}$$

quem complexum ad nihilum redire lector peritus facile intelliget eandemque conclusionem generaliter valere perspiciet.

Ita eliminatis omnibus C delati sumus ad aequationem $\Delta' = 0$, sive

$$\text{V.} \qquad \Delta' = \begin{vmatrix} E_{1\cdot1} - v_1^2 & E_{1\cdot2} - v_1 v_2 & \cdots & E_{1\cdot n} - v_1 v_n \\ E_{1\cdot2} - v_1 v_2 & E_{2\cdot2} - v_2^2 & \cdots & E_{2\cdot n} - v_2 v_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ E_{1\cdot n} - v_1 v_n & E_{2\cdot n} - v_2 v_n & \cdots & E_{n\cdot n} - v_n^2 \end{vmatrix} = 0,$$

quae relationem inter differentialia partialia functionis V atque argumenta p intercedentem sistit, qua ad determinandum V utendum erit.

Ponamus solutionem completam hujus aequationis innotuisse, quae igitur n quantitates constantes arbitrarias secum feret, quarum tamen una non nisi additione ad valorem V accedit, ita ut dV $n-1$ quantitates constantes arbitrarias $\alpha_1\, \alpha_2 \cdots \alpha_{n-1}$ involvat.

His concessis reliquae incognitae C alia post aliam statim determinantur; fit enim ex aequationibus III.

$$C_{1\cdot1}^2 = E_{1\cdot1} - v_1^2, \quad C_{1\cdot2} = \frac{E_{1\cdot2} - v_1 v_2}{C_{1\cdot1}}, \cdots$$
$$C_{2\cdot2}^2 = E_{2\cdot2} - v_2^2 - C_{1\cdot1}^2, \cdots$$

nec superfluum est monere, etiam signorum in formula II. nullam occurrere ambiguitatem, quippe quam adjunctis deinceps in singulis terminis et in factorum et in divisorum loco quantitatibus $C_{1\cdot1}^2$, $C_{2\cdot2}^2$, $C_{3\cdot3}^2 \cdots$ ita scribere licet:

$$\Omega\, dt^2 = dV^2 + \frac{(C_{1\cdot1}^2\, dp_1 + C_{1\cdot1} C_{1\cdot2}\, dp_2 + \cdots + C_{1\cdot1} C_{1\cdot n}\, dp_n)^2}{C_{1\cdot1}^2}$$
$$+ \frac{(C_{2\cdot2}^2\, dp_2 + \cdots + C_{2\cdot2} C_{2\cdot n}\, dp_n)^2}{C_{2\cdot2}^2}$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$+ \frac{(C_{n-1\cdot n-1}^2\, dp_{n-1} + C_{n-1\cdot n-1} C_{n-1\cdot n}\, dp_n)^2}{C_{n-1,n-1}^2},$$

unde dato V ad determinandas reliquas incognitas nulla amplius radicum extractione opus esse perspicitur.

Nunc stabilito theoremate fundamentali consideremus complexum Δ' in aequatione V. ob oculos positum. Quem si secundum potestates et producta argumentorum $v_1\, v_2 \cdots v_n$ evolvimus, primum patet terminos

imparis ordinis omnino abesse, deinde facile intelligitur omnes terminos ordinis quarti aut quarto altioris in nihilum abire, ita ut praeter primum terminum Δ_0 (quem hucusque symbolo $\Delta(E_{\mu\cdot\nu})$ denotatum formula IV. exhibet) aggregatum non nisi secundi ordinis restet, quod abhinc signo $-\Delta_2$ repraesentabimus. Quo pacto aequatio V. fit

VI. $$\Delta' = \Delta_0 - \Delta_2 = 0.$$

Ut evolutio aggregati Δ_2 commode instituatur, designetur symbolo $\Delta[-\mu, -\nu]$ complexus determinans is qui oritur, si e complexu Δ_0 terminos $\mu^{\underline{tae}}$ lineae horizontalis una cum terminis $\nu^{\underline{tae}}$ lineae verticalis elidimus. Manifesto propter symmetricam conformationem complexus Δ_0 directiones horizontales et verticales inter se commutare licet, unde habetur $\Delta[-\mu, -\nu] = \Delta[-\nu, -\mu]$. Ita posito $n = 3$, erit

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} E_{1\cdot 1} & E_{1\cdot 2} & E_{1\cdot 3} \\ E_{1\cdot 2} & E_{2\cdot 2} & E_{2\cdot 3} \\ E_{1\cdot 3} & E_{2\cdot 3} & E_{3\cdot 3} \end{vmatrix},$$

$$\Delta[-2, -3] = \Delta[-3, -2] = \begin{vmatrix} E_{1\cdot 1} & E_{1\cdot 2} \\ E_{1\cdot 3} & E_{2\cdot 3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_{1\cdot 1} & E_{1\cdot 3} \\ E_{1\cdot 2} & E_{2\cdot 3} \end{vmatrix}.$$

Quo scribendi compendio utentes facile nanciscimur evolutionem quaesitam hanc:

VII. $$\Delta_2 = \Sigma(-1)^{\mu+\nu} v_\mu v_\nu \Delta[-\mu, -\nu],$$

in qua summatio indicata omnes combinationes numerorum μ et ν, e serie $1\ 2\ 3 \cdots n$ depromendorum, etiam mutati ordinis ratione habita, complectitur. Qua de causa si aggregatum Δ_2 bifariam ita distribuimus, ut in priori parte colligantur omnes termini, in quibus $\mu = \nu$, in altera ii quorum indices inter se differunt, termini posterioris partis omnes factore 2 affecti prodibunt, itaque erit:

$$\begin{aligned} \Delta_2 = {} & v_1^2\Delta[-1,-1] + v_2^2\Delta[-2,-2] + \cdots + v_n^2\Delta[-n,-n] \\ & -2v_1v_2\Delta[-1,-2] + 2v_1v_3\Delta[-1,-3] \cdots - (-1)^n 2v_1v_n\Delta[-1,-n] \\ & -2v_2v_3\Delta[-2,-3] \quad \cdots\cdots\cdots + (-1)^n 2v_2v_n\Delta[-2,-n] \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & \qquad\qquad -2v_{n-1}v_n\Delta[-(n-1), -n]. \end{aligned}$$

Hinc porro deducimus

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d\Delta_2}{dv_\mu} = (-1)^\mu \{ & -v_1\Delta[-1,-\mu] + v_2\Delta[-2,-\mu] \cdots + (-1)^\mu v_\mu \Delta[-\mu,-\mu] \\ & \cdots + (-1)^n v_n \Delta[-\mu,-n] \} \end{aligned}$$

sive quod idem est

$$\text{VIII.}\qquad \frac{1}{2}\,\frac{d\Delta_2}{dv_\mu}=\begin{vmatrix} E_{1\cdot1} & E_{1\cdot2}\cdots E_{1\cdot\mu-1} & v_1 & E_{1\cdot\mu+1}\cdots E_{1\cdot n}\\ E_{1\cdot1} & E_{2\cdot2}\cdots E_{2\cdot\mu-1} & v_2 & E_{1\cdot\mu+1}\cdots E_{2\cdot n}\\ E_{1\cdot3} & E_{2\cdot3}\cdots E_{3\cdot\mu-1} & v_3 & E_{3\cdot\mu+1}\cdots E_{3\cdot n}\\ \cdot & \cdot\quad\cdot\quad\cdot & \cdot & \cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ \cdot & \cdot\quad\cdot\quad\cdot & \cdot & \cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ E_{1\cdot n} & E_{2\cdot n}\cdots E_{\mu-1\cdot n} & v_n & E_{\mu+1\cdot n}\cdots E_{n\cdot n}\end{vmatrix}.$$

Ponamus in aequatione I. omnibus E adjungi factorem communem F ideoque Ω transire in $F\cdot\Omega$; tunc manifesto Δ_0 mutatur in $F^n\cdot\Delta_0$, nec non Δ_2 in $F^{n-1}\cdot\Delta_2$; unde aequatio VI. abit in hanc:

$$F^n\cdot\Delta_0-F^{n-1}\cdot\Delta_2=0,$$

sive rejecto factore F^{n-1},

$$\text{IX.}\qquad F\cdot\Delta_0-\Delta_2=0.$$

Jam ad conclusiones quasdam e praecedentibus colligendas convertamur.

Aequatio II. quamquam prorsus idem quod I. aggregatum repraesentans, nihilominus a dextra parte quantitates constantes arbitrarias $\alpha_1\,\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}$ involvit, quae sinistrae parti sive formae primitivae aggregati Ω omnino desunt. Unde patet partem dextram mutatis his constantibus nullum incrementum capere posse, sive ejus differentiale e mutatione uniuscujusque dictarum constantium (quam litera α simpliciter denotamus) necessario evanescere. Ita differentiando secundum α obtinemus:

$$0=dV\cdot d\,\frac{dV}{d\alpha}+(C_{1\cdot1}\,dp_1+\cdots+C_{1\cdot n}dp_n)\left(\frac{dC_{1\cdot1}}{d\alpha}\,dp_1+\cdots+\frac{dC_{1\cdot n}}{d\alpha}\,dp_n\right)$$
$$+\;\cdot$$

Verumtamen ut scriptionem formulae satis prolixae contrahamus, commodioribus notationibus utemur. Ponamus

$$\text{X.}\qquad \begin{aligned} C_{1\cdot1}\,dp_1+C_{1\cdot2}\,dp_2+\cdots+C_{1\cdot n}\,dp_n&=L_1\,dt\\ C_{2\cdot2}\,dp_2+\cdots+C_{2\cdot n}\,dp_n&=L_2\,dt\\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{aligned}$$

vel generaliter:

$$C_{\mu\cdot\mu}\,dp_\mu+C_{\mu\cdot\mu+1}\,dp_{\mu+1}+\cdots+C_{\mu\cdot n}\,dp_n=L_\mu\,dt,$$

quo pacto aggregatum II. hanc speciem induit:

$$\Omega\,dt^2=dV^2+(L_1^2+L_2^2+\cdots+L_{n-1}^2)\,dt^2$$

ejusque differentiale e mutato α oriundum fit:

$$\text{XI.}\qquad 0=dV\,d\,\frac{dV}{d\alpha}+\left(L_1\,\frac{dL_1}{d\alpha}+L_2\,\frac{dL_2}{d\alpha}+\cdots+L_{n-1}\,\frac{dL_{n-1}}{d\alpha}\right)dt^2.$$

Nihil impedit quominus supponamus, inter argumenta $p_1 p_2 \cdots p_n$ hucusque prorsus inter se independentia subsistere aequationes differentiales sequentes:

$$\text{XII.} \qquad L_1 = 0, \; L_2 = 0, \cdots L_{n-1} = 0;$$

qua ex suppositione sequitur

$$\Omega\, dt^2 = d V^2 \text{ nec non } d V \cdot d \frac{d V}{d \alpha} = 0.$$

Aequatio prior docet dV non evanescere, cum ex hypothesi nostra Ω vi aequationum XII. in nihilum abire nequeat; unde ex altera aequatione colligitur:

$$d \frac{d V}{d \alpha} = 0.$$

Quae conclusio cum ad omnes constantes α aeque pertineat, docet e systemate XII. $n - 1$ aequationum differentialium necessario consequi alterum systema totidem aequationum differentialium, puta

$$\text{XIII.} \qquad d \frac{d V}{d \alpha_1} = 0, \; d \frac{d V}{d \alpha_2} = 0, \cdots d \frac{d V}{d \alpha_{n-1}} = 0,$$

quod igitur easdem quas systema XII. relationes inter differentialia $dp_1\, dp_2 \cdots dp_n$ sistet, ita ut alterum systema alteri plene aequipolleat. Unde colliguntur utriusque systematis integralia haec, in quibus novas constantes litera β denotamus:

$$\text{XIV.} \qquad \frac{d V}{d \alpha_1} = \beta_1, \; \frac{d V}{d \alpha_2} = \beta_2, \cdots \frac{d V}{d \alpha_{n-1}} = \beta_{n-1}.$$

Statuamus datum aggregatum Ω continere constantem quandam quantitatem indeterminatam h, quae igitur ut in sinistra, ita etiam in dextra parte aequationis II. aderit. Quae si secundum h differentiatur, prodit:

$$\frac{1}{2} \frac{d \Omega}{d h} \cdot dt^2 = d V \cdot d \frac{d V}{d h} + \left(L_1 \frac{d L_1}{d h} + \cdots \right) dt^2,$$

sive iterum admissis conditionibus XII.

$$\frac{1}{2} \frac{d \Omega}{d h} dt^2 = d V \cdot d \frac{d V}{d h},$$

unde accedente aequatione

$$d V = \sqrt{\Omega} \cdot dt$$

colligitur:

$$\frac{1}{2 \sqrt{\Omega}} \frac{d \Omega}{d h} dt = d \frac{d V}{d h},$$

sive

$$\text{XV.} \qquad \frac{d \sqrt{\Omega}}{d h} dt = d \frac{d V}{d h}.$$

Jam redeamus ad casum supra memoratum, quo aggregati Ω elementa E omnia factore communi F aucta esse supponebamus. Quo in casu cum Ω transeat in $F \cdot \Omega$, praecedens aequatio fit:

XVI. $$\frac{d\sqrt{F \cdot \Omega}}{dh}\, dt = d\,\frac{dV}{dh}$$

ubi probe notandum, V non amplius ex aequatione VI., sed ex aequatione IX., quae praesenti casui convenit, derivandum esse.

Denique si constans h non in Ω, sed in factore F solo occurit, ex aequatione XVI. obtinemus:

$$\sqrt{\Omega} \cdot \frac{d\sqrt{F}}{dh}\, dt = d\,\frac{dV}{dh}$$

sive

XVII. $$\frac{\sqrt{\Omega}}{2\sqrt{F}} \cdot \frac{dF}{dh}\, dt = d\,\frac{dV}{dh}.$$

His omnibus quam arcte connexa sit doctrina Hamiltoniana, lectorem fugere nequit. Nihilominus quaestionem attentione dignissimam accuratius examinasse juvabit.

Proposito problemate mechanico ejus naturae, ut vires corpora accelerantes functionem potentialem admittant, concipiamus coordinatas argumentis $p_1 p_2 \cdots p_n$ ita expressas esse, ut conditiones systematis, si quae adsunt, nulla inter argumenta p relatione interposita intactae serventur. Designet more consueto t tempus, $U+h$ functionem potentialem constante h auctam, T vim vivam systematis, ponatur insuper compendii causa

$$\frac{dp_1}{dt} = q_1,\ \frac{dp_2}{dt} = q_2, \cdots \frac{dp_n}{dt} = q_n$$

ideoque

$$T = \frac{1}{2}(E_{1\cdot 1}q_1^2 + 2E_{1\cdot 2}q_1 q_2 + E_{2\cdot 2}q_2^2 + \cdots + E_{n\cdot n}q_n^2)$$

sive

$$T\,dt^2 = \frac{1}{2}\,\Omega.$$

His statutis obtinemus accito factore

$$F = 2(U+h)$$

aggregatum

$$F\Omega = 4(U+h)T\,dt^2 = 2(U+h)\,(E_{1\cdot 1}\,dp_1^2 + \cdots + E_{n\cdot n}\,dp_n^2),$$

quod transformationibus supra explicatis subjectum ad aequationes Hamiltonianas perducit.

Data enim solutione completa V aequationis differentialis partialis

$$\Delta = 2(U+h)\,\Delta_0 - \Delta_2 = 0,$$

secundum praecedentia datur etiam producti $4(U+h)T$ transformatio plane identica

$$4(U+h)T=\left(\frac{dV}{dt}\right)^2+L_1^2+L_2^2+\cdots+L_{n-1}^2,$$

qua aequationum differentialium $L_1=0,\ L_2=0,\cdots L_{n-1}=0$ integralia exhibentur in forma $\frac{dV}{d\alpha_1}=\beta_1,\cdots\frac{dV}{d\alpha_{n-1}}=\beta_{n-1}$.

Ex iisdem aequationibus differentialibus etiam sequitur:

$$\frac{dV}{dt}=2\sqrt{(U+h)T}.$$

Insuper e formula XVII., quae posito $F=2(U+h)$ nec non $\Omega=2Tdt^2$ praesenti casui convenit, elicitur:

$$\frac{\sqrt{2T}}{2\sqrt{2U+2h}}\cdot\frac{d(2U+2h)}{dh}=\frac{d\left(\frac{dV}{dh}\right)}{dt}$$

sive

XVIII. $$\sqrt{\frac{T}{U+h}}=\frac{d\left(\frac{dV}{dh}\right)}{dt}.$$

Aequationes hucusque inventae sunt merae transformationes algebraicae, quas lex virium vivarum nullo modo attingit, cujus adsciscendi nunc demum occasio praebetur. Statuamus igitur dicta e lege mechanica

$$T=U+h,$$

unde videmus prodire aequationem

$$\frac{d\left(\frac{dV}{dh}\right)}{dt}=1$$

integrale notum

XIX. $$\frac{dV}{dh}=t+\tau,$$

quod reliquum erat, suppeditantem.

His adjungenda est relatio

$$\frac{dV}{dt}=2\sqrt{(U+h)T},$$

quae ex hypothesi $T=U+h$ abit in

XX. $$\frac{dV}{dt}=2T=2(U+h)$$

sive

$$V=2\int T\,dt=2\int(U+h)\,dt.$$

Ita delati sumus ad definitionem primitivam functionis characteristicae V, cui Hamilton disquisitiones suas superstruxit et qua vim vivam systematis accumulatam (vel potius secundum usum hodiernum et re vera commodiorem duplicem vim vivam acc.) repraesentari monuit. Huc igitur progressi finem nostro scripto imponere lectoremque ad opera laudati auctoris ejusque successorum delegare possemus. Sed ne quid desideretur quod ad principia doctrinae de qua agitur, attinet, restat ut monstremus quomodo e praecedentibus, eliminatis constantibus $\alpha_1\, \alpha_2 \cdots \alpha_{n-1}$, prodeant aequationes differentiales secundi ordinis, a quibus solutio problematum mechanicorum proficiscitur. Nam in praesenti quaestione, in qua functio V ex aequatione differentiali partiali eruta supponitur, aequationes differentiales secundi ordinis quasi inverso decursu ultimo tandem loco post integralia prima et secunda obviam fiunt.

Cum sit

$$\frac{dV}{dt} = v_1 q_1 + v_2 q_2 + \cdots + v_n q_n,$$

$$2T = \frac{dT}{dq_1} q_1 + \frac{dT}{dq_2} q_2 + \cdots + \frac{dT}{dq_n} q_n,$$

formulam XX.

$$\frac{dV}{dt} = 2T$$

ita scribimus:

XXI. $$v_1 q_1 + v_2 q_2 + \cdots + v_n q_n = \frac{dT}{dq_1} q_1 + \frac{dT}{dq_2} q_2 + \cdots + \frac{dT}{dq_n} q_n.$$

Aequatio

$$\Delta_2 = 2(U+h)\,\Delta_0$$

secundum α (sive unam constantium $\alpha_1\, \alpha_2 \cdots \alpha_{n-1}$) differentiata, cum a dextra parte nulla harum constantium occurrat, suppeditat systema $n-1$ aequationum $\frac{d\Delta_2}{d\alpha} = 0$, i. e.

XXII. $$\frac{d\Delta_2}{dv_1} \cdot \frac{dv_1}{d\alpha} + \frac{d\Delta_2}{dv_2} \cdot \frac{dv_2}{d\alpha} + \cdots + \frac{d\Delta_2}{dv_n} \cdot \frac{dv_n}{d\alpha} = 0,$$

quibus si comparantur totidem aequationes formae

$$d\,\frac{dV}{d\alpha} = 0$$

sive

XXIII. $$\frac{dv_1}{d\alpha} q_1 + \frac{dv_2}{d\alpha} q_2 + \cdots + \frac{dv_n}{d\alpha} q_n = 0,$$

manifesto obtinemus:

$$q_1 : q_2 : \cdots : q_n = \frac{d\Delta_2}{dv_1} : \frac{d\Delta_2}{dv_2} : \cdots : \frac{d\Delta_2}{dv_n}$$

sive

XXIV. $$\frac{1}{q_1} \frac{d\Delta_2}{dv_1} = \frac{1}{q_2} \frac{d\Delta_2}{dv_2} = \cdots = \frac{1}{q_n} \frac{d\Delta_2}{dv_n}.$$

Porro consideremus complexum eum qui oritur, si in complexu Δ_0 (IV.) terminis seriei verticalis

$$E_{1\cdot\mu}\,E_{2\cdot\mu}\cdots E_{\mu\cdot\mu}\cdots E_{\mu\cdot n}$$

ex ordine substituantur

$$\frac{dT}{dq_1}\,\frac{dT}{dq_2}\cdots\frac{dT}{dq_\mu}\cdots\frac{dT}{dq_n}.$$

Quem complexum litera Θ_μ designantes habemus

$$\text{XXV.}\qquad \Theta_\mu = \begin{vmatrix} E_{1\cdot1}\,E_{1\cdot2}\cdots E_{1\cdot\mu-1}\dfrac{dT}{dq_1}E_{1\cdot\mu+1}\cdots E_{1\cdot n}\\ E_{2\cdot1}\,E_{2\cdot2}\cdots E_{2\cdot\mu-1}\dfrac{dT}{dq_2}E_{2\cdot\mu+1}\cdots E_{2\cdot n}\\ \cdot\quad\cdot\;\cdots\;\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdots\;\cdot\\ \cdot\quad\cdot\;\cdots\;\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdots\;\cdot\\ \cdot\quad\cdot\;\cdots\;\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdots\;\cdot\\ E_{n\cdot1}\,E_{n\cdot2}\cdots E_{n\cdot\mu-1}\dfrac{dT}{dq_n}E_{n\cdot\mu+1}\cdots E_{n\cdot n}\end{vmatrix}.$$

Jam vero cum sit

$$\frac{dT}{dq_\mu} = E_{1\cdot\mu}q_1 + E_{2\cdot\mu}q_2 + \cdots + E_{n\cdot\mu}q_n,$$

liquet terminos complexus propositi factore q_ν affectos evanescere omnes, nisi sit $\nu = \mu$, ideoque simpliciter prodire

$$\Theta_\mu = \Delta_0 q_\mu,$$

unde colligitur:

$$\text{XXVI.}\qquad \frac{\Theta_1}{q_1} = \frac{\Theta_2}{q_2} = \cdots = \frac{\Theta_n}{q_n},$$

quarum quantitatum valor communis est Δ_0.

Comparanti aequationes XXVI. cum aequationibus XXIV. simulque ad formas complexuum $\frac{d\Delta_2}{dv_\mu}$ et Θ_μ (VIII. et XXV.) respicienti obvium erit, rationes $v_1 : v_2 : \cdots : v_n$ nec non rationes $\frac{dT}{dq_1} : \frac{dT}{dq_2} : \cdots : \frac{dT}{dq_n}$ utrasque eidem systemati $n-1$ aequationum linearium satisfacere ideoque aequalibus valoribus gaudere. Est igitur

$$\frac{1}{v_1}\frac{dT}{dq_1} = \frac{1}{v_2}\frac{dT}{dq_2} = \cdots = \frac{1}{v_n}\frac{dT}{dq_n};$$

hinc autem ope formulae XXI. colligitur esse:

$$\text{XXVII.}\qquad v_1 = \frac{dT}{dq_1},\; v_2 = \frac{dT}{dq_2}, \cdots v_n = \frac{dT}{dq_n}$$

sive

$$\frac{dV}{dp_1} = \frac{dT}{dq_1}, \cdots \frac{dV}{dp_n} = \frac{dT}{dq_n},$$

quae est nota forma integralium praesentis problematis intermediorum, constantes arbitrarias $\alpha_1\, \alpha_2 \cdots \alpha_{n-1}$ involventium.

Denique ut ad aequationes differentiales secundi ordinis, eliminatis omnibus α, descendamus, proficiscamur a formulis:

$$T = U + h, \quad \frac{dV}{dt} = 2T,$$

quarum combinatio suggerit:

$$\frac{dV}{dt} - T - U - h = 0,$$

sive

XXVIII. $$v_1 q_1 + v_2 q_2 + \cdots + v_n q_n - T - U - h = 0,$$

qua in aequatione valores quantitatum $q_1\, q_2 \cdots q_n$ in $\frac{dV}{dt}$ et in T occurrentium ope formularum XXVII. per argumenta $p_1\, p_2 \cdots p_n$ et constantes $\alpha_1\, \alpha_2 \cdots \alpha_{n-1}$ expressos concipi oportet, quibus substitutis aggregatum propositum identice evanescet. His perpensis differentiando secundum argumentum p_1 obtinemus:

$$\frac{dv_1}{dp_1} q_1 + \frac{dv_2}{dp_1} q_2 + \cdots + \frac{dv_n}{dp_1} q_n - \frac{dT}{dp_1} - \frac{dU}{dp_1}$$
$$+ v_1 \frac{dq_1}{dp_1} + v_2 \frac{dq_2}{dp_1} + \cdots + v_n \frac{dq_n}{dp_1} - \frac{dT}{dq_1}\frac{dq_1}{dp_1} - \frac{dT}{dp_2}\frac{dq_2}{dp_1} - \cdots - \frac{dT}{dq_n}\frac{dq_n}{dp_1} = 0.$$

Cum autem ex aequationibus XXVII. bini lineae inferioris termini se mutuo destruant, proposita in hanc contrahitur:

$$\frac{dv_1}{dp_1} q_1 + \frac{dv_2}{dp_1} q_2 + \cdots + \frac{dv_n}{dp_1} q_n = \frac{dT}{dp_1} + \frac{dU}{dp_1}.$$

Manifesto aggregatum ad laevam nihil aliud est quam

$$\frac{d^2V}{dp_1^2}\frac{dp_1}{dt} + \cdots + \frac{d^2V}{dp_1\, dp_n}\frac{dp_n}{dt} = \frac{d\left(\frac{dV}{dp_1}\right)}{dt} = \frac{dv_1}{dt}.$$

Unde accedente valore XXVII.

$$v_1 = \frac{dT}{dq_1}$$

constantes α omnes simul eliminantur atque eruitur

$$\frac{d\left(\frac{dT}{dq_1}\right)}{dt} = \frac{dT}{dp_1} + \frac{dU}{dp_1},$$

quae est quaesita aequatio differentialis secundi ordinis ad argumentum p_1 pertinens; reliquae eodem modo inveniuntur.

In praecedentibus non attigi proprietates minimum valorem integralis

$$\int\sqrt{\Omega}\,dt \quad \text{sive} \quad \int\sqrt{E_{1\cdot1}\,dp_1^2 + 2E_{1\cdot2}\,dp_1\,dp_2 + \cdots + E_{n\cdot n}\,dp_n^2}$$

spectantes, quibus eruendis calculus variationum in usum vocari solet. Sed verum fundamentum hujus doctrinae, ad quam theoria linearum brevissimarum, nec non, quod multo latius patet, principium minimae actionis pertinet, manifesto positum est in discerptione aggregati $\Omega\,dt^2$ in plura quadrata, quarum unum radicem habet per se integrabilem. Quae discerptio cum sit aggregati Ω transformatio plane identica, nihilominus tamen numerum sufficientem constantium arbitrariarum involvens, quarum ope iis conditionibus satisfieri potest quas limites integrationis postulant, non solum aequationes differentiales minimi, quae nostris in signis erunt $L_1 = 0$, $L_2 = 0, \cdots L_{n-1} = 0$, ipsumque minimum $\int dV$, verum etiam terminos, ultra quos integrationem extendere, nisi cessante minimo, non licet, non indicare nequit. Attamen hanc rem uberiore explicatione egentem, temporis angustiis pressus, in praesens dimittam et ad observationes quasdam particulares me convertam, quae mihi hujusmodi quaestionibus insistenti obviam fuerunt.

Prima observatio spectat theoriam linearum brevissimarum, quae plerumque a calculo variationum proficiscitur. Igitur operae pretium videtur esse, quomodo e nostris principiis, nullo e calculo variationum adjumento petito, aequationes differentiales necessariae facillime demanent, ostendere.

Tota enim quaestio de lineis brevissimis eo redit, ut aggregatum $Edp^2 + 2F\,dp\,dq + Gdq^2$ in formam $dr^2 + m^2\,d\varphi^2$ redigatur, siquidem hoc loco, quod commodissimum erit, notationes Disquisitionum circa superficies curvas adoptamus. Igitur ut aequatio

$$Edp^2 + 2F\,dp\,dq + G\,dq^2 = dr^2 + m^2\,d\varphi^2$$

fiat identica, incognitae r, φ, m, e relationibus eruendae sunt quae sequuntur:

$$\left(\frac{dr}{dp}\right)^2 + m^2\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 = E,$$

$$\frac{dr}{dp}\cdot\frac{dr}{dq} + m^2\,\frac{d\varphi}{dp}\cdot\frac{d\varphi}{dq} = F,$$

$$\left(\frac{dr}{dq}\right)^2 + m^2\left(\frac{d\varphi}{dq}\right)^2 = G,$$

unde demanant conditiones eaedem quas disquisitiones laudatae sistunt, puta:

$$E\left(\frac{dr}{dq}\right)^2 - 2F\,\frac{dr}{dp}\cdot\frac{dr}{dq} + G\left(\frac{dr}{dp}\right)^2 = EG - F^2,$$

$$\left(E\,\frac{dr}{dq} - F\,\frac{dr}{dp}\right)\frac{d\varphi}{dq} + \left(G\,\frac{dr}{dp} - F\,\frac{dr}{dq}\right)\frac{d\varphi}{dp} = 0,$$

$$EG - F^2 = \left(\frac{dr}{dp}\cdot\frac{d\varphi}{dq} - \frac{dr}{dq}\cdot\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 m^2$$

sive

$$E\left(\frac{d\varphi}{dq}\right)^2 - 2F\frac{d\varphi}{dp}\frac{d\varphi}{dq} + G\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 = \frac{EG-F^2}{m^2},$$

quarum secunda etiam e prima, ope differentiationis secundum constantem α in r contentam institutae, deducitur ponendo $\frac{dr}{d\alpha} = \varphi$.

Deinde angulus θ, ab elemento dr lineae brevissimae et elemento $\sqrt{E}\cdot dp$ comprehensus (cf. disqu. art. 18) ex eodem principio, calculo variationum non adhibito, ita determinatur.

Aequationem

$$E dp^2 + 2F dp dq + G dq^2 = dr^2 + m^2 d\varphi^2,$$

sive posito

$$EG - F^2 = \Delta^2,$$

$$\frac{(E dp + F dq)^2 + \Delta^2 dq^2}{E} = dr^2 + m^2 d\varphi^2$$

introducto novo argumento variabili indeterminato θ ita dispertire licet ut sit

$$\frac{(E dp + F dq)\cos\theta + \Delta\sin\theta\, dq}{\sqrt{E}} = dr,$$

$$\frac{-(E dp + F dq)\sin\theta + \Delta\cos\theta\, dq}{\sqrt{E}} = m d\varphi.$$

Jam ut re vera dr sit elementum lineae brevissimae, cujus aequatio erit $d\varphi = 0$, postulatur ut simul expressio proposita elementi dr sit differentiale completum, ideoque

$$d\frac{(\sqrt{E}\cos\theta)}{dq} = \frac{d\left(\frac{F\cos\theta + \Delta\sin\theta}{\sqrt{E}}\right)}{dp},$$

sive

$$\left(\frac{d\sqrt{E}}{dq} - \frac{d\left(\frac{F}{\sqrt{E}}\right)}{dp}\right)\cos\theta - \frac{d\left(\frac{\Delta}{\sqrt{E}}\right)}{dp}\sin\theta = \sqrt{E}\sin\theta\frac{d\theta}{dq}$$
$$+ \frac{\Delta\cos\theta - F\sin\theta}{\sqrt{E}}\cdot\frac{d\theta}{dp}.$$

Hinc fit accedente conditione $d\varphi = 0$, qua datur

$$\operatorname{cotg}\theta = \frac{E dp + F dq}{\Delta\, dq},$$

$$dr\cdot\cos\theta = \frac{E dp + F dq}{\sqrt{E}},\quad dr\cdot\sin\theta = \frac{\Delta}{\sqrt{E}}dq:$$

$$\frac{\Delta\cos\theta - F\sin\theta}{\sqrt{E}}dr = \Delta\, dp,\quad \sqrt{E}\sin\theta\, dr = \Delta\, dq,$$

ideoque

$$\left\{\sqrt{E}\sin\theta\,\frac{d\theta}{dq}+\frac{\Delta\cos\theta-F\sin\theta}{\sqrt{E}}\,\frac{d\theta}{dp}\right\}dr=\Delta\left(\frac{d\theta}{dq}\,dq+\frac{d\theta}{dp}\,dp\right)=\Delta\,d\theta;$$

unde conditio integrabilitatis hanc formam nanciscitur:

$$\left\{\frac{d\sqrt{E}}{dq}-\frac{d\left(\frac{F}{\sqrt{E}}\right)}{dp}\right\}\frac{E\,dp+F\,dq}{\sqrt{E}}-\frac{d\left(\frac{\Delta}{\sqrt{E}}\right)}{dp}\cdot\frac{\Delta}{\sqrt{E}}\,dq=\Delta\,d\theta,$$

quae brevi calculo subducto in sequentem contrahitur:

$$\Delta\,d\theta=\frac{1}{2}\,\frac{F}{E}\,dE+\frac{1}{2}\,\frac{dE}{dq}\,dp-\frac{dF}{dp}\,dp-\frac{1}{2}\,\frac{dG}{dp}\,dq,$$

eandem quam disquisitiones l. l. exhibent.

Altera quam adjungere placet observatio versatur in substitutione analytica maxime memorabili, qua variabiles $x_1\,x_2\cdots x_{n+1}$, relatione

$$\frac{x_1^2}{a_1}+\frac{x_2^2}{a_2}+\cdots+\frac{x_{n+1}^2}{a_{n+1}}=1$$

inter se connexae, exprimuntur ope radicum p aequationis

$$\frac{x_1^2}{a_1(a_1-p)}+\frac{x_2^2}{a_2(a_2-p)}+\cdots+\frac{x_{n+1}^2}{a_{n+1}(a_{n+1}-p)}=0,$$

quas radices symbolis $p_1\,p_2\cdots p_n$ designare convenit.

Hanc substitutionem egregie tractavit in diarii Crelliani volumine 22. geometra Hammensis **Haedenkamp**, ibique inter alia plura quaestionem de valore minimo integralis

$$\int ds=\int\sqrt{dx_1^2+dx_2^2+\cdots+dx_{n+1}^2}$$

elegantissime absolvit. Jam quomodo hoc in casu discerptio aggregati ds^2 in plura quadrata, qualem postulamus, commodissime instituatur, paucis ostendere juvat.

Statuatur, ut est praesenti casui aptum,

$$\Omega\,dt^2=E_1\,dp_1^2+E_2\,dp_2^2+\cdots+E_n\,dp_n^2,$$
$$\Phi p=p-p_1\cdot p-p_2\cdots p-p_n,$$
$$\Pi=p^{n-1}+\alpha_1p^{n-2}+\alpha_2p^{n-3}+\cdots+\alpha_{n-1};$$

sint $\alpha_1\,\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}$ constantes arbitrariae, denique mutato p in p_μ transeat Π in Π_μ; tunc erit ex principiis notissimis

$$\sum\frac{\Pi_\mu}{\Phi'p_\mu}=1$$

nec non

$$\sum \frac{p_\mu^{n-\nu-1}}{\Phi' p_\mu} = 0,$$

siquidem ν unum e numeris $1\,2\,3 \cdots n-1$ repraesentat, dum summationes indictae valores $\mu = 1\,2\,3 \cdots n-1$ amplectuntur.

Quaesita discerptio statim obtinetur aggregatum $\Omega\,dt^2$ cum aggregato $\sum \frac{\Pi_\mu}{\Phi' p_\mu}$ multiplicando productumque secundum schema sequens disponendo:

$$\begin{aligned}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \cdots + b_n^2) \\ = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2 + \Sigma\Sigma(a_\mu b_\nu - a_\nu b_\mu)^2,\end{aligned}$$

in quo duplex summatio omnes valores indicum μ et ν inde ab 1 usque ad n (inclusis extremis) amplectitur, unde aggregatum $\frac{n \cdot n-1}{2}$ quadratorum formabitur. Protinus statuendo

$$a_\mu = \sqrt{E_\mu} \cdot dp_\mu, \quad b_\mu = \sqrt{\frac{\Pi_\mu}{\Phi' p_\mu}}$$

ideoque

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = \Omega\,dt^2,$$

$$b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2 = \sum \frac{\Pi_\mu}{\Phi' p_\mu} = 1,$$

colligitur:

$$\begin{aligned}\Omega\,dt^2 = \left\{\sqrt{\frac{\Pi_1 E_1}{\Phi' p_1}}\,dp_1 + \sqrt{\frac{\Pi_2 E_2}{\Phi' p_2}}\,dp_2 + \cdots + \sqrt{\frac{\Pi_n E_n}{\Phi' p_n}}\,dp_n\right\}^2 \\ + \sum\sum\left\{\sqrt{\frac{\Pi_\nu E_\mu}{\Phi' p_\nu}}\,dp_\mu - \sqrt{\frac{\Pi_\mu E_\nu}{\Phi' p_\mu}}\,dp_\nu\right\}^2.\end{aligned}$$

Haec tamen transformatio nullius esset usus, nisi in casu praesenti singulari feliciter contingeret, ut $\frac{E_\mu}{\Phi' p_\mu}$ ideoque etiam $\frac{\Pi_\mu E_\mu}{\Phi' p_\mu}$ a solo argumento p_μ penderent, cujus proprietatis beneficio fit ut in proposita aequatione pars prima ad dextram occurrens sit quadratum differentialis exacti. Reliquae partes ad dextram positae in aggregatum $n-1$ quadratorum facile quidem contrahuntur, qua tamen reductione nihil proficimus. Patet enim totum aggregatum propositum in nihilum abire statuendo

$$\frac{\sqrt{E_1}\,dp_1}{\sqrt{\frac{\Pi_1}{\Phi' p_1}}} = \frac{\sqrt{E_2}\,dp_2}{\sqrt{\frac{\Pi_2}{\Phi' p_2}}} = \cdots = \frac{\sqrt{E_n}\,dp_n}{\sqrt{\frac{\Pi_n}{\Phi' p_n}}},$$

quibus igitur aequationibus conditiones minimi exprimuntur; ipsum autem minimum fit aggregatum partium singillatim integrabilium, puta

$$V=\int\sqrt{\frac{\Pi_1 E_1}{\Phi' p_1}}\,dp_1+\int\sqrt{\frac{\Pi_2 E_2}{\Phi' p_2}}\,dp_2+\cdots+\int\sqrt{\frac{\Pi_n E_n}{\Phi' p_n}}\,dp_n,$$

unde demanant integralia

$$\frac{dV}{d\alpha_1}=\beta_1,\ \frac{dV}{d\alpha_2}=\beta_2,\cdots\frac{dV}{d\alpha_{n-1}}=\beta_{n-1},$$

quae necessario conditionibus minimi supra exhibitis satisfaciunt. Quod quomodo fiat, ita explicatur. Primum erit

$$d\,\frac{dV}{d\alpha_\nu}=\frac{1}{2}\sum\frac{\sqrt{E_\mu}\cdot dp_\mu}{\sqrt{\Pi_\mu\cdot\Phi' p_\mu}}\cdot\frac{d\Pi_\mu}{d\alpha_\nu},\quad \text{nec non}\quad \frac{d\Pi_\mu}{d\alpha_\nu}=p_\mu^{n-\nu-1};$$

deinde introducta in locum elementi $\sqrt{E_\mu}\,dp_\mu$ quantitate huic elemento proportionali $\sqrt{\frac{\Pi_\mu}{\Phi' p_\mu}}$, obtinemus summam

$$\sum\frac{p_\mu^{n-\nu-1}}{\Phi' p_\mu}$$

quae, ut supra monuimus, in nihilum redit; unde protinus sequitur:

$$d\,\frac{dV}{d\alpha_\nu}=0;$$

quod erat probandum.

Sed jam appropinquante die festo, cui has pagellas dicare constitutum est, quae sunt reliqua in posterum dimittimus, satis in praesens habentes, principium mere algebraicum explicuisse, e quo primaria saltem theoriae Hamiltonianae momenta tamquam corollaria demanant.

Datum Dorpati Livonorum, die 27. m. Julii a. 1864.

Ueber den Stand der Herausgabe von Gauss' Werken.

Dritter Bericht.*)

Von

Felix Klein in Göttingen.

Im vergangenen Jahre ist uns über unser Erwarten hinaus auch noch einiges neue Material zugeflossen; nämlich:

I. Originale:

1) Ein Brief von Gauss an Schumacher vom 31. Oktober 1848. Geschenk des Herrn Observator R. Schumacher in Kiel.
2) Ein Brief von Gauss an Hauptmann G. W. Müller vom 22. August 1828. Durch Ankauf.

II. Kopien nach Originalen:

1) Ein Brief von Gauss an v. Zimmermann vom 12. März 1797, geschenkt von Herrn Professor Wirtinger in Innsbruck; das Original im Besitz von Herrn Professor von Schröder in Innsbruck.
2) Eine Reihe Briefe von Gauss an General Baeyer, C. A. Peters, A. v. Humboldt und andere, geschenkt von Frau Geheimrath Schering in Göttingen.
3) Ein Brief von Gauss an seinen Sohn Eugen vom 15. Februar 1844 (Photolithographie), Geschenk von Herrn Robert Gauss in Denver (Nordamerika); das Original im Besitz der Lick-Sternwarte auf dem Mt. Hamilton.
4) Ein Brief an Herrn Geheimrath Galle vom 15. Februar 1846, geschenkt von Herrn Geheimrath Galle selbst, in dessen Besitz sich auch das Original befindet.

*) Abgedruckt aus den Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Geschäftliche Mittheilungen, 1900, Heft 1 (Oeffentliche Sitzung vom 28. April 1900).

III. Folgende Originale wurden uns zur Einsicht und zur Herstellung von Kopien zeitweise überlassen.

1) Ein Brief von Gauss an Voigtländer vom 21. Oktober 1822; von Herrn von Voigtländer jun. bez. Herrn Dr. Kämpfer in Braunschweig.
2) Neun einzelne Zettel mit handschriftlichen Notizen von Gauss; von Herrn C. Gauss in Hameln.
3) Ein von Gauss ausgestelltes Studienzeugniss für Möbius und ausserdem ein von Möbius geführtes Verzeichniss seiner Korrespondenz, in welchem zwei Briefe von Gauss an Möbius erwähnt werden, welche beide leider verloren scheinen. Von Herrn Dr. P. J. Möbius in Leipzig.
4) Drei Briefe von Therese Gauss an Eugen Gauss vom 27. März 1845, 6. Dezember 1850, 16. Mai 1855, welche sehr interessante Schilderungen, namentlich von Gauss' letzten Lebensstunden enthalten. Von Herrn R. Gauss in Denver (Nordamerika).
5) Ein Brief von Gauss an Gerling vom 4. Februar 1844. Von Herrn Dr. Ludendorff in Potsdam.

Im Anschluss hieran ist noch die erfreuliche Thatsache zu erwähnen, dass Herr C. Gauss in Hameln verfügt hat, dass die in diesem und im vorigen Berichte erwähnten Originale aus seinem Besitz (also auch das interessante Tagebuch von Gauss über seine wissenschaftlichen Entdeckungen) — unter Wahrung seines Eigenthumsrechts — dauernd im hiesigen Gauss-Archiv aufbewahrt werden, wofür wir ihm zu besonderem Danke verpflichtet sind.

Endlich haben wir folgende Gaussiana als Geschenk erhalten:

1) Ein Exemplar des seltenen Werkes: Taurinus, Theorie der Parallellinien; von Herrn Bergrath Fürer in Dürrenberg bei Corbetha.
2) Ein Exemplar der Dissertation von Herrn Geheimrath H. Wagner, „Maassbestimmungen der Oberfläche des grossen Gehirns" (welche die Ergebnisse der an Gauss' Gehirn ausgeführten Messungen enthält). Vom Verfasser.
3) Ein Exemplar „Briefwechsel zwischen C. F. Gauss und W. Bolyai", herausgegeben von Schmidt und Stäckel. Von der kgl. Akademie der Wissenschaften zu Budapest.
4) Ein Exemplar der Aushängebogen von „W. Olbers' Leben und Wirken" II. Band 1. Abtheilung, herausgegeben von C. Schilling (im Anschluss an die bereits im vorigen Bericht erwähnten ersten Bogen), und ein Exemplar der Aushängebogen desselben

Werkes, Ergänzungsband, herausgegeben von Schur und Stichtenoth. Von der Springer'schen Verlagsbuchhandlung in Berlin.

5) Ein Exemplar der amerikanischen Zeitschrift Science vom 19. Mai 1899, enthaltend einen Aufsatz von Professor Cajori: „C. F. Gauss and his Children". Von Herrn R. Gauss in Denver (Nordamerika).

Allen denen, welche uns in der genannten Weise Material zugänglich gemacht haben, sei hier noch einmal gedankt.

Besonders hervorgehoben zu werden verdient das Erscheinen der hier unter Nr. 3) und 4) erwähnten Werke, also des Briefwechsels zwischen Gauss und Bolyai, sowie der 1. Abtheilung des II. Bandes von Olbers' Leben und Wirken, welcher den Briefwechsel zwischen Gauss und Olbers bis 1819 bringt, und des Ergänzungsbandes desselben Werkes, welcher die neuen Reductionen der Olbers'schen Beobachtungen enthält.

Ueber die Förderung der eigentlichen Herausgabe ist Folgendes zu bemerken: das zu bearbeitende Material hat so an Umfang zugenommen, dass statt des geplanten Bandes VIII. zwei Bände (VIII und IX) erscheinen werden, deren erster die Notizen aus der Arithmetik, der Analysis, der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Geometrie (insbesondere der apriorischen Geometrie) enthalten wird; dieser wird einen Umfang von etwa 57 Bogen erreichen, von welchen bereits 43 druckfertig sind, so dass sein Erscheinen für diesen Herbst in sichere Aussicht gestellt werden kann. Der Druck des Bandes IX, enthaltend Geodäsie und Physik kann voraussichtlich Ende dieses Jahres begonnen werden. Der Umfang des noch rückständigen VII. Bandes lässt sich gegenwärtig noch nicht genau abschätzen, da sich noch nicht ganz übersehen lässt, ein wie grosser Theil von Gauss' Untersuchungen über die Störungen der kleinen Planeten (Ceres und Pallas), welche neben der Theoria motus seinen Hauptinhalt bilden werden, sich in druckfähiger Form wird reconstruiren lassen.

An den Feierlichkeiten, mit denen am 16. und 17. Juni vorigen Jahres die Enthüllung des durch ein privates Comité geschaffenen Gauss-Weber-Denkmals begleitet wurden, hat sich das Gauss-Archiv insofern betheiligt, als wir für die in der Aula der Universität veranstaltete Gauss-Weber-Ausstellung (in der sonst wesentlich Originalapparate ausgestellt waren) eine grössere Anzahl der wichtigsten Manuscripte aus dem Archiv zur Verfügung stellten.

Ueber den Stand der Herausgabe von Gauss' Werken.

Vierter Bericht.*)

Von

Felix Klein in Göttingen.

Im vergangenen Jahre gelangten wir durch Ankauf in den Besitz von drei Originalbriefen von Gauss, nämlich

1) ein Brief von Gauss an Möbius (17. Oktober 1843), wonach sich also die im vorjährigen Berichte ausgesprochene Befürchtung, dass die beiden von Gauss an Möbius gerichteten Briefe verloren seien, erfreulicherweise nicht bestätigt.

2) ein Brief von Gauss an von Kobell-München (18. Mai 1842).

3) ein Brief von Gauss an ? (7. Juli 1847).

Ueber den Fortgang des eigentlichen Unternehmens ist vor allem die erfreuliche Thatsache zu verzeichnen, dass Band VIII im Oktober vorigen Jahres in derselben Weise und in demselben Umfange erschienen ist, wie im vorigen Jahresbericht in Aussicht gestellt war.

Ferner hat der Druck von Band VII begonnen werden können, wenn auch das Manuscript für den ganzen Band noch nicht fertiggestellt ist; dieser Band wird selbstverständlich zunächst den endgiltigen Abdruck der Theoria motus bringen, auf welchen eine besondere Sorgfalt verwandt wird, da es sich herausgestellt hat, dass die von Gauss gegebenen numerischen Beispiele noch eine grössere Anzahl von Fehlern enthalten, und es doch als sehr wünschenswerth erscheint, diesen Abdruck in mustergiltiger Form zu geben. Auch haben sich im Nachlass noch einige nicht unwichtige Ergänzungen zur Theoria motus vorgefunden, welche in dem Bande Aufnahme finden werden.

Den interessantesten Theil des Bandes VII werden die störungstheoretischen Untersuchungen von Gauss bilden, die sich in ihren nume-

*) Abgedruckt aus den Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Geschäftliche Mittheilungen, 1901, Heft 1 (Oeffentliche Sitzung vom 27. April 1901).

rischen Anwendungen auf die Planeten Ceres und Pallas beziehen, und hier können wir die genugthuende Mittheilung machen, dass wir in der Lage sein werden, ein vollständiges Bild dieser Arbeiten zu geben, da sich die Schwierigkeiten, die sich anfangs der Entzifferung der langen numerischen Rechnungen entgegenstellten, haben überwinden lassen. Band VII wird also eine vollständige und zusammenhängende Darstellung von Gauss' Arbeiten über die kleinen Planeten enthalten. Ueber die dabei in Betracht kommenden Einzelheiten berichtet Herr Brendel folgendes:

Gauss' erste Störungsrechnungen sind die Berechnungen der Störungen der Ceres, welche in das Jahr 1802 fallen und die Form von Coordinatenstörungen haben. Gauss schliesst sich zunächst an Laplace an, verwendet aber eine neue Methode zur Entwicklung der Störungsfunction, wobei er bereits aus den Resultaten seiner Untersuchungen über die elliptischen Integrale und das arithmetisch-geometrische Mittel Nutzen zieht; leider sind die von Gauss selbst damals publicirten Resultate dieser Rechnungen durch einen Rechenfehler entstellt, den er selbst anscheinend erst viel später nach langem Suchen gefunden hat, und zweifellos erklärt sich hieraus, dass er sich in seinen Briefen an Olbers mehrmals über die schlechte Uebereinstimmung dieser Resultate mit den Beobachtungen beklagt.

Nachdem er dann noch einige weitere nicht vollendete Rechnungen über Ceres nach immer mehr verbesserten Methoden unternommen hat, macht er seine ersten Vorbereitungen zur Berechnung der Pallasstörungen im Juni 1804, ohne allerdings zunächst mit besonderm Eifer daran zu gehen. Das Jahr 1805 ist hauptsächlich den Methoden zur Entwicklung der Störungsfunction gewidmet, die nun in enge Beziehung treten zu den Untersuchungen über die hypergeometrische Reihe; im Herbst 1805 rechnet er mit Bessel's Unterstützung eine Hilfstafel zur Entwicklung von $(a^2+a'^2-2aa'\cos\varphi)^{-\frac{1}{2}}$, welche so eingerichtet ist, dass sie auf alle drei bis dahin entdeckten kleinen Planeten Anwendung finden kann.

Da die nächste Zeit ihn mit der Herausgabe der Thoria motus sehr in Anspruch nimmt, so ziehen sich Gauss' Berechnungen der speciellen Störungen der Pallas, die er zunächst als Vorbereitung zur Berechnung der allgemeinen Störungen unternimmt, bis zum Jahre 1810 hin; sie werden im December 1810 vollendet und umfassen die Bewegung der Pallas von 1803 bis 1811. Die Berechnungen der allgemeinen Störungen nimmt Gauss dann im Februar 1811 ernstlich in Angriff.

Diese allgemeinen Pallasstörungen hat Gauss in Form von Elementenstörungen gerechnet, und zwar hat er sich die Formeln für die Variationen der Elemente nach einer eigenartigen, noch heute das lebhafteste Interesse bietenden Methode abgeleitet; diese Ableitung hat er in einem im Nachlass

befindlichen Manuscript, welches den Titel „Exposition d'une nouvelle méthode de calculer les perturbations planétaires avec l'application au calcul numérique des perturbations du mouvement de Pallas" trägt, niedergelegt; dasselbe ist leider unvollendet geblieben und sollte die Einleitung zu einer vollständigen Theorie der Pallasstörungen werden. Da dies Manuscript in französischer Sprache geschrieben ist, so liegt die Vermuthung nahe, dass Gauss wirklich mit dem Gedanken umging, sich um den von der Pariser Akademie für die Berechnung der Pallasstörungen ausgesetzten Preis zu bewerben*). Noch mag bemerkt werden, dass die grundlegenden Lagrange'schen Untersuchungen über die Methode der Variation der Constanten damals noch nicht publicirt, also Gauss auch noch nicht bekannt waren.

Wie bereits aus dem Briefwechsel zwischen Gauss und Hansen (Gauss an Hansen, 11. März 1843) bekannt geworden ist, hat Gauss bei der Berechnung der Pallasstörungen eine der von Hansen 30 Jahre später angewandten ähnliche Methode zur Entwicklung der Störungsfunction benutzt; er entwickelt die Störungsfunction nach den beiden mittleren Anomalien und berechnet die Coefficienten beider Entwicklungen numerisch; die betreffenden Rechnungen sind so gut wie vollständig erhalten, allerdings nur die Zahlen auf einzelnen Blättern ohne jede Erklärung ihrer Bedeutung, weshalb ihre Entzifferung gewisse Schwierigkeiten bot. Es scheint als ob Gauss diese Untersuchungen nicht ganz soweit abgeschlossen habe, wie er beabsichtigte, wenn er auch im März 1818 an Olbers schreibt, dass seine Rechnungen über Pallas fertig seien. Der Gedanke, seine Resultate zu publiciren, wird nun aber durch andere ebenfalls sehr wichtige Arbeiten (zunächst geodätische und dann auch magnetische) mehr und mehr in den Hintergrund gedrängt, so dass uns schliesslich Gauss von dieser schönen Arbeit nichts hinterlassen hat als eine sehr grosse Anzahl meist ganz ungeordneter Papiere.

Ueber die wichtige Entdeckung von Gauss, dass die mittleren Bewegungen von Jupiter und Pallas im rationalen Verhältniss $\frac{7}{18}$ zu einander stehen, über welche, namentlich aus dem Briefwechsel mit Bessel (Gauss an Bessel, 5. Mai 1812), bisher nur einige kurze Andeutungen bekannt geworden sind, und auf deren Klarlegung man in astronomischen Kreisen sehr gespannt war, hoffen wir auch alles Wünschenswerthe mittheilen zu können. Es haben sich nämlich im Nachlass zwei kleine Zettel vorgefunden, auf denen verstreut einige ganz kurze Notizen über diese Frage stehen; aus diesen geht mit grosser Wahrscheinlichkeit hervor, dass

---

*) Der Preis wurde zuerst im Jahre 1804 ausgesetzt, schliesslich aber bis 1. Oktober 1816 verlängert.

Gauss versucht hat, das entsprechende Librationsglied zu bestimmen und unter anderm seine Periode zu 399,07 Jupitersumläufen oder ungefähr 4734 Jahren gefunden hat.

Endlich werden im VII. Bande u. a. noch einige Untersuchungen aus dem Nachlasse Platz finden, die sich auf die Theorie des Mondes, auf die Berechnung des Osterfestes und auf die Bewegung der Sonne im Raum beziehen. —

Auszug aus dem Gutachten der Göttinger philosophischen Facultät betreffend die Beneke-Preisaufgabe für 1901.

Von

Felix Klein in Göttingen*).

Die philosophische Facultät hatte im März 1898 folgende Aufgabe gestellt**):

„Als allgemein geltende Grundlage für die mathematische Behandlung der Naturerscheinungen ist lange Zeit hindurch das *Princip der Stetigkeit* oder noch specieller die *Darstellung durch unbeschränkt differentiirbare Functionen* angesehen worden. Diese Grundlage wurde von den Erfindern der Differential- und Integralrechnung als etwas Selbstverständliches eingeführt; die Fortschritte der mathematischen Forschung haben aber je länger je mehr gezeigt, dass dabei eine sehr grosse Zahl stillschweigender Voraussetzungen zu Grunde lag, zu denen man bei der immer vorhandenen Ungenauigkeit unserer sinnlichen Wahrnehmungen keineswegs gezwungen ist. Auch tritt mit dem genannten Ansatze die Annahme der molecularen Constitution der Materie von vorneherein in Widerspruch. Die Facultät wünscht eine von actuellem wissenschaftlichen Interesse getragene Schrift, welche die hier in Betracht kommenden Fragen in allgemein verständlicher Weise darlegt und die Zulässigkeit, bez. Zweckmässigkeit der üblichen Darstellung einer eingehenden Prüfung unterwirft. Die Schrift kann mehr nach mathematischer oder philosophischer und psychologischer Seite ausholen; historische Studien sind erwünscht, werden aber nicht verlangt".

Auf diese Aufgabe hin sind bei dem Dekan der Facultät *drei* Arbeiten rechtzeitig eingelaufen, welche weiter unten noch näher charakterisirt werden sollen. Vorab möge hier eine ausführlichere Erläuterung der

*) Das betr. Gutachten ist in extenso in den Göttinger Nachrichten vom April 1901 (Geschäftliche Mittheilungen, Heft 1) publicirt; ich bringe hier denjenigen Theil zum Wiederabdruck, der allgemeines mathematisches Interesse besitzen dürfte.
F. Kl.

**) Vergl. Math. Annalen, Bd. 50, p. 603—604.

Preisfrage gegeben werden, einmal, weil die ursprüngliche Formulirung in ihrer Kürze verschiedentlich nicht richtig aufgefasst worden ist, dann aber auch um einen Maassstab für die Beurtheilung der eingelaufenen Arbeiten zu haben.

Die Fragestellung ist vielfach dahin gedeutet worden, oder es ist doch als ihr Kern angesehen worden: man solle entscheiden, ob man die Materie besser als molecular aufgebaut oder als continuirlich zu denken habe, ob insbesondere die modernen Fortschritte der Naturwissenschaft mehr in der Richtung der einen oder der anderen Auffassungsweise liegen.

Eine derartige Erörterung, von einem unabhängigen Standpunkte aus und mit wirklichem Ueberblick über die neuesten Fortschritte der in Betracht kommenden naturwissenschaftlichen Gebiete unternommen, wäre nicht ohne Verdienst. Dies jedenfalls sollte dabei hervorgekehrt werden, dass sich die zweierlei Auffassungsweisen gerade auch in der neuesten Zeit alternirend immer wieder ablösen. Nachdem Maxwell in der Electricitätslehre die Theorie des Continuums zu Ehren gebracht hat, steuern wir bei derselben jetzt in Folge des Studiums der Kathodenstrahlen und der electrodynamischen Lichttheorie wieder auf atomistische Vorstellungsweisen hin. Die physikalische Chemie, welche in der Phasenlehre von Gibbs die Zustände in der Materie durch eine endliche Zahl von Parametern charakterisirt, also Continuitätsvorstellungen zu Grunde zu legen scheint, entwickelt nach anderer Seite die wesentlich atomistische Jonentheorie. Zu derselben Zeit, wo man in der Physik versucht, durch eine bloss „phänomenologische“ Schilderung der Erscheinungen das Beste zu leisten, wird in der Chemie die Lehre von der Lagerung der Atome im Raume ausgebaut, etc. etc. — Andererseits wäre hervorzuheben, dass die atomistische Vorstellungsweise nicht nothwendig zur Idee von Fernkräften führt; man kann sie mit der Idee einer im Raume continuirlichen Krafttransmission verbinden, indem man die electrischen oder materiellen Atome (wie immer man sich dieselben denken mag) als *singuläre Stellen* in einem den Raum continirlich erfüllenden Medium einführt.

Die so umschriebene Erörterung, so interessant sie sein könnte, träfe aber doch nicht das eigentliche von der Facultät vorgeschlagene Thema, sondern gäbe für dasselbe nur beiläufiges Material. Man wird dem Thema wesentlich näher kommen, wenn man fragt: in wie weit sind bei den genannten Beispielen die beiden Vorstellungsweisen (der Continuumstheorie und der Moleculartheorie) für die Erklärung oder, besser gesagt, die Darstellung der beobachteten Thatsachen mathematisch gleichwerthig? Man wird den Sinn des Thema's vollständig haben, wenn man zunächst alles Hypothetische oder Speculative, auf das intime Wesen der Materie Bezügliche, abstreift und ganz allgemein Folgendes beachtet: Jedermann

führt, sobald er die Gesammtwirkung ausgedehnter Gebilde beurtheilen will, die in kleinen Dimensionen inhomogen sind, homogene Mittelwerthe ein; für diese statuirt er Abhängigkeiten, die er durch möglichst einfach gewählte Functionen ausdrückt. So ersetzt der numerische Rechner in zahlreichen Fällen Summationen durch Integrationen etc. Der ursprüngliche Anlass zu dem solcherweise bezeichneten Ansatze liegt vermuthlich in der Natur unserer sinnlichen Wahrnehmungen. Man denke z. B. daran, dass ein Schneehaufen, aus einiger Entfernung betrachtet, oder ein Wald, der den Horizont abschliesst, eine continuirliche Contour zu besitzen scheinen. Hiermit verbindet sich des weiteren das Streben nach möglichst einfacher Darstellung. Wie weit ist der in Rede stehende Ansatz mathematisch berechtigt? Insbesondere, welchen Sinn hat es, auf die Abhängigkeiten, die wir zwischen den homogenen Mittelwerthen aufstellen, die Grundsätze der Differentialrechnung und der Reihenlehre anzuwenden? Und wenn wir durch eine solche Anwendung richtige Resultate finden, können wir dann auf die Homogeneïtät oder Nicht-Homogeneïtät des Substrats einen Rückschluss machen? — Erst wenn der Complex der solcherweise bezeichneten Fragen erledigt oder doch verstanden ist, möge man zum Problem der Naturerklärung zurückgehen. Man wird sich dann fragen, welche innere Bedeutung den Stetigkeitsvoraussetzungen, die man hierauf bezüglich von altersher zu machen pflegt, beigelegt werden muss, ob dieselben mehr sind als ein blosses Hülfsmittel zur leichteren Durchführung der mathematischen Betrachtung, und in welchem Sinne die Resultate, welche man von den genannten Voraussetzungen aus ableitet, auf objective Gültigkeit Anspruch machen. —

Es ist unmöglich, das Gesagte hier noch eingehender zu erläutern. Nur auf ein besonders einfaches Beispiel (welches Boussinesq gelegentlich behandelt) mag noch hingewiesen werden. Jedermann lernt, dass das Potential der Schwere im Inneren eines Körpers der Differentialgleichung $\Delta V = -4\pi\varrho$ genügt. Welche Bedeutung hat diese Differentialgleichung, oder auch: welche Bedeutung will man den Grössen V und ϱ, die in der Differentialgleichung vorkommen, für einen Körper beilegen, der in kleinen Dimensionen inhomogen ist (wie der soeben genannte Schneehaufen)? Und wie stellen sich diese Fragen, wenn man einen Aufbau des Körpers aus streng punktförmigen Atomen voraussetzen will? Man wird in dem einen oder andern Falle V und ϱ selbstverständlich als Mittelwerthe einführen wollen; wie sind diese Mittelwerthe zu berechnen?

Ueber Fragen und Schwierigkeiten der hiermit bezeichneten Art sind die hervorragendsten Theoretiker früherer Jahrzehnte unbedenklich hinweggegangen. Man lese nach, wie Cauchy oder Poisson von Molecularvorstellungen aus zu den Differentialgleichungen der mathe-

matischen Physik kommen. Und das hiermit gegebene Beispiel findet von seiten der Mehrzahl der heutigen Physiker ebenso unbedenkliche Nachfolge. Offenbar spielen dabei in die Ueberlegungen eine Menge empirischer Elemente hinein. Die Erfahrung giebt uns die Gewissheit, dass im allgemeinen kleine Abänderung der Prämissen die Resultate nur wenig abändert. Freilich trifft dies nicht immer zu (wenn „Instabilität" vorliegt, bei Explosionen etc.); die Naturforscher verlassen sich aber bezüglich der Frage, ob gegebenenfalls ein solcher Ausnahmefall vorliegt, oder nicht, auf ihr Gefühl oder auf die experimentelle Controle; wie der Erfolg zeigt mit Recht.

Der heutige Mathematiker aber, der über die Principien seiner Wissenschaft nachdenkt, kann unmöglich die gleiche Selbstbeschränkung üben. Er wird nicht die Zweckmässigkeit des geschilderten Verfahrens bestreiten, — sogar von da aus mit Vorliebe Anregung entnehmen —, darüber hinaus aber eine genaue mathematische Begründung und Umgränzung des Verfahrens verlangen. Für seinen Erkenntnisstrieb maassgebend ist die *moderne Entwickelung der Mathematik nach der kritischen Seite hin.* Diese Entwickelung ist bisher in allgemeineren Kreisen, sowohl von physikalischer als auch von philosophischer Seite, gern als etwas Beiläufiges angesehen worden, was für die Zwecke der Naturerklärung nicht eigentlich in Betracht kommt. Die Aufgabe sollte aber doch nie sein, eine unbequeme Kritik zurückzuschieben, sondern immer nur, sie innerlich zu überwinden. Andererseits haben sich die Mathematiker in ihrer Mehrzahl damit begnügt, die neuen Principien im Bereich ihrer Specialwissenschaft zur Geltung zu bringen; sie haben nur erst selten Gelegenheit gehabt oder gesucht, die Beziehungen zu den Nachbargebieten dementsprechend auszugestalten. Desshalb mögen einige Erläuterungen zur Sachlage hier am Platze sein.

1) Es handelt sich um diejenige Entwickelung der Mathematik, welche als *Arithmetisirung* derselben bezeichnet wird. Als einzige Grundlage derselben gilt die Evidenz des Zahlbildes, bez. der Gesetze, nach denen man mit Zahlen operirt; auf diese Grundlage sind alle anderen Beziehungen zurückzuführen. Die Idee der continuirlichen Veränderlichen wird durch die allgemeineren Formulirungen der Mengenlehre ersetzt; die Idee der Function erfährt eine entsprechende Durchbildung. Differential- und Integral-Rechnung werden ausschliesslich auf den strengen Gränzbegriff basirt; es erscheint als Regel, nicht als Ausnahme, dass eine stetige Function nicht differentiirbar ist, etc. etc.

2) Das Wesentliche ist nun, dass an der solcherweise arithmetisirten Mathematik gemessen alle sinnliche Auffassung als etwas *Ungenaues, nur auf eine Anzahl Decimalen Bestimmtes* erscheint. Trotzdem wird man

die arithmetisirte Mathematik als Ausgangspunkt für die quantitative Beherrschung der Aussenwelt festhalten wollen*). *In welcher Form hat dies zu geschehen? Und welche Erleichterungen darf man sich gestatten, wenn man von den Resultaten wieder nur eine begränzte Genauigkeit verlangt?* Dies ist die centrale Frage, unter welches sich alles früher Gesagte unterbegreift.

3) In dem Gesagten ist bereits enthalten, was zur Lösung der vorliegenden Schwierigkeiten geschehen sollte. Es handelt sich darum, dass sich der Mathematiker und der Empiriker auf einem Zwischengebiete die Hand reichen. Für den Mathematiker erwächst die Aufgabe, auf Grund der arithmetisirten Wissenschaft eine umfassende Lehre von den *Näherungsmethoden* zu entwickeln, als eine besondere Disciplin dasjenige zu pflegen, was Hr. Heun neuerdings treffend als *Approximationsmathematik* bezeichnet hat**). Für den Empiriker aber wird es sich darum handeln, auf allen Gebieten und jedenfalls sehr viel mehr als bisher, den *Genauigkeitsgrad* festzulegen, innerhalb dessen die (äusseren oder inneren) Beobachtungen, von denen er ausgeht, richtig sind, oder innerhalb deren er zuverlässige Resultate zu haben wünscht. —

Das hiermit bezeichnete Programm verlangt an sich nichts Neues, nur dass die strenge Durchführung bisher vielfach fehlt. Zahlenrechner haben sich von je an dasselbe angeschlossen und in Astronomie und Geodäsie ist dasselbe seit den Arbeiten von Gauss universell recipirt. Von neueren rein mathematischen Arbeiten dürften ganz besonders diejenigen von Tschebyscheff zu nennen sein. Nicht minder wird man hier den Satz von Weierstrass anführen wollen, dass man jede in einem Intervall gegebene stetige Function durch eine rationale Function endlichen Grades mit beliebiger Genauigkeit gleichmässig approximiren kann. Als neue Forderung tritt nur auf, *die bezeichnete Fragestellung als den eigentlichen Mittelpunkt aller angewandten Mathematik mehr in den Vordergrund zu rücken*, und übrigens einzusehen, *dass die approximative Auffassung der Grössenbeziehungen sehr viel mehr, als man früher wusste, unser ganzes Denken durchzieht.* Unsere Aussagen über die Natur der Dinge aber werden bescheidener werden. Man hat früher oft gesagt, dass andere als analytische Functionen in der Natur nicht vorkommen. Man wird diese Aussage jetzt dahin wenden, dass man vielleicht nur in Folge der *Ungenauigkeit unserer Naturauffassung* seither mit analytischen Functionen ausgereicht hat und zwar durchweg mit sehr einfachen analytischen Functionen. Man wird darum aber noch nicht zu dem andern Extrem über-

*) Man kommt sonst in neue Schwierigkeiten. Vergl. die Antrittsrede von Prof. Burkhardt: Mathematisches und Naturwissenschaftliches Denken, Zürich 1897.

**) Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung IX, 2 (1900).

gehen, welches Boltzmann neuerdings vertritt, wenn er die Hypothese von der Unstetigkeit der Naturerscheinungen sozusagen als Denknothwendigkeit hinstellt. —

Die Bedeutung der von der Facultät gestellten Preisfrage dürfte hiermit genügend hervorgekehrt sein. Es galt, den Complex der in Betracht kommenden Fragestellungen und Auffassungen in übersichtlicher Form darzulegen und womöglich kritisch zu sichten. Ein Mathematiker konnte zugleich unternehmen, die Lehre von den Näherungsmethoden auf einem speciellen Gebiete durchzuführen, ein Philosoph oder Psycholog, die Ungenauigkeit unserer sinnlichen Wahrnehmung nach der einen oder anderen Richtung genauer zu studiren; man denke an den von Boltzmann mit Vorliebe herangezogenen Kinematographen. Was an mathematischen Kenntnissen unbedingt verlangt werden musste, war nur, dass der Autor das Wesen der arithmetisirten Wissenschaft, wie es in den Schriften der heute maassgebenden Mathematiker zu Tage tritt, in sich aufgenommen hatte. Hierzu genügt nicht, die allgemeinen Auseinandersetzungen hervorragender Autoren gelesen zu haben, welche den Einzelheiten der modernen Präcisionsmathematik niemals näher getreten sind, mag es sich nun um Helmholtz oder Kirchhoff, Boltzmann oder Mach handeln. Mathematik lässt sich nur durch concentrirtes Studium erlernen; es giebt bei ihr keinen „Königsweg".

---

*) Im Anschluss an das vorstehend abgedruckte Gutachten verweise ich gern auf zwei meiner eigenen früheren Publicationen, die mit dem Gegenstande des Preisausschreibens in naher Beziehung stehen. Es sind dies:

Ueber den allgemeinen Functionsbegriff und dessen Darstellung durch eine willkürliche Curve (Sitzungsberichte der physikalisch-medicinischen Societät zu Erlangen vom 8. Dec. 1873; abgedruckt in Bd. 22 der Mathem. Annalen, 1883);

The Evanston Colloquium (New-York 1894, Macmillan), Vortrag VI (vom 3. Sept. 1893): *On the mathematical character of space intuition and the relation of pure mathematics to the applied sciences.* (Vergl. auch die französische Uebersetzung des Colloquium von Hrn. Laugel, die unter dem Titel „Conférences sur les Mathématiques" 1898 in Paris bei A. Hermann erschienen ist.)

Uebrigens findet man einschlägige Bemerkungen auch in den Vorträgen:

Riemann und seine Bedeutung für die Entwickelung der modernen Mathematik. Vortrag, gehalten vor der Naturforscherversammlung in Wien, 1894. (Verhandlungen der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Aerzte, Leipzig 1894, sowie Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 4, Berlin 1897).

Ueber Aufgabe und Methode des mathematischen Unterrichts an den Universitäten. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 7, Leipzig 1899.

F. Kl.

Ueber den Zusammenhang ebener algebraischer Curven mit quadratischen Formen.

Von

H. E. Timerding in Strassburg i./E.

---

§ 1.

Die Beziehung einer Ebene auf ein Bündel von quadratischen Formen. Die Hauptcurve.

Eine quadratische Form von n Variabelen x_i

(1) $$f = \sum f_{ij} x_i x_j$$

heisse *conisch*, wenn die Determinante aus ihren Coefficienten

(2) $$F = |f_{ij}|$$

verschwindet. Setzen wir nun voraus, die Coefficienten seien als homogene lineare Functionen von drei unbestimmten Grössen ξ', ξ'', ξ''' gegeben, so dass

(3) $$f_{ij} = \xi' f'_{ij} + \xi'' f''_{ij} + \xi''' f'''_{ij}$$

ist und f selbst die Form annimmt

(4) $$f = \xi' f' + \xi'' f'' + \xi''' f''',$$

wo

(5) $$f' = \sum f'_{ij} x_i x_j, \quad f'' = \sum f''_{ij} x_i x_j, \quad f''' = \sum f'''_{ij} x_i x_j$$

gesetzt ist, dann wird die Determinante F eine homogene Function n^{ten} Grades der Grössen ξ', ξ'', ξ''', sagen wir

(6) $$F = \sum F_{\alpha\beta\gamma} \xi'^{\alpha} \xi''^{\beta} \xi'''^{\gamma},$$

indem die Summation über alle α, β, γ, die der Bedingung $\alpha + \beta + \gamma = n$ genügen, zu erstrecken ist. Fasst man ξ', ξ'', ξ''' als homogene Punktcoordinaten in einer Ebene auf, so wird durch die Gleichung

$$F = 0$$

eine algebraische Curve n^{ter} Ordnung dargestellt, die wir fortan die *Hauptcurve* der Ebene nennen wollen. Zu jedem Punkte der Ebene gehört eine der quadratischen Formen, die man durch Veränderung der ξ erhält und deren Gesammtheit wir als ein *Formenbündel* bezeichnen wollen. Dies Bündel wird sonach durch die Punkte der Ebene dargestellt, und den Punkten der Hauptcurve entsprechen hierbei die conischen Formen des Bündels.

Wenn man an die Stelle der drei Grundformen f', f'', f''' irgend drei andere Formen des Bündels:

$$\begin{aligned} g' &= a_{11}f' + a_{12}f'' + a_{13}f''', \\ g'' &= a_{21}f' + a_{22}f'' + a_{23}f''', \\ g''' &= a_{31}f' + a_{32}f'' + a_{33}f''' \end{aligned}$$

bringt, so wird dadurch die Form

$$F = \sum F_{\alpha\beta\gamma}\xi'^{\alpha}\xi''^{\beta}\xi'''^{\gamma}$$

so geändert, als ob man für die Veränderlichen ξ', ξ'', ξ''' die Werthe

$$\begin{aligned} &a_{11}\xi' + a_{21}\xi'' + a_{31}\xi''', \\ &a_{12}\xi' + a_{22}\xi'' + a_{32}\xi''', \\ &a_{13}\xi' + a_{23}\xi'' + a_{33}\xi''' \end{aligned}$$

eingesetzt hätte. Die Hauptcurve bleibt dann dieselbe, nur muss man sich ihre Gleichung auf ein anderes Coordinatensystem bezogen denken. Von dem Fundamentaldreiecke dieses neuen Coordinatensystems sind die Ecken durch die Punkte gegeben, die den zu neuen Grundformen des Bündels gewählten Formen g', g'', g''' bei der ursprünglichen Beziehung der Ebene auf das Formenbündel entsprechen.

§ 2.

Die Invarianten der Formen des Bündels.

Die Coefficienten $F_{\alpha\beta\gamma}$ in der Gleichung $F = 0$ sind simultane Invarianten der drei quadratischen Formen f', f'', f''', wir wollen sie als die Fundamentalinvarianten dieser Formen bezeichnen. Um nun die Gestalt einer beliebigen simultanen Invariante der drei Formen f', f'', f''' zu erkennen, schreibe man diese Formen symbolisch:

$$\begin{aligned} f' &= (f_1'\, x_1 + f_2'\, x_2 + \cdots + f_n'\, x_n)^2, \\ f'' &= (f_1''\, x_1 + f_2''\, x_2 + \cdots + f_n''\, x_n)^2, \\ f''' &= (f_1'''x_1 + f_2'''x_2 + \cdots + f_n'''x_n)^2 \end{aligned}$$

und füge beliebig viele neue Formen

$$f^{(\mu)} = \left(f_1^{(\mu)} x_1 + f_2^{(\mu)} x_2 + \cdots + f_n^{(\mu)} x_n\right)^2$$

hinzu, die immer abwechselnd mit einer der drei ersten Formen identisch sein sollen. Dann ist jede Invariante der drei Grundformen ein Aggregat von symbolischen Producten, deren symbolische Factoren Determinanten von folgender Gestalt sind:

$$\begin{vmatrix} f_1^{(\mu_1)} & f_2^{(\mu_1)} \cdots f_n^{(\mu_1)} \\ f_1^{(\mu_2)} & f_2^{(\mu_2)} \cdots f_n^{(\mu_2)} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f_1^{(\mu_n)} & f_2^{(\mu_n)} \cdots f_n^{(\mu_n)} \end{vmatrix}.$$

Soll nun der soeben angeschriebene symbolische Factor zu einer wirklichen Function der Coefficienten in den drei Grundformen ergänzt werden, so kann dies nur durch einen Factor

$$f_1^{(\mu_1)} f_2^{(\mu_2)} \cdots f_n^{(\mu_n)}$$

oder einen Factor, der aus diesem durch beliebige Permutation der unteren Indices entsteht, geschehen. Daraus folgt aber, dass das symbolische Product die angegebene Determinante noch einmal als Factor enthält, im Ganzen also zum Quadrate oder allgemeiner zu einer geraden Potenz. Das Quadrat dieser Determinante stimmt aber bis auf einen Zahlfactor mit einer der Fundamentalinvarianten $F_{\alpha\beta\gamma}$ überein, und somit ist *jede Invariante der drei Grundformen eine ganze Function der* $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ *Fundamentalinvarianten* $F_{\alpha\beta\gamma}$.

Damit ergiebt sich aber weiter, dass diese *Fundamentalinvarianten* $F_{\alpha\beta\gamma}$ *nothwendig von einander unabhängig sind.* Denn die Anzahl der von einander unabhängigen Invarianten eines Systems von Grundformen, durch die sich alle anderen Invarianten rational ausdrücken lassen, muss mindestens ebenso gross sein als die um Eins vermehrte Differenz der Anzahl der Coefficienten in den Grundformen und der Coefficientenzahl in den linearen Substitutionsgleichungen. In unserem Falle ist die erstere Zahl $\frac{3n(n+1)}{2}$ und die letztere n^2, ihre um Eins vermehrte Differenz also

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

und dies ist genau die Anzahl der Fundamentalinvarianten. Da diese sonach von einander unabhängig sind und zwischen ihnen keine algebraische Beziehung stattfindet, ist auch die Form

$$F = \sum F_{\alpha\beta\gamma}\, \xi'^{\alpha} \xi''^{\beta} \xi'''^{\gamma}$$

eine ganz allgemeine ternäre Form n^{ten} Grades, und *jede ternäre Form lässt sich als eine symmetrische Determinante darstellen, deren Elemente lineare Functionen der Veränderlichen sind.*

Als eigentliche Invarianten der drei Grundformen f', f'', f''' kann man nur diejenigen bezeichnen, welche für die Coefficienten jeder dieser Formen homogen sind. Diese Invarianten werden also durch drei ganze Zahlen a, b, c charakterisirt, welche ihre Grade in den Coefficienten der einzelnen Formen angeben. Die Summe $a + b + c$ dieser drei Zahlen, die immer ein Vielfaches von n sein muss, kann der Gesammtgrad der Invariante heissen. Dann zeigt sich sofort, dass für den niedrigst möglichen Gesammtgrad n die Fundamentalinvarianten die einzig existirenden Invarianten sind. Um die Invarianten vom Gesammtgrade $m \cdot n$ zu finden, erhebe man die Form

$$\sum u_{\alpha\beta\gamma} F_{\alpha\beta\gamma} \xi'^{\alpha} \xi''^{\beta} \xi'''^{\gamma}$$

in die m^{te} Potenz, und ersetze in dem Resultate den Coefficienten $u_{\alpha\beta\gamma} u_{\alpha'\beta'\gamma'} \cdots$ durch eine beliebige Zahl $u_{\alpha\beta\gamma\alpha'\beta'\gamma'\ldots}$, dann giebt in der homogenen Function mn^{ten} Grades von ξ', ξ'', ξ''', die man vor sich hat, der Coefficient von $\xi'^a \xi''^b \xi'''^c$, wo $a + b + c = m \cdot n$, die allgemeinste Invariante, die in den Coefficienten der einzelnen Formen die Grade a, b, c hat.

Besondere Beachtung verdienen unter diesen Invarianten diejenigen, welche gleichzeitig Invarianten der ternären Form sind und welche man als *Bündelinvarianten* bezeichnen könnte. Diese Invarianten haben nämlich die besondere Eigenschaft, dass sie sich, wenn man die Grundformen f', f'', f''' durch drei andere Formen des Bündels

$$\begin{gathered} a_{11} f' + a_{12} f'' + a_{13} f''', \\ a_{21} f' + a_{22} f'' + a_{23} f''', \\ a_{31} f' + a_{32} f'' + a_{33} f''' \end{gathered}$$

ersetzt, nur um einen constanten Factor ändern, und zwar ist dieser Factor eine Potenz der Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

§ 3.

Darstellung quadratischer Formen durch ebene algebraische Curven.

Bilden wir nun die quadratische Form von n neuen Veränderlichen u, die sich darstellt wie folgt:

$$(7) \qquad F_{uu} = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} & u_1 \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} & u_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} & u_n \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_n & 0 \end{vmatrix},$$

oder, wie wir auch dafür schreiben wollen:

$$(8) \qquad F_{uu} = \sum F_{ij} u_i u_j,$$

so ist dies eine Function $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades von den Grössen ξ', ξ'', ξ'''; bilden wir dieselbe Form noch einmal für andere Variabele v:

$$(8') \qquad F_{vv} = \sum F_{ij} v_i v_j$$

und weiter die bilineare Form:

$$(9) \qquad F_{uv} = \sum F_{ij} u_i v_j,$$

die ebenfalls eine Function der ξ vom Grade $n-1$ ist, so ist der Ausdruck $F_{uu} F_{vv} - F_{uv}^2$ nach einem Satze von Hesse durch F theilbar und demnach

$$(10) \qquad F_{uu} F_{vv} - F_{uv}^2 = F \cdot U,$$

wo U eine Function $(n-2)^{\text{ten}}$ Grades der Grössen ξ ist. Hieraus ergiebt sich, dass $F_{uu} = 0$ und $F_{vv} = 0$ für feste Werthe der u und v zwei Berührungscurven der Hauptcurve $F = 0$ darstellen, nämlich solche Curven $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche die Hauptcurve überall berühren, wo sie ihr begegnen, also in $\frac{1}{2} n(n-1)$ Punkten, und dass durch die Berührungspunkte dieser beiden Curven mit der Hauptcurve die durch die Gleichung $F_{uv} = 0$ gegebene Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung hindurchgeht.

Die Gleichung einer ganz beliebigen Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung lässt sich auf die Form bringen

$$\sum u_{ij} F_{ij} = 0,$$

indem die F_{ij}, der obigen Festsetzung gemäss, die Unterdeterminanten von F bezeichnen. Nun *ruht* nach einem Ausdrucke von Herrn Reye die Form

(1) $$f = \sum f_{ij} x_i x_j$$
auf der Form
(11) $$\varphi = \sum u_{ij} x_i x_j,$$
wenn die Beziehung
(12) $$\sum u_{ij} F_{ij} = 0$$
erfüllt ist. Ist die Form f insbesondere conisch, so dass für bestimmte Werthe der x die n Gleichungen

$$\sum_i f_{ij} x_i = 0, \quad j = 1, 2 \cdots n,$$

befriedigt sind, so muss, wenn der Bedingung (12) genügt werden soll, für dieselben Werthe der x auch $\varphi = 0$ werden, denn es ist für diese Werthe

$$x_i x_j = \varrho F_{ij}, \quad i, j = 1, 2 \cdots n:$$

Den Formen des Formenbündels, die auf einer beliebig gegebenen quadratischen Form ruhen, entsprechen also in der Bildebene immer die Punkte einer Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, und die Mannigfaltigkeit der quadratischen Formen von n Veränderlichen ist so auf die isomorphe Mannigfaltigkeit der Curven $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung in einer Ebene eindeutig und linear bezogen, indem die Coefficienten in den Gleichungen dieser Curven lineare Functionen von den Coefficienten der quadratischen Formen sind.

Wird die quadratische Form φ (11) ein vollständiges Quadrat, also

$$\varphi = (u_1 x_1 + u_2 x_2 + \cdots + u_n x_n)^2,$$

so ruhen auf ihr alle Formen des Bündels, für welche die Bedingung

$$\sum F_{ij} u_i u_j = 0$$

erfüllt ist, und dieser Formenschar entspricht, wie wir soeben gesehen haben, eine Berührungscurve der Hauptcurve. Wir wollen von den Formen der Schar sagen, dass sie auch auf der linearen Function $u = \Sigma u_i x_i$ ruhen, und dies bedeutet dann, dass von allen Formen der Schar die Determinante verschwindet, wenn man zwischen den Veränderlichen x die lineare Beziehung $u = 0$ annimmt.

Unterwirft man die Formen des Bündels alle einer und derselben linearen Transformation, so kann man jede transformirte Form demselben Punkte der Bildebene zuweisen, dem die ursprüngliche Form entsprach. Hierbei gehen die conischen Formen, welche den Punkten der Hauptcurve entsprechen, wieder in conische Formen über, und die Formen, welche den Punkten einer Berührungscurve des zugehörigen Systems entsprechen, haben auch nach der Transformation die Eigenschaft, dass sie alle auf einer linearen Form ruhen.

Sind nun umgekehrt zwei Bündel von quadratischen Formen eindeutig auf die Punkte derselben Ebene bezogen, so dass nicht bloss den conischen Formen in den Bündeln beidemal die Punkte derselben Hauptcurve entsprechen, sondern auch denselben Berührungscurven dieser Hauptcurve in beiden Bündeln Scharen von solchen Formen correspondiren, deren Determinante jedesmal durch eine und dieselbe lineare Relation zwischen den Veränderlichen zum Verschwinden gebracht wird, so resultirt hieraus eine eindeutige Beziehung zwischen den Formen der beiden Bündel. Alle Formen des ersten Bündels lassen sich aber in die entsprechenden Formen des zweiten Bündels durch dieselbe Transformation der Veränderlichen überführen. Welcher Art diese Transformation ist, erhellt daraus, dass den Formen des ersten Bündels

$$f = \sum f_{ij} x_i x_j,$$

welche einer Beziehung

$$\sum \frac{\partial F}{\partial f_{ij}} u_i u_j = 0$$

genügen, solche Formen

$$g = \sum g_{ij} x_i x_j$$

des zweiten Bündels zugeordnet sein müssen, deren Coefficienten eine Gleichung

$$\sum \frac{\partial G}{\partial g_{ij}} v_i v_j = 0$$

befriedigen, indem

$$G = |g_{ij}|$$

die Determinante der Form g bezeichnet. So wird jeder linearen Function $\Sigma u_i x_i$ eine neue lineare Function $\Sigma v_i x_i$ zugewiesen, in welche sie durch die Transformation der Veränderlichen übergehen muss, und daraus folgt, dass diese Transformation eine lineare ist und die *Formen des zweiten Bündels sich somit durch eine und dieselbe lineare Transformation aus den Formen des ersten Bündels ableiten lassen.*

§ 4.

Ketten von Berührungscurven.

Der oben benutzte Satz, dass der Ausdruck $F_{uu} F_{vv} - F_{uv}^2$ durch die Determinante F theilbar ist, fliesst aus einem Theorem, das von Sylvester herrührt*) und sich folgendermassen formuliren lässt. *Die Determinante*

*) Man sehe in Band 88 des Journals für Mathematik, Seite 52.

$$(13)\qquad U_n^{(m)} = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} & u_1' & u_1'' & \cdots & u_1^{(m)} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} & u_2' & u_2'' & \cdots & u_2^{(m)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} & u_n' & u_n'' & \cdots & u_n^{(m)} \\ u_1' & u_2' & \cdots & u_n' & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ u_1'' & u_2'' & \cdots & u_n'' & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_1^{(m)} & u_2^{(m)} & \cdots & u_n^{(m)} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

ist, wenn F und F_{ij} die oben angegebene Bedeutung haben und

$$(14)\qquad F^{(\mu\nu)} = \sum_{ij} F_{ij} u_i^{(\mu)} u_j^{(\nu)}$$

gesetzt wird, identisch mit dem folgenden Ausdrucke:

$$(15)\qquad U_n^{(m)} = \frac{1}{F^{m-1}} \begin{vmatrix} F^{(11)} & F^{(12)} & \ldots & F^{(1m)} \\ F^{(21)} & F^{(22)} & \ldots & F^{(2m)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ F^{(m1)} & F^{(m2)} & \ldots & F^{(mm)} \end{vmatrix}.$$

Die Gleichung $U_n^{(m)} = 0$ drückt, wenn $U_n^{(m)}$ in der Form (13) gegeben ist, aus, dass für ein Werthesystem $x_1, x_2 \cdots x_n$, welches den m Gleichungen genügt:

$$(\alpha)\qquad u_1^{(\mu)} x_1 + u_2^{(\mu)} x_2 + \cdots + u_n^{(\mu)} x_n = 0, \qquad \mu = 1, 2 \cdots m,$$

sich auch die n Gleichungen:

$$(\beta)\quad f_{i1} x_1 + f_{i2} x_2 + \cdots + f_{in} x_n = \eta' u_i' + \cdots + \eta^{(m)} u_i^{(m)}, \quad i = 1, 2 \cdots n,$$

durch m neue Grössen $\eta' \cdots \eta^{(m)}$ befriedigen lassen. Multiplicirt man von den Gleichungen (β) die i^{te} mit F_{ij} und addirt alle zu einander, so findet man, indem man

$$u_i = \eta' u_i' + \cdots + \eta^{(m)} u_i^{(m)}$$

setzt:

$$F \cdot x_j = \sum_i F_{ij} u_i, \qquad j = 1, 2 \cdots n,$$

und multiplicirt man von diesen Gleichungen wiederum die j^{te} mit $u_j^{(\mu)}$ und addirt, so wird

$$\begin{aligned} F \cdot \sum_j u_j^{(\mu)} x_j &= \sum_{ij} F_{ij} u_i u_j^{(\mu)} \\ &= \sum_\nu \eta^{(\nu)} \sum_{ij} F_{ij} u_i^{(\nu)} u_j^{(\mu)} \\ &= \sum_\nu \eta^{(\nu)} F^{(\mu\nu)}. \end{aligned}$$

Nach (α) ist aber

$$\sum_j u_j^{(\mu)} x_j = 0,$$

also wird auch

$$\sum_\nu F^{(\mu\nu)} \eta^{(\nu)} = 0, \quad \text{für} \quad \mu = 1, 2 \cdots m,$$

und hieraus folgt durch Elimination der $\eta^{(\nu)}$:

$$|F^{(\mu\nu)}| = 0.$$

$U_n^{(m)}$ muss also mit dieser Determinante übereinstimmen bis auf einen Factor, der die Grössen u nicht mehr enthält. Um ihn zu bestimmen, kann man beispielsweise annehmen, es seien $u_1' = 1$, $u_2'' = 1 \cdots u_m^{(m)} = 1$ und alle anderen $u_i^{(\mu)} = 0$, dann findet man mit Leichtigkeit den in dem Satze angegebenen Werth.

Ist nun wieder

$$f_{ij} = \xi' f_{ij}' + \xi'' f_{ij}'' + \xi''' f_{ij}'''$$

und lassen wir in dem Ausdrucke (13) die Zahl m nach und nach die Werthe von 1 bis $n-1$ annehmen, so finden wir, indem wir

$$U_n^{(m)} = 0$$

setzen, für veränderliche ξ und beliebige u der Reihe nach ein System von Curven der Ordnung $n-1$, $n-2 \cdots 1$, und zwar hat das System der Curven $(n-m)^{\text{ter}}$ Ordnung $(n-m)m$ Dimensionen, solange

$$(n-m)m < \frac{1}{2}(n-m)(n-m+3),$$

also $3(m-1) < n$ ist. Ist die Ordnung $n-m$ kleiner als es diese Ungleichheit verlangt, so gehören alle Curven der betreffenden Ordnung zu dem Systeme.

Unter den Curven des $(m+1)^{\text{ten}}$ Systems besteht eine Mannigfaltigkeit von $n-m-1$ Dimensionen aus Berührungscurven einer bestimmten Curve des m^{ten} Systems. Die Gleichung $U_n^{(m+1)} = 0$ einer dieser Curven erhält man aus der Gleichung $U_n^{(m)} = 0$ der Curve des m^{ten} Systems, indem man zu den Elementen der Determinante (13) auf ihrer linken Seite eine Reihe und Spalte von

$$n \text{ Grössen } u_i^{(m+1)} \quad \text{und} \quad m \text{ mal } 0$$

hinzufügt. Diese Grössen kann man aber, ohne die Gleichung zu ändern, durch

$$n \text{ Grössen } \lambda' u_i' + \cdots + \lambda^{(m+1)} u_i^{(m+1)} \quad \text{und} \quad m \text{ mal } 0$$

ersetzen. Die $m+1$ willkürlichen Werthe $\lambda^{(\mu)}$ lassen sich insbesondere so wählen, dass m von den n Grössen verschwinden, und die übrigen $n-m$

sind dann in der Curvengleichung homogen und quadratisch enthalten. — Umgekehrt hat jede Curve des $(m+1)^{\text{ten}}$ Systems eine Mannigfaltigkeit von m Dimensionen unter den Curven des m^{ten} Systems zu Berührungscurven. Addirt man nämlich in der $(m+1)$ fach geränderten Determinante auf der linken Seite der Gleichung $U_n^{(m+1)} = 0$ die letzte Spalte und letzte Zeile, mit m beliebigen Parametern $\frac{\lambda'}{\lambda^{(m+1)}} \cdots \frac{\lambda^{(m)}}{\lambda^{(m+1)}}$ multiplicirt, zu den m vorhergehenden Spalten und Reihen und lässt die letzte Spalte und Reihe dann weg, so findet man die Gleichung einer der zu der Curve $U_n^{(m+1)} = 0$ des $(m+1)^{\text{ten}}$ Systems gehörigen Berührungscurven des m^{ten} Systems. Dieselbe Gleichung hätte man auch erhalten, wenn man in der $(m+1)$ fach geänderten Determinante die $(n+\mu)^{\text{te}}$ Spalte und $(n+\nu)^{\text{te}}$ Zeile fortgelassen, die so entstehende m fach geänderte Determinante mit $\lambda^{(\mu)}\lambda^{(\nu)}$ multiplicirt und diese Ausdrücke für die verschiedenen μ und ν alle zu einander addirt gleich Null gesetzt hätte. Die Gleichung enthält also die $m+1$ Parameter $\lambda^{(\mu)}$ homogen und quadratisch.

Auf der anderen Seite zeigt die zweite Darstellungsform (15) von $U_n^{(m)}$, dass durch m Berührungscurven $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung der Hauptcurve n^{ter} Ordnung immer eine Curve des m^{ten} Systems festgelegt wird. Die Gleichung $U_n^{(m)} = 0$ wird nämlich, wenn man sie in dieser Form voraussetzt, durch die m Gleichungen von Berührungscurven

$$F^{(11)} = 0,\ F^{(22)} = 0 \cdots F^{(mm)} = 0$$

vollkommen bestimmt, da ja allgemein

$$F^{(\mu\nu)} = \frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial F^{(\mu\mu)}}{\partial u_i^{(\mu)}} u_i^{(\nu)}$$

ist. Die durch die Gleichung $U_n^{(m)} = 0$ dargestellte Curve $(n-m)^{\text{ter}}$ Ordnung gehört aber nicht bloss zu diesen m Berührungscurven $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, sondern zu einem ganzen Systeme von solchen Curven. Die Gleichung

$$\sum^m F^{(\mu\nu)} \eta^{(\mu)} \eta^{(\nu)} = 0 \tag{16}$$

stellt nämlich für jede Werthecombination der m Grössen η eine Berührungscurve der Hauptcurve dar. In der That, setzen wir ein

$$F^{(\mu\nu)} = \sum_{ij} F_{ij} u_i^{(\mu)} u_j^{(\nu)}$$

und machen dann wieder

$$u_i = \eta' u_i' + \cdots + \eta^{(m)} u_i^{(m)},$$

so wird die Gleichung (16):

$$\sum^{n} F_{ij} u_i u_j = 0,$$

und dies ist die Gleichung einer Berührungscurve. Die Gleichung (16) enthält m Parameter η homogen und quadratisch, und das System dieser Berührungscurven ist in einem linearen Curvensysteme von $\frac{1}{2} m(m+3)$ Dimensionen enthalten.

§ 5.

Syzygetische und azygetische Systeme von Berührungscurven.

Jedem Punkte der Hauptcurve, mit den Coordinaten ξ', ξ'', ξ''', entspricht ein bestimmtes Werthesystem $x_1 \cdots x_n$, für welches die n Gleichungen

$$\sum_i (\xi' f'_{ij} + \xi'' f''_{ij} + \xi''' f'''_{ij}) x_i = 0, \qquad j = 1, 2 \cdots n,$$

zusammenbestehen. Es ist nun zu berücksichtigen, dass für die $\frac{1}{2} n(n-1)$ Werthesysteme x_i, die so den sämmtlichen Berührungspunkten einer Berührungscurve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung des zugehörigen Systems

$$\sum F_{ij} u_i u_j = 0$$

entsprechen, zwar eine lineare Function, nämlich

$$u = \sum u_i x_i,$$

aber keine eigentliche quadratische Form der n Veränderlichen x_i verschwindet. Durch jene Berührungspunkte lassen sich nämlich wohl n fach unendlich viele Curven $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung legen, die quadratischen Formen, welche zu diesen Curven gehören, indem auf ihnen die den Curvenpunkten entsprechenden Formen des Bündels ruhen, zerfallen aber *alle* in zwei lineare Factoren, und zwar ist einer von diesen für alle die quadratischen Formen derselbe, nämlich u.

Durch alle Berührungspunkte der Berührungscurve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung bis auf einen lässt sich sicher eine Curve $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung hindurchlegen. Dieselbe bildet mit jeder geraden Linie g in der Bildebene

$$\alpha' \xi' + \alpha'' \xi'' + \alpha''' \xi''' = 0$$

zusammen eine Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung. Die zu dieser Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung gehörende quadratische Form der n Veränderlichen verschwindet nun erstens für die n Werthesysteme x_i, welche den n Schnittpunkten

der Hauptcurve mit der geraden Linie g entsprechen, und also zusammen mit je drei Werthen ξ', ξ'', ξ''' die Gleichungen befriedigen:

$$\sum_i (\xi' f'_{ij} + \xi'' f''_{ij} + \xi''' f'''_{ij}) x_i = 0, \qquad j = 1, 2 \cdots n,$$

$$\alpha' \xi' + \alpha'' \xi'' + \alpha''' \xi''' = 0,$$

aber, was zu beachten ist, nicht alle einer und derselben linearen Gleichung $\Sigma u_i x_i = 0$ genügen, und die Form verschwindet ausserdem für die den $\frac{1}{2} n(n-1) - 1$ Berührungspunkten in der angegebenen Weise entsprechenden Werthesysteme x_i. Durch diese $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)$ Werthesysteme, für welche sie verschwinden soll, ist die quadratische Form aber bis auf einen constanten Factor bestimmt, und sie ist, wenn die gerade Linie g nicht durch den letzten Berührungspunkt der Berührungscurven hindurchgeht, keine zerfallende Form. Da sie deswegen nach dem Vorhergehenden nicht auch für das Werthesystem verschwinden kann, das dem letzten Berührungspunkte der Berührungscurve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung entspricht, so *liegt dieser letzte Berührungspunkt auch nicht mit den übrigen auf derselben Curve $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung.*

Um zu erkennen, welche Bedeutung diesem Umstande zukommt, fassen wir einmal den entgegengesetzten Fall ins Auge, dass die Berührungspunkte einer Berührungscurve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung auf einer Curve $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung liegen. Ist dann $\varphi_{n-1} = 0$ die Gleichung der Berührungscurve, $\varphi_{n-2} = 0$ diejenige der Curve $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, so lässt sich die Gleichung der Hauptcurve in die Form bringen

$$\varphi_{n-1} \varphi_{n-3} - \varphi_{n-2}^2 = 0.$$

Die Curve $\varphi_{n-3} = 0$ ist dann eine Berührungscurve $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung der Hauptcurve, und zwar berührt sie in den $\frac{1}{2} n(n-3)$ Punkten, in welchen die Curve $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung die Hauptcurve ausser den Berührungspunkten der Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung schneidet. Die linke Seite der vorigen Gleichung hat aber den folgenden Werth:

$$\varphi_{n-1} \varphi_{n-3} - \varphi_{n-2}^2 = \varphi_{n-4} \cdot F,$$

indem man mit φ_{n-4} eine bestimmte Function $(n-4)^{\text{ten}}$ Grades der Punktcoordinaten bezeichnet. Die Gleichung

$$\varphi_{n-4} F + \varphi_{n-2}^2 = 0,$$

stellt dann durch $\varphi_{n-3} = 0$ getheilt irgend eine Berührungscurve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung dar, deren Berührungspunkte mit den Berührungspunkten der Curve $\varphi_{n-3} = 0$ auf einer Curve $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung liegen, indem die

Berührungscurve $(n-4)^{ter}$ Ordnung $\varphi_{n-4}=0$ der Curve $\varphi_{n-3}=0$ durch φ_{n-2} eindeutig bestimmt ist.

Alle diese Curven bilden ein System von Berührungscurven, welcher der Berührungscurve $(n-3)^{ter}$ Ordnung zugeordnet ist. Die Anzahl dieser letzteren Curven ist endlich, und ebensogross ist die Anzahl dieser Systeme von Berührungscurven $(n-1)^{ter}$ Ordnung, die wir syzygetisch nennen wollen. Die übrigen Systeme, welche nothwendig zu geraden Thetacharakteristiken gehören, mögen azygetisch heissen. Wir können dann das vorhin gewonnene Resultat auch so aussprechen: *Die Berührungscurven $(n-1)^{ter}$ Ordnung, zu welchen die Beziehung einer algebraischen Curve auf ein Bündel von quadratischen Formen führt, bilden nothwendig ein azygetisches System und gehören zu einer geraden Charakteristik.* Diese Charakteristik bestimmt sich sehr einfach, denn die Curve $(n-2)^{ter}$ Ordnung, die durch alle Berührungspunkte einer der Berührungscurven bis auf einen geht, schneidet die Curve n^{ter} Ordnung noch in $p=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Punkten, und in diesen Punkten verschwindet eine Thetafunction mit gerader Charakteristik, wenn man zur unteren Grenze der Normalintegrale erster Gattung, die ihre Argumente bilden, den letzten Berührungspunkt der Berührungscurve wählt. Wenn man insbesondere die einzelnen, nicht zerfallenden Curven $(n-1)^{ter}$ Ordnung sucht, welche die Hauptcurve in allen Schnittpunkten einer beliebigen geraden Linie bis auf einen und ausserdem in p Punkten berühren, so verschwindet in diesen letzteren Punkten immer eine Thetafunction mit gerader Charakteristik, indem zur unteren Grenze der Integrale erster Gattung der letzte Schnittpunkt der geraden Linie gewählt wird, und zu jeder dieser geraden Charakteristiken gehört i. A. eine Darstellung der Curve durch das Verschwinden einer symmetrischen Determinante, deren Elemente lineare Functionen der Punktcoordinaten sind. Diese Darstellung ist also auf höchstens $2^{p-1}(2^p+1)$ Arten möglich, denn dies ist die Anzahl aller geraden Charakteristiken überhaupt.*)

§ 6.

Mehrfache Punkte der Hauptcurve.

Wenn die Hauptcurve beliebig viele Doppelpunkte besitzt, so gehen die Berührungscurven, zu denen die Beziehung der Curve auf ein Bündel von quadratischen Formen führt, durch jeden Doppelpunkt hindurch. Soll nämlich eine Curve, die durch das Verschwinden einer symmetrischen Determinante F dargestellt wird, einen bestimmten Punkt doppelt ent-

*) Ueber die Ausnahmefälle, die bei Berührungscurven auftreten können, vgl. man H. Weber, Math. Annalen Bd. 13 und M. Noether, ebenda Bd. 17, § 8.

halten, so ist dies nur möglich, wenn für die Coordinaten dieses Punktes die Determinante F mit allen ersten Unterdeterminanten F_{ij} verschwindet. Dann verschwinden in der That auch die Ableitungen dieser Determinante nach den Coordinaten. Wenn nun von einer quadratischen Form die Determinante mit allen ersten Unterdeterminanten verschwindet, so möge die Form doppelt conisch heissen. Von ihr verschwinden dann alle Derivirten für unendlich viele Werthesysteme $x_i^{(0)}$, die sich aus zweien unter ihnen, x_i' und x_i'' durch lineare Combination, $\lambda' x_i' + \lambda'' x_i''$, erhalten lassen, und wenn die Form für ein Werthesystem x_i verschwindet, so verschwindet sie auch für jedes Werthesystem $\lambda x_i + \lambda' x_i' + \lambda'' x_i''$. Mit Benutzung dieses Ausdruckes können wir sagen: *Die Hauptcurve in der Bildebene hat ebensoviel Doppelpunkte, als in dem zugehörigen Bündel quadratischer Formen doppelt conische Formen enthalten sind.*

Bilden wir nun wieder die Functionen $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades für ξ', ξ'', ξ'''

$$\sum u_{ij} F_{ij},$$

so verschwinden diese Functionen in jedem Doppelpunkte der Hauptcurve, da für diesen alle $F_{ij} = 0$ werden, und jeder dieser Functionen entspricht nicht mehr, wie wir oben angegeben haben, eine bestimmte quadratische Form der n Veränderlichen, sondern eine lineare Mannigfaltigkeit von solchen Formen, deren Dimensionenzahl durch die Anzahl der Doppelpunkte angegeben wird, und alle diese Mannigfaltigkeiten haben eine lineare Mannigfaltigkeit der nächstniedrigen Stufe mit einander gemein.

Man kann die vorstehenden Betrachtungen sofort auf den Fall ausdehnen, dass die Hauptcurve einen Punkt von beliebiger Multiplicität μ enthält. Dann nämlich muss für die Coordinaten dieses Punktes die Determinante F mit allen $(\mu-1)^{\text{ten}}$ Minoren verschwinden. Wenn nun von einer quadratischen Form die Determinante mit allen $(\mu-1)^{\text{ten}}$ Unterdeterminanten verschwindet, so verschwinden alle Derivirten dieser Form für $(\mu-1)$ fach unendlich viele Werthesysteme $x_i^{(0)}$, die sich aus μ unter ihnen, $x_i', x_i'' \cdots x_i^{(\mu)}$ folgendergestalt zusammensetzen lassen:

$$x_i^{(0)} = \lambda' x_i' + \lambda'' x_i'' + \cdots + \lambda^{(\mu)} x_i^{(\mu)},$$

und wenn die Form für ein Werthesystem x_i verschwindet, so verschwindet sie immer auch für jedes Werthesystem $\lambda x_i + \lambda' x_i' + \cdots + \lambda^{(\mu)} x_i^{(\mu)}$. Die Form soll dann μ fach conisch heissen, und *es entspricht sonach jedem μ fachen Punkte der Hauptcurve eine μ fach conische Form des zugehörigen Bündels von quadratischen Formen.* Jede der Berührungscurven $\Sigma u_i u_j F_{ij} = 0$ hat in dem μ fachen Punkte der Hauptcurve einen $(\mu-1)$ fachen Punkt, denn jede der Functionen F_{ij} verschwindet für die Coordinaten jenes μ fachen Punktes mit allen $(\mu-2)^{\text{ten}}$ Derivirten.

Ueber die Definition des Begriffs der Länge krummer Linien.

Von

E. Schmidt in Berlin.

Gegen die allgemein anerkannte und in den Arbeiten von Scheefer, Jordan und Study*) vollständig durchgeführte Definition der Bogenlänge als Grenzwerth der Umfänge der in einem bestimmten Sinne eingeschriebenen Polygone mit gleichmässig unendlich klein werdenden Seiten wäre vielleicht der Einwand nicht ganz unberechtigt, dass sie zwar inhaltlich vollständig die nach dem Sprachgebrauch sich dem Worte zuordnenden Vorstellungen deckt, dass aber als begriffsbestimmendes Merkmal eine auf einen unendlichen Process sich beziehende Eigenschaft benutzt wird, welche der natürlichen Vorstellung nicht als primäre und wesentlichste Eigenschaft der Curvenlänge erscheinen dürfte. Der allgemein verbreitete Begriff von der Länge krummer Linien entspringt, wie Du Bois-Reymond**) richtig bemerkt, der unmittelbaren Naturanschauung, indem ihn die Verbiegung gerader und die Streckung krummer linienförmiger Gegenstände d. h. in mathematischer Ausdrucksweise die Rectification erzeugt. Es schien mir daher die Frage nicht ohne Interesse zu sein, ob sich die Definition des Begriffs der Länge krummer Linien aufbauen lässt auf einer diesen Begriff nicht voraussetzenden Definition der Rectification. Ich werde im folgenden zeigen, dass dieses auf eine sehr einfache Weise möglich ist und zwar ohne Beziehung der begriffsbestimmenden Eigenschaften auf einen unendlichen Process. Den Begriff der Entfernung zweier Punkte oder der Länge einer geradlinigen Strecke im Sinne der gewöhnlichen Geometrie setze ich als gegeben voraus.

I. Ich bezeichne die ganz im Endlichen liegende perfekte***) beliebig im Raum vertheilte Punktmenge β als eine Abbildung der ganz im

---

*) Scheefer, Acta Mathematica Bd. 5; Jordan, Cours d'Analyse 2. Aufl., Bd. 1, VIII; Study, Mathematische Annalen Bd. 47, S. 298.

**) Du Bois-Reymond, Mathematische Annalen Bd. 15, Seite 285.

***) Unter einer perfekten Punktmenge verstehe ich nach Cantor, Acta Mathe-

Endlichen liegenden perfekten beliebig im Raum vertheilten Punktmenge α, oder sage, α sei auf β abgebildet, wenn die Punkte von β den Punkten von α eindeutig stetig und eindeutig umkehrbar zugeordnet sind, und in diesem Sinne soll im folgenden das Wort „abbilden" auch nur gebraucht werden. Jordan hat bewiesen, dass in diesem Falle, die Punkte von α den Punkten von β auch stetig zugeordnet sind*). Hieraus ergiebt sich, da, wie direct aus der Voraussetzung folgt, die Punkte von α den Punkten von β auch eindeutig und eindeutig umkehrbar zugeordnet sind, dass β auch auf α abgebildet ist d. h., dass die Beziehung der Abbildung eine gegenseitige ist.

II. Es bedeute γ auch eine ganz im Endlichen liegende perfekte Punktmenge, die beliebig im Raum vertheilt sein mag. Ist dann α auf β und β auf γ abgebildet, so entsteht eine Abbildung von α auf γ, wenn die denselben Punkten von β entsprechenden Punkte von α und γ einander zugeordnet werden. Wegen der Gegenseitigkeit der Beziehung der Abbildung kann der Inhalt dieses letzten Satzes auch in folgender für die Anwendung praktischerer Weise formulirt werden: Sind α und β und β und γ auf einander abgebildet, so entsteht eine Abbildung von α und γ auf einander, wenn die denselben Punkten von β entsprechenden Punkte von α und γ einander zugeordnet werden.

III. Um unwesentliche Complicationen zu vermeiden, will ich die nachfolgenden Untersuchungen auf ganz im Endlichen liegende stetige Curven ohne mehrfache Punkte beschränken. Ich definire also im Wesentlichen nach Study**) ein einfaches Curvenstück als eine solche ganz im Endlichen liegende perfekte Punktmenge, welche sich auf die Gesammtheit der Punkte eines endlichen continuirlichen Geradenstücks einschliesslich seiner beiden Begrenzungspunkte abbilden lässt.

IV. Es seien ABC drei Punkte eines einfachen Curvenstücks L, welches auf das endliche continuirliche Geradenstück P abgebildet sei. Liegt dann in der geradlinigen Abbildung der dem Punkte B entsprechende Punkt zwischen den den Punkten A und C entsprechenden Punkten, so sagt man, dass der Curvenpunkt B zwischen den Curvenpunkten A und C liegt. Für die Punkte eines einfachen Curvenstücks sind nun die Beziehungen des Zwischenseins unabhängig von der zu Grunde gelegten speciellen Abbildung des Curvenstücks auf ein endliches continuirliches

matica Bd. 2, S. 405 eine solche, welche mit der aus ihren Häufungspunkten gebildeten Punktmenge identisch ist.

*) Jordan, Cours d'Analyse Bd. 1, S. 53, II. Aufl. Jordan beweist hier den Satz in weiterem Umfange, nämlich für diejenigen Punktmengen, welche er als „borné et parfait" bezeichnet, und welche dadurch charakterisirt sind, dass sie ganz im Endlichen liegen und ihre Häufungspunkte enthalten.

**) Study, Mathematische Annalen Bd. 47, S. 314.

Geradenstück. Beweis: Es sei das einfache Curvenstück L auf die beiden continuirlichen endlichen Geradenstücke P und P' abgebildet, und es mögen den Curvenpunkten ABC in den beiden Geradenstücken P und P' bezüglich die Punkte abc und $a'b'c'$ entsprechen. Ordnet man nun die denselben Curvenpunkten entsprechenden Punkte von P und P' einander zu, so erhält man gemäss (II) eine Abbildung von P und P' auf einander. Es sind mithin gemäss der in (I) gegebenen Definition der Abbildung die Punkte von P den Punkten von P' stetig zugeordnet. Liegt nun b zwischen a und c, so folgt aus dem Hauptsatz über stetige Functionen, dass b mindestens einem zwischen a' und c' gelegenen Punkte des Geradenstücks P' zugeordnet ist. Gemäss der gegenseitigen Eindeutigkeit der durch eine Abbildung dargestellten Zuordnung ist nun b' der einzige im Geradenstück P' dem Punkte b entsprechende Punkt, folglich liegt b' zwischen a' und c'. q. e. d.

V. Diejenigen beiden Punkte eines einfachen Curvenstücks, welche bei einer Abbildung desselben auf ein endliches continuirliches Geradenstück den beiden Endpunkten des letzteren entsprechen, heissen die beiden Endpunkte des Curvenstücks; sie sind dadurch charakterisirt, dass alle übrigen Punkte des Curvenstücks zwischen ihnen liegen, und entsprechen bei jeder beliebigen anderen Abbildung des Curvenstücks auf ein endliches continuirliches Geradenstück, da in demselben gemäss (IV) jeder ihnen nicht entsprechende Punkt zwischen den ihnen entsprechenden beiden Punkten liegt, den beiden Endpunkten des Geradenstücks.

VI. Ist AB ein einfaches Curvenstück mit den Endpunkten A und B und BC ein einfaches Curvenstück mit den Endpunkten B und C, und haben diese beiden Curvenstücke ausser dem Punkte B keinen gemeinsamen Punkt, so bildet die Gesammtheit der in ihnen enthaltenen Punkte wieder ein einfaches Curvenstück, welches als aus den Curvenstücken AB und BC zusammengesetzt bezeichnet werden mag. Denn gemäss der in (III) gegebenen Definition giebt es ein endliches continuierliches Geradenstück, auf welches das Curvenstück AB, und ein endliches continuirliches Geradenstück, auf welches das Curvenstück BC abbildbar ist; fügt man nun diese Geradenstücke so zusammen, dass sie ein continuirliches Geradenstück bilden, dessen Länge gleich der Summe ihrer Längen ist, und dass die in ihnen dem Punkte B gemäss (V) entsprechenden Endpunkte zusammenfallen, so erhält man ein endliches continuirliches Geradenstück, auf welches die eine ganz im Endlichen liegende perfekte Punktmenge bildende Gesammtheit der Punkte der Curvenstücke AB und BC sich abbilden lässt.

VII. Andererseits bildet auch die Gesammtheit der zwischen zwei Punkten eines einfachen Curvenstücks gelegenen Punkte desselben ein-

schliesslich jener beiden Punkte ein einfaches Curvenstück. Denn entsprechen bei einer Abbildung eines einfachen Curvenstücks auf ein endliches continuirliches Geradenstück den beiden beliebigen Punkten C und D des ersteren die Punkte c und d des letzteren, so ist gemäss (IV) die Gesammtheit der zwischen C und D gelegenen Curvenpunkte einschliesslich der Punkte C und D der Gesammtheit der Punkte des Geradenstücks $\overline{cd}$*) eindeutig und eindeutig umkehrbar zugeordnet. Da diese Zuordnung auch stetig sein muss, da ferner die Gesammtheit der Punkte des Geradenstücks $\overline{cd}$ eine ganz im Endlichen liegende perfekte Punktmenge darstellt, und da gemäss einem von Jordan**) bewiesenen Satze jede Punktmenge, welche einer ganz im Endlichen liegenden perfekten Punktmenge eindeutig, eindeutig umkehrbar und stetig zugeordnet werden kann, selbst perfekt und ganz im Endlichen liegend sein muss, so ergiebt sich, dass die Gesammtheit der zwischen C und D liegenden Curvenpunkte einschliesslich der Punkte C und D eine perfekte ganz im Endlichen liegende Punktmenge darstellt, welche sich auf das endliche continuirliche Geradenstück $\overline{cd}$ abbilden lässt, und hieraus folgt gemäss der in (III) gegebenen Definition, dass diese Gesammtheit ein einfaches Curvenstück bildet.

VIII. Ist die ganz im Endlichen liegende perfekte beliebig im Raum vertheilte Punktmenge α so auf die ganz im Endlichen liegende perfekte beliebig im Raum vertheilte Punktmenge β abgebildet, dass β kein Punktpaar enthält, dessen Entfernung kleiner ist als die Entfernung des entsprechenden Punktpaars in α, so nenne ich β eine asphinktische Abbildung von α oder sage, α sei auf β asphinktisch abgebildet.

IX. Aus der gegebenen Definition folgt direct: Ist α asphinktisch abgebildet auf β und β asphinktisch abgebildet auf γ, wo γ auch eine ganz im Endlichen liegende perfekte beliebig im Raum vertheilte Punktmenge bedeutet, so ist γ eine asphinktische Abbildung von α, wenn die

---

*) Ich bezeichne hier wie auch im folgenden durch zwei Buchstaben mit einem Horizontalstrich darüber das die Entfernung der durch die Buchstaben bezeichneten beiden Punkte darstellende und sie als Begrenzungspunkte enthaltende Geradenstück.

**) Jordan, Cours d'Analyse, II. Aufl., Bd. 1, S. 51. Der Satz wird hier wieder für die von Jordan als „borné et parfait" bezeichneten Punktmengen (siehe 1ste Anmerkung zu S. 164) bewiesen. Er gilt aber auch für ganz im Endlichen liegende perfekte Punktmengen nach der in unserer Untersuchung gewählten Cantor'schen Definition (siehe 3te Anmerkung zu S. 163), da sich die letzteren Punktmengen von ersteren nur durch das Nichtvorhandensein isolirter Punkte unterscheiden, und da eine Punktmenge, welche sich einer ganz im Endlichen liegenden keine isolirten Punkte enthaltenden Punktmenge eindeutig, eindeutig umkehrbar und stetig zuordnen lässt, selbst keine isolirten Punkte enthalten kann; es muss dann jedoch zu den von Jordan gemachten Voraussetzungen der Eindeutigkeit und Stetigkeit die Voraussetzung der eindeutigen Umkehrbarkeit hinzugenommen werden.

denselben Punkten von β entsprechenden Punkte von α und γ einander zugeordnet werden (siehe II).

X. Sind die einfachen ausser dem Punkte B keinen gemeinsamen Punkt enthaltenden Curvenstücke AB und BC mit den Endpunkten A und B und B und C asphinktisch abgebildet auf die in einer Geraden liegenden ausser dem Punkte b keinen gemeinsamen Punkt enthaltenden endlichen continuirlichen Geradenstücke $\overline{ab}$ und $\overline{bc}$, so dass A dem Punkte a, B dem Punkte b und C dem Punkte c entspricht, so ist das aus den Curvenstücken AB und BC gemäss (VI) zusammengesetzte einfache Curvenstück AC asphinktisch abgebildet auf das aus den Geradenstücken $\overline{ab}$ und $\overline{bc}$ zusammengesetzte Geradenstück $\overline{ac}$. Beweis: Es seien M und N zwei Punkte des Curvenstücks AC und m und n die entsprechenden Punkte des Geradenstücks $\overline{ac}$. Liegen nun M und N beide auf dem Curvenstück AB oder beide auf dem Curvenstück BC, so folgt direct aus der Voraussetzung, dass $\overline{MN} \leqq \overline{mn}$. Liegt aber der Punkt M auf dem Curvenstück AB und der Punkt N auf dem Curvenstück BC, so ist

$$\overline{MN} \leqq \overline{MB} + \overline{BN} \leqq \overline{mb} + \overline{bn},$$
$$\overline{mb} + \overline{bn} = \overline{mn},$$
$$\overline{MN} \leqq \overline{mn} \text{ q. e. d.}$$

XI. Ist das einfache Curvenstück L asphinktisch abgebildet auf das endliche continuirliche Geradenstück P und sind C und D zwei beliebige Punkte von L und c und d die ihnen entsprechenden Punkte von P, so stellt die das Geradenstück $\overline{cd}$ bildende Gesammtheit der Punkte zwischen c und d einschliesslich der Punkte c und d eine asphinktische Abbildung der ihnen entsprechenden gemäss (VII) ein einfaches Curvenstück bildenden Gesammtheit der Curvenpunkte zwischen C und D einschliesslich der Punkte C und D dar (siehe (VII)).

XII. Es sei das Geradenstück $\overline{a_1 b_1} \geqq \overline{ab}$, dann lässt sich stets das Geradenstück $\overline{ab}$ auf das Geradenstück $\overline{a_1 b_1}$ asphinktisch abbilden, etwa so, dass jedem Punkte c von $\overline{ab}$ derjenige Punkt c_1 von $\overline{a_1 b_1}$ zugeordnet wird, für welchen $\overline{a_1 c_1} : \overline{a_1 b_1} = \overline{ac} : \overline{ab}$. Daraus folgt gemäss (IX): Wenn ein einfaches Curvenstück AB sich auf das Geradenstück $\overline{ab}$ asphinktisch abbilden lässt, so lässt sich das Curvenstück AB auch auf jedes Geradenstück $\overline{a_1 b_1} \geq \overline{ab}$ asphinktisch abbilden.

XIII. Giebt es ein Geradenstück $\overline{ab}$, auf welches sich das einfache Curvenstück AB mit den Endpunkten A und B nur auf eine einzige Weise asphinktisch so abbilden lässt, dass A dem Punkte a und B dem Punkte b entspricht, so ist $\overline{ab}$ das kleinste continuirliche Geradenstück,

auf welches eine asphinktische Abbildung des Curvenstücks AB möglich ist. Beweis: Wäre das Curvenstück AB auf das Geradenstück $\overline{a_1 b_1}$ asphinktisch abgebildet, wo $\overline{a_1 b_1} < \overline{ab}$, so wähle man im Geradenstück $\overline{ab}$ einen Punkt e, so dass $\overline{ae} > \overline{a_1 b_1}$, ihm entspreche im Curvenstück AB der Punkt E und diesem im Geradenstück $\overline{a_1 b_1}$ der Punkt e_1. Es sei η derjenige Punkt des Geradenstücks $\overline{ab}$, für welchen $\overline{a\eta} = \overline{a_1 e_1}$; dann liesse sich das aus der Gesammtheit der Curvenpunkte zwischen A und E einschliesslich der Punkte A und E gemäss (VII) bestehende einfache Curvenstück AE gemäss (XI) auf das Geradenstück $\overline{a_1 e_1}$, und das aus der Gesammtheit der Curvenpunkte zwischen E und B einschliesslich der Punkte E und B bestehende einfache Curvenstück EB auf das Geradenstück $\overline{e_1 b_1}$ asphinktisch abbilden. Da nun $\overline{a\eta} = \overline{a_1 e_1}$ und $\overline{\eta b} > \overline{e_1 b_1}$ ist, so liesse sich gemäss (XII) auch das Curvenstück AE auf das Geradenstück $\overline{a\eta}$ und das Curvenstück EB auf das Geradenstück $\overline{\eta b}$ asphinktisch abbilden. Es liesse sich mithin gemäss (X) das Curvenstück AB so auf das Geradenstück $\overline{ab}$ asphinktisch abbilden, dass A dem Punkte a, E dem Punkte η und B dem Punkte b entspräche; da nun wegen $\overline{ae} > \overline{a_1 b_1} > \overline{a_1 e_1}$

$$\overline{a\eta} = a_1 e_1,$$
$$\overline{ae} > \overline{a\eta}$$

e und η von einander verschiedene Punkte sein müssen, so gäbe es ausser der asphinktischen Abbildung des Curvenstücks AB auf das Geradenstück $\overline{ab}$, von welcher wir ausgingen, und bei welcher A dem Punkte a, E dem Punkte e und B dem Punkte b entsprach, noch eine mit dieser nicht identische asphinktische Abbildung des Curvenstücks AB auf das Geradenstück $\overline{ab}$, bei welcher A dem Punkte a und B dem Punkte b entspräche; dies widerspricht aber der Voraussetzung.

XIV. Umgekehrt gilt auch: Giebt es unter den endlichen continuirlichen Geradenstücken, auf welche das einfache Curvenstück AB asphinktisch abbildbar ist, ein Geradenstück $\overline{ab}$, welches das kleinste ist, so lässt sich das Curvenstück AB nur auf eine einzige Weise auf das Geradenstück $\overline{ab}$ asphinktisch so abbilden, dass A dem Punkte a und B dem Punkte b entspricht. Beweis: Gäbe es zwei verschiedene derartige asphinktische Abbildungen des Curvenstücks AB auf das Geradenstück $\overline{ab}$, so müsste es jedenfalls im ersteren einen Punkt E geben, welchem in den beiden Abbildungen zwei verschiedene Punkte des letzteren entsprächen. Es mögen diese Punkte e_1 und e_2 heissen und es sei $\overline{ae_2} > \overline{ae_1}$, dann liesse sich gemäss (XI) das aus der Gesammtheit der Curvenpunkte zwischen A und E einschliesslich der Punkte A und E bestehende einfache Curven-

stück AE auf das Geradenstück $\overline{ae_1}$ und das aus der Gesammtheit der Curvenpunkte zwischen E und B einschliesslich der Punkte E und B bestehende einfache Curvenstück EB auf das Geradenstück $\overline{e_2 b}$ und mithin gemäss (X) auch das Curvenstück AB auf ein endliches continuirliches Geradenstück von der Länge $\overline{ae_1} + \overline{e_2 b}$ asphinktisch abbilden; dieses letztere wäre aber kleiner als das Geradenstück $\overline{ab}$, was der Voraussetzung widerspricht.

XV. Nachdem dieses vorausgeschickt ist, definire ich in offenbarer Uebereinstimmung mit der natürlichen Anschauung die Rectification als diejenige asphinktische Abbildung eines einfachen Curvenstücks auf ein endliches continuirliches Geradenstück, die durch die Punkte, welche den Curvenendpunkten entsprechen sollen, eindeutig bestimmt ist. Die Länge des Curvenstücks wird dann definirt durch das Geradenstück, in welches die Curve bei der Rectification übergeht.

XVI. Ist ein einfaches Curvenstück auf zwei endliche continuirliche Geradenstücke rectificirbar, so müssen dieselben wegen (XIII) von gleicher Länge sein; bringt man sie nun so mit einander zur Deckung, dass diejenigen Endpunkte mit einander zusammenfallen, welche bei den beiden Rectificationen denselben Curvenendpunkten entsprechen, so müssen gemäss der in (XV) gegebenen Definition auch alle übrigen bei den beiden Rectificationen denselben Curvenpunkten entsprechenden Punkte mit einander zur Deckung gelangen. Daraus folgt, dass, wenn ein einfaches Curvenstück überhaupt rectificirbar ist, dasselbe sich nur auf eine einzige Weise rectificiren lässt und mithin auch eine eindeutig bestimmte Länge hat.

XVII. Ist das einfache Curvenstück AB rectificirt auf das Geradenstück $\overline{ab}$, so ist, da gemäss (XV) die Rectification eine specielle Art der asphinktischen Abbildung ist, $\overline{AB} \leqq \overline{ab}$, d. h. die Entfernung der beiden Endpunkte eines rectificirbaren einfachen Curvenstücks ist nie grösser als die Länge desselben.

XVIII. Sind die einfachen ausser dem Punkte B keinen gemeinsamen Punkt enthaltenden Curvenstücke AB und BC mit den Endpunkten A und B, und B und C rectificirt auf die in einer Geraden liegenden ausser dem Punkte b keinen gemeinsamen Punkt enthaltenden Geradenstücke $\overline{ab}$ und $\overline{bc}$, so dass A dem Punkte a, B dem Punkte b und C dem Punkte c entspricht, so ist das aus den Curvenstücken AB und BC gemäss (VI) zusammengesetzte einfache Curvenstück AC rectificirt auf das aus den Geradenstücken $\overline{ab}$ und $\overline{bc}$ zusammengesetzte Geradenstück $\overline{ac}$ (siehe (X)). Beweis: Zunächst folgt aus (X), dass das einfache Curvenstück AC auf das Geradenstück $\overline{ac}$ asphinktisch abgebildet ist. Es sei nun das Curven-

stück AC asphinktisch abgebildet auf das beliebige endliche continuirliche Geradenstück $\overline{a_1 c_1}$, und es entspreche in dieser Abbildung dem Punkte A der Punkt a_1, dem Punkte B der Punkt b_1 und dem Punkte C der Punkt c_1; dann ist gemäss (XI) das Curvenstück AB asphinktisch abgebildet auf das Geradenstück $\overline{a_1 b_1}$ und das Curvenstück BC asphinktisch abgebildet auf das Geradenstück $\overline{b_1 c_1}$. Hieraus ergiebt sich nun bei Berücksichtigung der gemachten Voraussetzungen, der Definition (XV) und des Satzes (XIII), dass $\overline{a_1 b_1} \geqq \overline{ab}$ und $\overline{b_1 c_1} \geqq \overline{bc}$ und mithin auch $\overline{a_1 c_1} \geqq \overline{ac}$. Es ist daher $\overline{ac}$ das kleinste Geradenstück, auf welches eine asphinktische Abbildung des Curvenstücks AC möglich ist, woraus gemäss (XIV) folgt, dass die asphinktische Abbildung des Curvenstücks AC auf das Geradenstück $\overline{ac}$ eine Rectification ist. q. e. d.

Aus dem eben bewiesenen Satze ergiebt sich direct, dass die Länge eines einfachen Curvenstücks, welches aus zwei rectificirbaren einfachen Curvenstücken gemäss (VI) zusammengesetzt ist, gleich der Summe der Längen dieser letzteren ist.

XIX. Ist das einfache Curvenstück AB mit den Endpunkten A und B rectificirt auf das Geradenstück $\overline{ab}$, und sind C und D zwei beliebige Punkte des Curvenstücks AB und c und d die entsprechenden Punkte des Geradenstücks $\overline{ab}$, so ist auch das aus der Gesammtheit der Curvenpunkte zwischen C und D einschliesslich der Punkte C und D bestehende einfache Curvenstück CD rectificirt auf das Geradenstück $\overline{cd}$ (siehe (XI)). Beweis: Es sei C derjenige der beiden Punkte C und D, welcher zwischen dem anderen und A liegt. Zunächst folgt aus (XI), dass das einfache Curvenstück CD auf das Geradenstück $\overline{cd}$ asphinktisch so abgebildet ist, dass C dem Punkte c und D dem Punkte d entspricht; ebenso ist auch das aus der Gesammtheit der Curvenpunkte zwischen A und C einschliesslich der Punkte A und C bestehende einfache Curvenstück AC auf das Geradenstück $\overline{ac}$ asphinktisch so abgebildet, dass A dem Punkte a und C dem Punkte c entspricht, und das aus der Gesammtheit der Curvenpunkte zwischen D und B einschliesslich der Punkte D und B bestehende einfache Curvenstück DB auf das Geradenstück $\overline{db}$ asphinktisch so abgebildet, dass D dem Punkte d und B dem Punkte b entspricht. Gäbe es nun zwei von einander verschiedene asphinktische Abbildungen des einfachen Curvenstücks CD auf das Geradenstück $\overline{cd}$, bei welchen C dem Punkte c und D dem Punkte d entsprächen, so würde man durch eine gemäss (X) erfolgende Zusammensetzung derselben mit ein und derselben A dem Punkte a und C dem Punkte c zuordnenden asphinktischen Abbildung des einfachen Curvenstücks AC auf das Geradenstück $\overline{ac}$ zwei von einander verschiedene asphinktische Abbildungen des aus der Gesammt-

heit der Curvenpunkte zwischen A und D einschliesslich der Punkte A und D bestehenden einfachen Curvenstücks AD auf das Geradenstück $\overline{ad}$ erhalten, bei welchen A dem Punkte a und D dem Punkte d entsprächen, und durch Zusammensetzung dieser letzteren beiden Abbildungen mit ein und derselben asphinktischen Abbildnng des einfachen Curvenstücks DB auf das Geradenstück $\overline{db}$, bei welcher D dem Punkte d und B dem Punkte b entspräche, würden zwei von einander verschiedene asphinktische Abbildungen des einfachen Curvenstücks AB auf das Geradenstück $\overline{ab}$ entstehen, bei welchen A dem Punkte a und B dem Punkte b entsprächen; das würde aber mit der Voraussetzung, dass das Curvenstück AB auf das Geradenstück $\overline{ab}$ rectificirbar ist, gemäss der Definition (XV) im Widerspruch stehen. Folglich ist die durch die Rectification des Curvenstücks AB auf das Geradenstück $\overline{ab}$ gemäss (XI) gegebene asphinktische Abbildung des Curvenstücks CD auf das Geradenstück $\overline{cd}$ die einzige asphinktische Abbildung dieses Curvenstücks auf dieses Geradenstück, bei welcher C dem Punkte c und D dem Punkte d entspricht, d. h. gemäss der Definition (XV), sie ist eine Rectification.

XX. Ist das einfache Curvenstück AB rectificirbar und bedeutet E einen Punkt desselben, so ändert sich die Länge des aus der Gesammtheit der Curvenpunkte zwischen A und E einschliesslich der Punkte A und E bestehenden einfachen Curvenstücks AE stetig mit der Verschiebung von E auf dem Curvenstück AB. Beweis: Es sei das Curvenstück AB rectificirt auf das Geradenstück $\overline{ab}$ und es entspreche dem Punkte E des ersteren in der Rectification der Punkt e; dann ist gemäss (XIX) das Curvenstück AE rectificirt auf das Geradenstück $\overline{ae}$ und mithin auch die Länge des Curvenstücks AE gleich $\overline{ae}$; berücksichtigt man nun, dass, da die Rectification gemäss der Definition (XV) eine specielle Art der Abbildung ist, und eine Abbildung gemäss der Definition (I) eine gegenseitig stetige eindeutige und eindeutig umkehrbare Zuordnung ist, der variabele Punkt e dem variabelen Punkt E stetig zugeordnet ist, so folgt hieraus direct der zu beweisende Satz.

XXI. Existiren überhaupt endliche continuirliche Geradenstücke, auf welche sich das einfache Curvenstück AB asphinktisch abbilden lässt, so ist das Curvenstück rectificirbar; giebt es kein endliches continuirliches Geradenstück, auf welches sich das Curvenstück asphinktisch abbilden lässt, so ist dasselbe nicht rectificirbar. Der zweite Theil dieser Behauptung ergiebt sich direct daraus, dass die Rectification als eine specielle Art der asphinktischen Abbildung definirt worden ist, der erste Theil der Behauptung kann in folgender Weise bewiesen werden. Es sei das einfache Curvenstück AB asphinktisch abgebildet auf das Geradenstück $\overline{ab}$, und es

mögen in letzterem den beiden beliebigen Curvenpunkten F und G die Punkte f und g entsprechen. Es bedeute das Symbol U_{FG} die untere Grenze der Längen der endlichen continuirlichen Geradenstücke, auf welche das aus der Gesammtheit der Curvenpunkte zwischen F und G einschliesslich der Punkte F und G bestehende einfache Curvenstück FG asphinktisch abbildbar ist. Da das letztere gemäss (XI) auf das Geradenstück $\overline{fg}$ asphinktisch abbildbar ist, so folgt

$$(1) \qquad U_{FG} \leqq \overline{fg}.$$

Da ferner gemäss (V) bei jeder Abbildung des Curvenstücks FG auf ein Geradenstück den Punkten F und G die Endpunkte des letzteren entsprechen, so folgt aus der Definition der asphinktischen Abbildung, dass keines dieser Geradenstücke kürzer ist als die Entfernung $\overline{FG}$ der beiden Punkte F und G. Hieraus ergiebt sich die Relation

$$(2) \qquad U_{FG} \geqq \overline{FG}.$$

Es seien C und D zwei Punkte des Curvenstücks AB, und es liege C zwischen A und D. Dann besteht die Gleichung

$$(3) \qquad U_{AC} + U_{CD} = U_{AD}.$$

Denn gemäss (XI) ist die Länge jedes endlichen continuirlichen Geradenstücks, auf welches das aus der Gesammtheit der Curvenpunkte zwischen A und D einschliesslich der Punkte A und D bestehende einfache Curvenstück AD asphinktisch abgebildet werden kann, gleich der Summe der Längen zweier endlicher continuirlicher Geradenstücke, auf welche die aus der Gesammtheit der Curvenpunkte zwischen A und C einschliesslich der Punkte A und C und aus der Gesammtheit der Curvenpunkte zwischen C und D einschliesslich der Punkte C und D bestehenden einfachen Curvenstücke AC und CD bezüglich asphinktisch abgebildet werden können, und gemäss (X) ist die Summe der Längen je zweier endlicher continuirlicher Geradenstücke, auf welche die Curvenstücke AC und CD bezüglich asphinktisch abgebildet werden können, wiederum stets gleich der Länge eines endlichen continuirlichen Geradenstücks, auf welches das Curvenstück AD asphinktisch abbildbar ist. Also ist die Gesammtheit der Längen der endlichen continuirlichen Geradenstücke, auf welche das Curvenstück AD asphinktisch abbildbar ist, identisch mit der Gesammtheit der Summen der Längen je zweier endlicher continuirlicher Geradenstücke, auf welche die Curvenstücke AC und CD bezüglich asphinktisch abgebildet werden können. Hieraus ergiebt sich, da die untere Grenze dieser letzteren Gesammtheit gleich $U_{AC} + U_{CD}$ ist, die Gleichung (3).

Man ziehe nun vom beliebigen Punkte a_1 aus einen Halbstrahl und ordene auf demselben jedem Punkte e des Geradenstücks $\overline{ab}$, auf welches das

Curvenstück AB der Voraussetzung nach asphinktisch abgebildet war, einen Punkt e_1 so zu, dass $\overline{a_1 e_1} = U_{AE}$ ist, wo E den im Curvenstück AB dem Punkte e entsprechenden Punkt bedeutet; dem Punkt a werde der Punkt a_1 und dem Punkte b werde durch dieses Verfahren der Punkt b_1 zugeordnet, so dass also $\overline{a_1 b_1} = U_{AB}$ ist. Sind dann m und n zwei beliebige von einander verschiedene Punkte des Geradenstücks $\overline{ab}$ und M und N und m_1 und n_1 die ihnen entsprechenden Punkte des Curvenstücks AB und des Geradenstücks $\overline{a_1 b_1}$, so ist gemäss der Gleichung (3), wenn m zwischen a und n und mithin auch M zwischen A und N liegt (s. (IV)),

(4) $$U_{MN} = U_{AN} - U_{AM} = \overline{a_1 n_1} - \overline{a_1 m_1} = \overline{m_1 n_1}.$$

Bei Berücksichtigung der Relation (1) ergiebt sich hieraus

(5) $$\overline{mn} \geqq \overline{m_1 n_1}.$$

Diese letzte Relation zeigt, dass $\overline{m_1 n_1}$ kleiner wird als jede beliebig kleine vorgeschriebene Strecke δ, wenn nur $\overline{mn} < \delta$ wird. Es ist also der variabele Punkt e_1 dem variabelen Punkte e stetig zugeordnet. Gemäss dem Hauptsatz über stetige Functionen entspricht daher jedem Punkte des Geradenstücks $\overline{a_1 b_1}$ auch ein Punkt des Geradenstücks $\overline{ab}$ und zwar nur ein Punkt; denn die zwei verschiedenen Punkte m und n des Geradenstücks $\overline{ab}$ entsprechenden Punkte m_1 und n_1 des Geradenstücks $\overline{a_1 b_1}$ können nicht zusammenfallen, weil gemäss (2) und (4)

(6) $$\overline{m_1 n_1} \geqq \overline{MN}$$

ist, und M und N wegen der in der Voraussetzung der asphinktischen Abbildung des Curvenstücks AB auf das Geradenstück $\overline{ab}$ liegenden Eindeutigkeit der Beziehung der Punkte des letzteren auf die Punkte des ersteren nicht zusammenfallen können. Es ist also durch das angegebene Verfahren das Geradenstück $\overline{ab}$ auf das Geradenstück $\overline{a_1 b_1}$ im Sinne der Definition (I) abgebildet. Ordnet man nun die denselben Punkten des Geradenstücks $\overline{ab}$ entsprechenden Punkte des Curvenstücks AB und des Geradenstücks $\overline{a_1 b_1}$ einander zu, so erhält man gemäss (II) eine Abbildung des Curvenstücks AB auf das Geradenstück $\overline{a_1 b_1}$ und zwar, wie die Relation (6) zeigt, eine asphinktische. Da nun nach Voraussetzung $\overline{a_1 b_1} = U_{AB}$ ist, so giebt es unter den endlichen continuirlichen Geradenstücken, auf welche das Curvenstück AB asphinktisch abgebildet werden kann, ein kleinstes; dasselbe ist das genannte Geradenstück $\overline{a_1 b_1}$ und die asphinktische Abbildung auf dasselbe ist gemäss dem Satze (XIV) und der Definition (XV) eine Rectification. q. e. d.

XXII. Ist es möglich die Abbildung eines einfachen Curvenstücks AB mit den Endpunkten A und B auf ein endliches continuirliches

Geradenstück dadurch zu vermitteln, dass die Coordinaten x, y, z der Punkte des einfachen Curvenstücks dargestellt werden als in einem endlichen continuirlichen Intervall einschliesslich seiner Grenzen definirte endliche eindeutige stetige einen endlichen stetigen Differentialquotienten besitzende Functionen einer reellen Variabelen t, $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$, so ist, wenn die den Punkten A und B entsprechenden Grenzen des Intervalls der Variabelen t bezüglich die Werthe $t = a$ und $t = b$ sein mögen, wo $b > a$, die Länge des Curvenstücks AB gleich

$$\int_{t=a}^{t=b} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2}\, dt,$$

wobei das Vorzeichen der Quadratwurzel positiv zu nehmen ist, und $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, $\chi'(t)$ bezüglich die ersten Ableitungen der Functionen $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ bedeuten.

Beweis*): Es seien t_1, t_2 zwei beliebige Werthe von t, welche der Relation $a \leqq t_1 < t_2 \leqq b$ genügen, und es mögen ihnen im Curvenstück AB die Punkte E_1 und E_2 entsprechen, ferner mögen $p(t_1, t_2)$, $q(t_1, t_2)$, $r(t_1, t_2)$ bezüglich die oberen Grenzen und $l(t_1, t_2)$, $m(t_1, t_2)$, $n(t_1, t_2)$ bezüglich die unteren Grenzeu der absoluten Beträge der Functionen $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, $\chi'(t)$ für $t_1 \leqq t \leqq t_2$ bedeuten. Dann vermittelt, wie aus dem ersten Mittelwerthsatz der Differentialrechnung folgt, die Function

$$P = \sqrt{(p(t_1, t_2))^2 + (q(t_1, t_2))^2 + (r(t_1, t_2))^2} \cdot t$$

eine asphinktische Abbildung des aus der Gesammtheit der Curvenpunkte zwischen den Punkten E_1 und E_2 einschliesslich der Punkte E_1 und E_2 bestehenden einfachen Curvenstücks $E_1 E_2$ auf ein continuirliches Geradenstück von der Länge

$$\sqrt{(p(t_1, t_2))^2 + (q(t_1, t_2))^2 + (r(t_1, t_2))^2}\,(t_2 - t_1).$$

Hieraus folgt gemäss (XXI), dass das Curvenstück $E_1 E_2$ rectificirbar ist und gemäss (XIII), dass seine Länge, welche wir allgemein durch das Symbol B_{t_1, t_2} bezeichnen wollen, der Relation

$$(1) \qquad B_{t_1, t_2} \leqq \sqrt{(p(t_1, t_2))^2 + (q(t_1, t_2))^2 + (r(t_1, t_2))^2}\,(t_2 - t_1)$$

genügt.

Ebenso vermittelt aber auch, wenn nicht

$$l(t_1, t_2) = m(t_1, t_2) = n(t_1, t_2) = 0$$

ist, die Function

$$Q = \sqrt{(l(t_1, t_2))^2 + (m(t_1, t_2))^2 + (n(t_1, t_2))^2} \cdot t$$

eine asphinktische Abbildung eines continuirlichen Geradenstücks von der Länge

$$\sqrt{(l(t_1, t_2))^2 + (m(t_1, t_2))^2 + (n(t_1, t_2))^2}\,(t_2 - t_1)$$

*) Vergl. Jordan, Cours d'Analyse II. Aufl. Bd. 1, S. 105, 106.

auf das Curvenstück $E_1 E_2$, woraus bei Berücksichtigung dessen, dass die Rectification als eine specielle Art der asphinktischen Abbildung definirt worden ist, gemäss (IX) sich ergiebt, dass ein continuirliches Geradenstück von der Länge

$$\sqrt{(l(t_1, t_2))^2 + (m(t_1, t_2))^2 + (n(t_1, t_2))^2}\,(t_2 - t_1)$$

sich auf ein continuirliches Geradenstück von der Länge B_{t_1, t_2} asphinktisch abbilden lässt und dass mithin

$$(2) \qquad B_{t_1, t_2} \geq \sqrt{(l(t_1, t_2))^2 + (m(t_1, t_2))^2 + (n(t_1, t_2))^2}\,(t_2 - t_1).$$

Diese letzte Gleichung gilt auch für den Fall, dass

$$l(t_1, t_2) = m(t_1, t_2) = n(t_1, t_2) = 0$$

ist.

Da nun gemäss (XVIII) $B_{a,t+\Delta t} - B_{a,t} = B_{t,t+\Delta t}$, wenn $a \leq t < t + \Delta t \leq b$, so folgt aus (1) und (2)

$$(3) \qquad \frac{B_{a,t+\Delta t} - B_{a,t}}{\Delta t} \leq \sqrt{(p(t, t+\Delta t))^2 + (q(t, t+\Delta t))^2 + (r(t, t+\Delta t))^2}$$

und

$$(4) \qquad \frac{B_{a,t+\Delta t} - B_{a,t}}{\Delta t} \geq \sqrt{(l(t, t+\Delta t))^2 + (m(t, t+\Delta t))^2 + (n(t+\Delta t))^2}.$$

Wegen der aus der Stetigkeit der Functionen $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, $\chi'(t)$ folgenden Stetigkeit ihrer absoluten Beträge haben die beiden Ausdrücke auf der rechten Seite der Relationen (3) und (4) bei verschwindendem Δt den gemeinsamen Grenzwerth

$$\sqrt{|\varphi'(t)|^2 + |\psi'(t)|^2 + |\chi'(t)|^2} = \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2}.$$

Folglich besteht die Gleichung

$$\frac{dB_{at}}{dt} = \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2},$$

woraus sich bei Berücksichtigung dessen, dass, wie aus der Relation (1) folgt, $\lim\limits_{t=a} B_{a,t} = 0$ ist, durch Integration die zu beweisende Integralformel ergiebt.

XXIII. Die Definition (XV) ist mit der Scheefer-Jordan'schen inhaltlich identisch. Beweis: Es bezeichne E einen beliebigen Punkt des einfachen Curvenstücks AB, welches nach der Scheefer-Jordan'schen Definition rectificirbar sei, und L_{AE} die Länge des aus der Gesammtheit der Curvenpunkte zwischen A und E einschliesslich der Punkte A und E bestehenden einfachen Curvenstücks AE nach der Scheefer-Jordan'schen Definition. Dann*) ändert sich L_{AE} stetig mit der Verschiebung des Punktes E auf dem Curvenstück AB; sind ferner C und D zwei Punkte des Curvenstücks AB, so ist, wenn C zwischen A und D liegt, $L_{AD} = L_{AC} + L_{CD}$ **), und

*) Jordan, Cours d'Analyse II. Aufl. Bd. 1, Seite 104 und 105.

**) Jordan, Cours d'Analyse II. Aufl. Bd. 1, Seite 103.

da $L_{CD} \geqq \overline{CD}$ ist, so folgt $L_{AD} - L_{AC} \geqq \overline{CD}$. Hieraus ergiebt sich, dass wenn auf einem Halbstrahl jedem Punkt E des Curvenstücks AB der um L_{AE} vom Ausgangspunkt des Halbstrahls entfernte Punkt zugeordnet wird, während dem Punkte A des Curvenstücks der Ausgangspunkt des Halbstrahls zugeordnet wird, eine asphinktische Abbildung des Curvenstücks AB auf ein endliches continuirliches Geradenstück von der Länge L_{AB} entsteht. Bei Berücksichtigung der Sätze (XXI) und (XIII) folgt hieraus: Wenn ein einfaches Curvenstück nach der Scheefer-Jordan'schen Definition rectificirbar ist, so ist es auch nach der hier gegebenen Definition (XV) rectificirbar, und die Länge desselben nach der Definition (XV) ist jedenfalls nicht grösser als die Länge nach der Scheefer-Jordan'schen Definition. Andererseits gilt auch: Wenn ein einfaches Curvenstück nach der Definition (XV) rectificirbar ist, so ist es auch nach der Scheefer-Jordan'schen Definition rectificirbar, und die Länge desselben nach der Definition (XV) ist jedenfalls nicht kleiner als die Länge nach der Scheefer-Jordan'schen Definition: denn, da die Rectification nach der Definition (XV) eine specielle Art der asphinktischen Abbildung ist, und da jedes endliche continuirliche Geradenstück, auf welches das einfache Curvenstück asphinktisch abgebildet werden kann, nicht kürzer sein kann als der Umfang jedes in das Curvenstück in einem bestimmten Sinne eingeschriebenen Polygons, so folgt, dass die Umfänge aller in das Curvenstück in einem bestimmten Sinne eingeschriebenen Polygone nicht länger sein können als die Länge des Curvenstücks nach der Definition (XV); mithin*) hat das Curvenstück eine Länge nach der Scheefer-Jordan'schen Definition und dieselbe ist jedenfalls nicht grösser als die Länge nach der Definition (XV). Aus den beiden hier einander gegenübergestellten Sätzen ergiebt sich direct die inhaltliche Identität der Definition (XV) mit der Scheefer-Jordan'schen.

XXIV. Die Sätze (XIII) und (XIV) zeigen uns, dass für die Rectification auch folgende mit der in (XV) gegebenen inhaltlich identische Definition möglich wäre: Rectification nenne ich die asphinktische Abbildung eines einfachen Curvenstücks auf ein endliches continuirliches Geradenstück, welches das kleinste ist, auf das sich das Curvenstück asphinktisch abbilden lässt. Jedoch halte ich die in (XV) gegebene Definition für naturgemässer.

Zum Schlusse möchte ich noch bemerken, dass mit Hülfe des Verfahrens der asphinktischen Abbildung, sich leicht eine den Begriff der Tangentialebene und des Differentialquotienten nicht voraussetzende Definition für den Flächeninhalt krummer Oberflächen geben lässt. Ich beabsichtige in einer späteren Untersuchung dieselbe auseinanderzusetzen.

*) Jordan, Cours d'Analyse Bd. 1. S. 100, 101, 102. II. Aufl.

Die Beugung und Polarisation des Lichts durch einen Spalt. I.

Von

K. Schwarzschild in München.

---

§ 1.

Einleitung.

1. Kirchhoff's Beugungstheorie. Die Theorie der Reflexion, Brechung und Beugung des Lichts, welche Kirchhoff in seiner Abhandlung „Zur Theorie der Lichtstrahlen"*) gegeben hat, gilt mit vollem Recht als klassisch. Sie zeichnet sich aus durch formale Eleganz, leichte Anwendbarkeit und Erfolg im Vorhersagen zahlreicher Erscheinungen. Trotzdem genügt sie keineswegs allen physikalischen und mathematischen Ansprüchen, und dessen ist sich Kirchhoff bewusst gewesen, denn er sagt selbst in den einleitenden Worten jener Abhandlung: „Eine vollkommen befriedigende Theorie dieser Gegenstände aus den Hypothesen der Undulationstheorie zu entwickeln scheint auch heute noch nicht möglich zu sein." Es sei kurz an den Gedankengang Kirchhoffs erinnert und der schwache Punkt seiner Ableitungen hervorgehoben.

Jede Componente φ einer Lichtschwingung genügt der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = a^2\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right]$$

wobei a die Lichtgeschwindigkeit bedeutet. Für homogenes Licht der Schwingungsperiode τ kann man setzen:

$$\varphi = \text{pars real.}\left(e^{2\pi i \frac{t}{\tau}} u\right)$$

wobei u von der Zeit unabhängig ist, und erhält dann für u die Differentialgleichung:

$$(1) \qquad 0 = k^2 u + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

---

*) Ges. Abh. von G. Kirchhoff. Nachtrag. Leipzig 1891, pag. 22. S. auch Kirchhoff's Optik. Zweite Vorlesung.

worin $k = \frac{2\pi}{a\tau}$, oder, wenn man die Wellenlänge $\lambda = a \cdot \tau$ einführt,

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{2}$$

ist. Jede Lösung der Gleichung (1) wollen wir ein „Wellenpotential" nennen.

Bezeichnet v eine zweite Lösung der Differentialgleichung (1), ein zweites Wellenpotential, so gilt nach dem Green'schen Satz:

$$0 = \int d\omega \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n} v\right),$$

das Integral erstreckt über die Oberfläche ω eines Raumes R, in welchem u und v nebst ihren ersten Derivirten endlich und stetig sind, und unter n die in's Innere dieses Raumes gerichtete Normale auf der Oberfläche verstanden. Genügt v denselben Bedingungen überall in R mit Ausnahme eines Punktes 0, in welchem es unstetig wird in der Form:

$$v = \frac{1}{r} + \text{functio continua} \quad (r \text{ Abstand vom Punkte } 0), \tag{3}$$

so folgt ebenfalls aus dem Green'schen Satz:

$$4\pi u(0) = \int d\omega \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n} v\right). \tag{4}$$

Benutzt man für v den Ausdruck: $v = \frac{e^{-ikr}}{r}$, welcher der Differentialgleichung (1) genügt und im Punkte 0 in der verlangten Weise unstetig wird, so ergiebt sich:

$$4\pi u(0) = \int d\omega \left\{u \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right) - \frac{\partial u}{\partial n} \frac{e^{-ikr}}{r}\right\}. \tag{5}$$

Dies ist im Wesentlichen Kirchhoff's Ausdruck des Huygens'schen Princips. Die Gleichung besagt, dass — nach Kirchhoff's Worten — „die Bewegung des Aethers in dem von der Fläche ω umschlossenen Raume angesehn werden kann als hervorgebracht von einer Schicht von leuchtenden Punkten in der Fläche ω, da ein jedes der beiden Glieder, aus denen der Integrand zusammengesetzt ist, sich bezeichnen lässt als einem leuchtenden Punkte entsprechend, der am Orte von $d\omega$ sich befindet."

Will man mit Hülfe der Gleichung (5) die Werthe von u im Innern des Raumes R ableiten, so müssen die auf seiner Oberfläche geltenden Werthe von u sowohl, als von $\frac{\partial u}{\partial n}$, bekannt sein. Es ist aber keineswegs erlaubt, beliebige Werthe für diese *beiden* Grössen auf der Oberfläche ω vorzuschreiben, vielmehr lehrt die Theorie der Diffgl. $\Delta^2 u + k^2 u = 0$, dass durch Angabe *entweder* von u *oder* von $\frac{\partial u}{\partial n}$ auf der Oberfläche der Verlauf von u im ganzen Raume R bestimmt ist. Sind daher z. B. die

Werthe von u auf der Oberfläche vorgeschrieben, so gehören dazu, von gewissen Mehrdeutigkeiten abgesehn, ganz bestimmte Werthe $\frac{\partial u}{\partial n}$, welche allein mit ihnen verträglich sind und welche erst bekannt werden, wenn man die Fortsetzung der Function u durch den ganzen Raum R bereits gefunden hat. So setzt die Anwendbarkeit der Gleichung (5) im Grunde schon jedes Mal die Lösung des Problems voraus.

Aber in vielen Fällen der Praxis ist es möglich, genäherte Angaben über u und *zugleich* über $\frac{\partial u}{\partial n}$ auf der Oberfläche eines bestimmten Raumes R zu machen. Einer Lichtquelle L stehe ein vollkommen schwarzer unendlicher ebener Schirm S mit einer Oeffnung A gegenüber. Es werde die Lichtbewegung in einem Punkte 0 hinter dem Schirme gesucht. Man grenze einen Raum R ab durch die Fläche ω_1 des Schirms, durch eine Fläche ω_2, welche die Oeffnung schliesst, und durch die ganz im Unendlichen verlaufende Fläche ω_3. Es werde angenommen, dass letztere keinen Beitrag zum Integral (5) liefert; dann bleibt eine Integration über die Flächen ω_1 und ω_2 auszuführen. Nun macht Kirchhoff plausibel, dass wenigstens für verschwindend kleine Wellenlänge überall an dem vollkommen schwarzen Schirm S sowohl u als $\frac{\partial u}{\partial n}$ Null sei, und überall in der Oeffnung A u und $\frac{\partial u}{\partial n}$ diejenigen Werthe haben, welche sie dort ohne Vorhandensein des Schirmes S bei freiem Leuchten der Lichtquelle L annehmen würden. Hiermit verschwindet auch das Integral über ω_1 und es bleibt allein das Integral über die Oeffnung, in welchem für u und $\frac{\partial u}{\partial n}$ die leicht zu berechnenden bei ungehindertem Leuchten des Punktes L gültigen Werthe einzusetzen sind. Das Problem ist somit auf eine einfache Quadratur zurückgeführt. Dass man sich bei der Ausführung dieser Quadratur gewöhnlich auf Annäherungen beschränkt, welche nur für grosse Entfernung des Punktes 0 von der Oeffnung und Lage in der Nähe der geometrischen

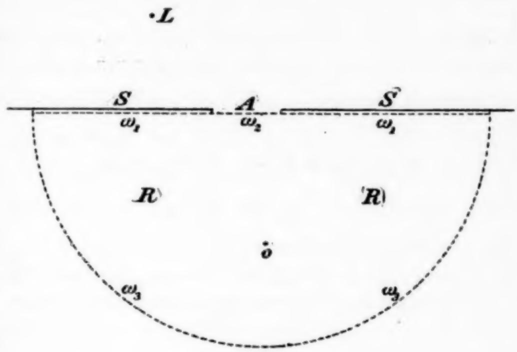


Fig. 1.

Schattengrenze zulässig sind, ist eine Verminderung des Gültigkeitsbereiches der Theorie, welche sich durch Rechenarbeit ohne principielle Schwierigkeiten beseitigen liesse. Die *einzige, aber sehr wesentliche Schwäche* der Theorie bilden die Annahmen über die Randwerthe von u und $\frac{\partial u}{\partial n}$. Prüft man nämlich nach, welche Randwerthe die Function u_0 und ihre Derivirte $\frac{\partial u_0}{\partial n}$ annimmt, wenn man in dem Integral (5) den Punkt 0, von dem aus die Entfernungen r gemessen werden, an den Schirm S oder in die Oeffnung A (auf die Fläche ω_2) rücken lässt, so findet man, dass diese Randwerthe keineswegs mit den angenommenen Ausgangswerthen übereinstimmen. Allerdings wird u_0 und $\frac{\partial u_0}{\partial n}$ auf dem Schirm in grösserer Entfernung von der Oeffnung Null, aber um die Oeffnung herum lässt sich auf dem Schirm ein Streifen von mehreren Wellenlängen Breite abgrenzen, in welchem sowohl u_0 als $\frac{\partial u_0}{\partial n}$ beträchtliche Werthe annehmen. Ganz ähnlich verhält es sich im Innern der Oeffnung, auf ω_2. Auch hier stimmt nach der Mitte der Oeffnung zu (die Oeffnung als gross gegen die Wellenlänge vorausgesetzt) u_0 und $\frac{\partial u_0}{\partial n}$ mit den bei der Bildung des Integrals angenommenen Werthen überein, wie sie bei ungehinderter Ausbreitung des Lichts von L aus gelten würden, aber auch im Innern der Oeffnung hat man längs ihres Randes einen ähnlichen Streifen von mehreren Wellenlängen Breite abzugrenzen, in welchem starke Abweichungen von diesen Ausgangswerthen auftreten.

Es ist hiernach nicht unverständlich, dass die Kirchhoff'sche Beugungstheorie für Oeffnungen, die gross gegen die Wellenlänge sind, die Beobachtungsresultate gut wieder giebt. Denn man kann sich vorstellen, dass die Wirkung jener Streifen um den Rand der Oeffnung herum verschwindet, solange die Fläche der Streifen klein ist gegen die Fläche der ganzen Oeffnung. Aber zu beweisen, dass dies nothwendig zutreffe, ist eine schwierige Aufgabe, deren Behandlung bislang nicht versucht wurde.

Mathematisch aber ist die Kirchhoff'sche Beugungstheorie insbesondere deshalb so unbefriedigend, weil die Werthe, welche u_0 und $\frac{\partial u_0}{\partial n}$ in jenen Streifen annehmen, von der Gestalt der Oeffnungen abhängen und allgemein nicht zu charakterisiren sind, sodass der Kirchhoff'sche Ansatz überhaupt kein präcise definirtes mathematisches Problem löst.

2. Neuere Fortschritte. Sollte ein Fortschritt über Kirchhoff hinaus erzielt werden, so galt es zunächst, ein solches präcise definirtes mathematisches Problem aufzustellen, und dazu musste gerade die Benutzung „vollkommen schwarzer“ Körper als Schirme, die in Kirchhoff's

Behandlung die einfachsten Resultate giebt, ausgeschlossen werden. Denn es lässt sich keine Randbedingung für das Wellenpotential u an der Oberfläche eines Körpers angeben, welche das Auftreten sowohl von reflectirten als von gebrochenen Wellen verhindern würde. Es liegt dies daran, dass, wie schon oben erwähnt, nicht gleichzeitig u und $\frac{\partial u}{\partial n}$ an einer Fläche gleich Null gesetzt werden können. Herr Voigt*) hat allerdings eine mathematische Form gefunden, gestützt auf frühere Untersuchungen von Herrn Sommerfeld**), welche das physikalische Verhalten schwarzer Körper mindestens mit grosser Annäherung zum Ausdruck bringt. Er fasst nämlich die Oberfläche eines schwarzen Körpers als „Verzweigungsfläche" eines idealen Riemann'schen Raumes auf, durch welche der dem ersten Blatt einer Riemann'schen Fläche entsprechende wirkliche Raum mit anderen gedachten Räumen zusammenhängt, und stellt sich vor, dass die Lichtbewegung durch die Verzweigungsfläche in einen jener gedachten Räume übergeht und ebenso aus dem wirklichen Raum verschwindet, wie sie von schwarzen Körpern vernichtet wird. Dabei bleibt aber, wie Herr Voigt selbst angiebt, nicht ausgeschlossen, dass ein kleiner Theil der Lichtbewegung aus den gedachten Räumen wieder in den wirklichen zurückkommt, und zudem ist das Problem noch immer mit einer gewissen Unbestimmtheit behaftet, insofern die Art der Verzweigung des ganzen Riemann'schen Raums durch die Form der vorhandenen schwarzen Körper nicht eindeutig bestimmt ist.

Zu einer klar bestimmten Aufgabe kommt man erst dann, wenn man die Lichtbewegung nicht durch vollkommen schwarze, sondern durch vollkommen spiegelnde Schirme aufgehalten denkt. Ein vollkommen spiegelnder Körper ist nach der electromagnetischen Lichttheorie ein vollkommener Leiter der Electricität, auf dessen Oberfläche die electrischen Kraftlinien stets senkrecht stehn müssen. Soll daher die Beugung des Lichts durch vollkommen spiegelnde Schirme gefunden werden, so läuft dies auf die mathematische Aufgabe hinaus, eine Lösung des bekannten Maxwell'schen Systems partieller Differentialgleichungen zu finden von der Art, dass überall auf der Oberfläche der Schirme die tangential zur Oberfläche gerichteten Componenten der electrischen Kraft verschwinden.

Uebrigens entspricht die Voraussetzung vollkommen spiegelnder Schirme den Anordnungen bei vielen wirklichen Beugungsversuchen gewiss ebensosehr, wie die Voraussetzung ihrer vollkommenen Schwärze.

Das Beugungsproblem ist zuerst von Herrn Poincaré***) in dieser

---

*) Kompendium der theor. Physik Bd. II, S. 768 und Gött. Nachr. 1899. Heft 1.

**) Math. Annalen Bd. 47, S. 317.

***) Acta Mathematica Bd. XVI, pag. 297.

Weise präcisirt und für den speciellen Fall der Beugung an einem „graden Rand“ in Angriff genommen worden. Unter einem „geraden Rand“ ist hier und im folgenden die gerade Kante einer unendlichen und unendlich dünnen Halbebene zu verstehen, welche den beugenden Schirm bildet. Während aber Herr Poincaré sich auf eine näherungsweise Lösung für Punkte in grosser Entfernung von der Kante beschränkt hat, ist Herrn Sommerfeld*) späterhin die exacte und vollständige Lösung des ganzen Problems gelungen. Diesem ersten und bisher einzigen Beispiel der exacten Behandlung eines Beugungsproblems fügt die gegenwärtige Arbeit ein zweites hinzu, sie behandelt die Beugung des Lichts durch einen Spalt mit unendlich langen parallelen Kanten.

§ 2.

Inhaltsübersicht.

3. Vorbemerkungen. Es liegt nahe, das Problem der Beugung durch einen Spalt, durch zwei grade Ränder, in analoger Weise in Angriff zu nehmen, wie von Herrn Sommerfeld (l. c.) die Beugung an einem Rand behandelt worden ist. Die Rolle, welche für den graden Rand den Bessel'schen Cylinderfunctionen zufällt, spielen für den Spalt die Functionen des elliptischen Cylinders und wie jene als Grenzfall der Kugelfunctionen erscheinen, bilden diese einen Grenzfall der Lamé'schen Functionen. Indessen trifft man bei einem Versuche, von der Theorie der Lamé'schen Functionen auszugehen, auf Schwierigkeiten, die der verwickelten Natur der Lamé'schen Functionen entspringen und ein Vordringen von dieser Seite vorläufig zu vereiteln scheinen.

Ich habe zur Lösung des Problems ein Näherungsverfahren eingeschlagen, das nicht nach einer derartigen Analogie gebildet ist, sondern aus einer directen Verwendung der von Herrn Sommerfeld erhaltenen Resultate entspringt.

Eine Bemerkung ist vorauszuschicken. Es handelt sich in gegenwärtiger, wie in Herrn Sommerfeld's Arbeit stets nur um die „ebenen“ Probleme. Es wird die Lichtquelle als eine zu den Schirmkanten parallele leuchtende Linie oder als unendlich entfernt in einer zu den Schirmkanten senkrechten Ebene vorausgesetzt, sodass der ganze Bewegungszustand nur von zwei in dieser Ebene zu zählenden rechtwinklichen Coordinaten abhängig wird. Im folgenden habe ich mich, um das ohnehin verwickelte Problem ein wenig zu vereinfachen, noch weiter auf den wichtigsten Specialfall beschränkt, dass die Lichtquelle in einer auf der Schirmebene

*) Math. Annalen l. c.

senkrechten Richtung unendlich weit entfernt ist, dass das Licht normal auf den Spalt auftrifft.

4. Methode der Lösung. Das ebene Problem für den Spalt reducirt sich leicht auf folgende Aufgabe: eine Function u zu bestimmen, welche überall im Raume der Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0 \tag{6}$$

genügt und welche selbst oder deren Normal-Derivirte auf dem Schirm S vorgeschriebene Randwerthe annimmt. Wir wollen hier der Einfachheit wegen nur den ersten Fall in's Auge fassen, dass die Randwerthe für u selbst vorgeschrieben sind.

Der Schirm besteht aus einer unendlichen ebenen, unendlich dünnen Platte, aus der ein Parallelstreifen, der Spalt, herausgeschnitten ist.

Die Schirmhälften zu beiden Seiten des Spaltes, aus welchen sich der ganze Schirm S zusammensetzt, unterscheide man als rechte Schirmhälfte R und linke Schirmhälfte L. Denkt man sich für einen Augenblick die linke Schirmhälfte fort und die Werthe u nur auf der rechten Schirmhälfte vorgeschrieben, so kann man die hieraus entspringende Randwerthaufgabe sofort lösen: Aus einer gewissen von Herrn Sommerfeld construirten, aber von ihm nicht weiter verwandten Function U lässt sich nämlich unmittelbar eine andere Function g herstellen, welche als Green'sche Function für diese Randwerthaufgabe betrachtet werden kann. Denn diese Function g hat die Eigenschaften, überall im Raume der Differentialgleichung (6) zu genügen mit Ausnahme eines Punktes 0, in welchem sie unstetig wird, wie der Logarithmus der reciproken Distanz von diesem Punkte, und überall auf der rechten Schirmhälfte Null zu sein. Sind u die für die gesuchte Lösung von (6) auf der rechten Schirmhälfte vorgeschriebenen Randwerthe, so bilde man:

$$u(0) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega\, u \frac{\partial g}{\partial n} \tag{7}$$

das Integral über die Oberfläche ω der rechten Schirmhälfte erstreckt und unter n die äussere Normale auf dem Schirm verstanden. Dann lehrt der (hier auf die Ebene anzuwendende) Green'sche Satz, dass $u(0)$ als Function des Ortes des Punktes 0 die Differentialgleichung (6) löst und auf der rechten Schirmhälfte die Randwerthe u annimmt, also die Lösung der gestellten Randwerthaufgabe ist. Im Grunde ist dabei freilich vorausgesetzt, dass man der Existenz einer Function u von diesen Eigenschaften im Voraus gewiss sei. Da dies nicht der Fall ist — da ausreichende allgemeine Existenzbeweise für Lösungen der Differentialgleichung (6) mit vorgeschriebenen Randwerthen noch nicht vorliegen, ist der Existenzbeweis

eigens zu führen, was aber grade auf Grund der Darstellung (7) von u leicht wird.

Ganz ähnlich kann man sich die rechte Schirmhälfte entfernt denken und eine Lösung von (6), ein „Wellenpotential" suchen, welches auf der linken Schirmhälfte vorgeschriebene Randwerthe u annimmt. Die Lösung dieser zweiten Randwerthaufgabe erhält man mit Hülfe einer ebenso zu gewinnenden Green'schen Function g' in der Form:

$$u(0) = \frac{1}{2\pi}\int d\omega\, u \frac{\partial g'}{\partial n}. \tag{8}$$

Das Integral ist nun über die linke Schirmhälfte erstreckt. Hiermit sind also die Randwerthaufgaben für die beiden einzelnen Schirmhälften gelöst. Die Lösung der Aufgabe für den ganzen Schirm, für den Spalt, gelingt durch ein Annäherungsverfahren, welches aus einer fortwährenden abwechselnden Lösung dieser beiden auf die einzelnen Schirmhälften bezüglichen Randwerthaufgaben besteht.

Man gehe aus von den vorgeschriebenen Randwerthen u auf der rechten Schirmhälfte R und bilde nach (7) ein Wellenpotential, welches diese Randwerthe annimmt und welches mit u_1 bezeichnet werden möge. Auf der linken Schirmhälfte L wird dieses Wellenpotential gewisse von Null verschiedene Werthe annehmen. Man suche die Ergänzung dieser Werthe zu den auf L vorgeschriebenen Randwerthen und bilde mit Hülfe derselben nach (8) ein zweites Wellenpotential u_2. Die Addition der beiden Wellenpotentiale ergiebt eine Function $u_1 + u_2$, welche auf L die vorgeschriebenen Randwerthe annimmt und welche dasselbe auf R leisten würde, wenn nicht das zweite von L ausgehende Potential u_2 auf R von Null verschiedene Werthe erhielte. Um wieder auf R die vorgeschriebenen Randwerthe herzustellen, hat man in (7) für u diese Werthe, welche das von L ausgehende Wellenpotential u_2 auf R annimmt, mit negativem Vorzeichen einzusetzen und das entstehende Wellenpotential u_3 zu $u_1 + u_2$ zu addiren. Die Function $u_1 + u_2 + u_3$ ergiebt nun wieder auf R die vorgeschriebenen Randwerthe, hingegen lässt sie einen kleinen Rest auf L, weil u_3 auf L nicht Null ist. Man bilde mit Hülfe der negativ genommenen Restwerthe nach (8) ein viertes Wellenpotential u_4 und addire es zu den vorigen. Dann entsteht eine Function, die auf L die vorgeschriebenen Werthe annimmt, — und so fort gehend erhält man stets Functionen, die auf der einen Schirmhälfte die vorgeschriebenen Randwerthe liefern, während sie auf der andern einen Rest lassen. Wenn der Rest bei ständiger Fortsetzung derselben beiden Operationen schliesslich verschwindet, so muss man auf diese Weise eine Lösung des Beugungsproblems für den Spalt erhalten.

Das Verfahren ist kurz zu charakterisiren als „ein fortwährendes

Hinüber- und Herüberwerfen der Randwerthe von der einen Schirmhälfte auf die andre.“ Es ist ein besonders glücklicher Umstand, dass die im Allgemeinen recht complicirte Function g einen sehr einfachen Ausdruck annimmt, sobald der Punkt 0 in die Schirmebene rückt, sodass die Wirkung des Herüberwerfens verhältnissmässig leicht zu übersehen ist. So viel schien von vornherein höchst plausibel, dass das Verfahren convergent sein würde, wenn man den Spalt breit gegen die Wellenlänge voraussetzte. Infolge jenes Umstandes hat sich aber der Nachweis der *Convergenz des Verfahrens für jeden noch so engen Spalt* erbringen lassen.

Für den zweiten Fall, dass nicht die Randwerthe von u selbst, sondern seiner Normalderivirten vorgeschrieben sind, liessen sich auf ganz ähnlichem Wege entsprechende Resultate gewinnen.

5. Resultate. Hiermit ist eine Lösung des Problems erreicht, welche den Mathematiker etwa in dem Sinne befriedigen kann, wie die Lösung einer speciellen Aufgabe der Potentialtheorie durch Neumann's Methode des arithmetischen Mittels. Es ist jedenfalls der strenge Nachweis erbracht, dass eine Lösung der gestellten Randwerthaufgabe überhaupt möglich ist, was bekanntlich bisher nur nach dem „Rayleigh'schen Princip“ wahrscheinlich zu machen war, aber keineswegs mit Sicherheit fest stand.

Indessen reicht diese Form der Lösung auch aus, um eine Reihe von physikalischen Folgerungen abzuleiten. Wenn nämlich der Spalt sehr breit gegen die Wellenlänge ist, convergirt das Näherungsverfahren so rasch, dass man die höheren Glieder gegenüber den ersten Gliedern $u_1 + u_2$ vernachlässigen kann — von solchen Fällen abgesehen, wo die ersten Glieder selbst sehr klein werden. Dadurch lässt sich erweisen, dass die bekannte aus der Kirchhoff'schen Theorie entspringende Formel für die Intensität des durch einen Spalt gebeugten Lichts:

$$(9) \qquad J = \left[\frac{\sin\left(\pi \frac{d}{\lambda} \sin\chi\right)}{\pi \frac{d}{\lambda} \sin\chi}\right]^2 \qquad (d \text{ Spaltbreite, } \lambda \text{ Wellenlänge, } \chi \text{ Beugungswinkel})$$

bei weitem Spalt und bei kleinen Beugungswinkeln eine gute Annäherung an die strenge Theorie darstellt. *Wir erhalten also eine strenge Bestätigung der auf mathematisch unzulässiger Grundlage abgeleiteten älteren Formel für die Fälle, in welchen für die ältere Theorie überhaupt Gültigkeit zu vermuthen war. Ferner findet sich eine neue exaktere Formel für die Intensitätsvertheilung:*

$$(10) \qquad J = \left[\frac{\sin\left(\pi \frac{d}{\lambda} \sin\chi\right)}{2\pi \frac{d}{\lambda} \sin\frac{\chi}{2}}\right]^2 + \left[\frac{\cos\left(\pi \frac{d}{\lambda} \sin\chi\right)}{2\pi \frac{d}{\lambda} \cos\frac{\chi}{2}}\right]^2,$$

welche sich bei wachsender Spaltbreite auch für immer grössere und grössere Beugungswinkel der strengen Theorie anschliesst.

Weitere Folgerungen sind die, dass bei breitem Spalt abgesehn von den ganz grossen Beugungswinkeln in der Nähe eines Rechten *keine Polarisation* des gebeugten Lichtes eintritt, dass hingegen eine *Phasenverschiebung* zwischen den Schwingungscomponenten parallel zum Spalt und senkrecht zum Spalt besteht.

Schliesslich findet man hier auch die strenge Grundlage für die Theorie der Beugung von Impulsen durch einen Spalt, welche Herr Sommerfeld*) kürzlich in Rücksicht auf die Beugung der Röntgenstrahlen ausgeführt hat.

Was der Lösung durch das Näherungsverfahren fehlt, ist die Berechenbarkeit — wenigstens die practisch durchführbare — der höheren Glieder und damit des ganzen Intensitätsverlaufs für enge Spalten. Diese Lücke möglichst auszufüllen, ist ein zweiter später folgender Theil dieser Arbeit bestimmt.

Es sei noch angedeutet, dass die Lösung auch andrer Beugungsprobleme, z. B. der Beugung durch eine kreisförmige Oeffnung, mit Hülfe ganz ähnlicher Näherungsmethoden und daraus folgend eine begrenzte Bestätigung der Kirchhoff'schen Theorie auch für andere Fälle als möglich vorauszusehen ist.

§ 3.

Die Green'schen Functionen für den einfachen graden Rand.

6. Die beiden Randwerthaufgaben für den einfachen Rand. Wie im vorigen Paragraphen erwähnt wurde, gründet sich die Lösung des Beugungsproblems für den Spalt auf die — im Wesentlichen — bereits aus Herrn Sommerfeld's Untersuchungen zu entnehmende Lösung gewisser Randwerthaufgaben für den einfachen graden Rand. Genau präcisirt sind es folgende Aufgaben für den graden Rand, die in Betracht kommen. Wir wählen als Nullpunkt einen Punkt der graden Kante selbst, den Schnitt des Schirms mit einer zu ihm senkrechten Ebene als positive y-Axe, senkrecht dazu die x-Axe, benutzen aber auch Polarcoordinaten r, φ, wobei auf der einen Schirmseite $S_a : \varphi = 0$, auf der andern $S_b : \varphi = 2\pi$ sein soll. Die *erste* Aufgabe ist nun die: Eine Function u zu suchen, die überall der Differentialgleichung:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + k^2u = 0 \tag{11}$$

genügt, überall nebst ihren ersten Derivirten endlich und stetig ist und nur unstetig werden darf für $x = 0,\ y > 0$, beim Uebergang von einer

*) Zeischrift für Mathematik und Physik. Bd. 46. 1901.

Schirmseite auf die andere. Die Function muss, wenn man sich für $y > 0$ dem Werth $x = 0$ nähert, vorgeschriebene und eventuell für beide Schirmseiten verschiedene Werthe annehmen. Ferner muss sie im Unendlichen von der Form auslaufender Wellen sein — ein Ausdruck, der

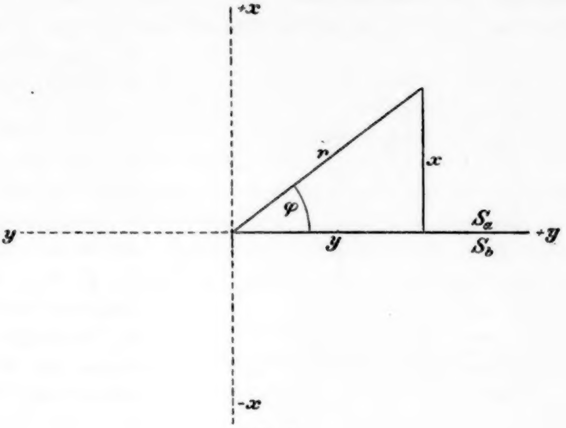


Fig. 2.

unten seine nähere Erläuterung finden wird. Bei der *zweiten* Aufgabe ist nur so viel geändert, dass an Stelle von u der Differentialquotient $\frac{du}{dx}$ auf beiden Seiten des Schirmes S_a und S_b vorgeschriebene Werthe annehmen muss; vorläufig wollen wir uns durchaus auf die erste Aufgabe beschränken.

7. Die Green'sche Function für die 1. Aufgabe. Die Rolle der Green'schen Function für die erste der beiden Randwerthaufgaben spielt der folgende Ausdruck:

$$g(r_0, \varphi_0, r, \varphi) = U(r_0, \varphi_0, r, \varphi) - U(r_0, \varphi_0, r, -\varphi), \tag{12}$$

worin U die in Herrn Sommerfeld's Arbeit (Math. Annalen Bd. 47, pag. 351) auftretende Function bedeutet:

$$U(r_0, \varphi_0, r, \varphi) = \frac{1}{4i\pi}\int U_0\left(k\sqrt{r_0^2 + r^2 - 2rr_0 \cos\alpha}\right) \frac{\sin\frac{\alpha}{2}\, d\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\varphi_0 - \varphi}{2}}.$$

U und g hängen ab von der Lage eines „Argumentpunktes" r, φ und eines „Parameterpunktes" r_0, φ_0. Unter U_0 ist die Bessel'sche Function zweiter Art verstanden:

$$U_0(z) = \int_0^\infty du e^{-iz\cos iu}, \tag{13}$$

welche mit Heine's Cylinderfunctionen erster Art $J(z)$ und zweiter Art $K(z)$ durch die Relation:

$$U_0(z) = K(z) - \frac{i\pi}{2} J(z)$$

zusammenhängt. Die Integrationsvariable α ist complex und in der α-Ebene über einen Weg A zu führen, der an folgende Bedingungen gebunden ist.

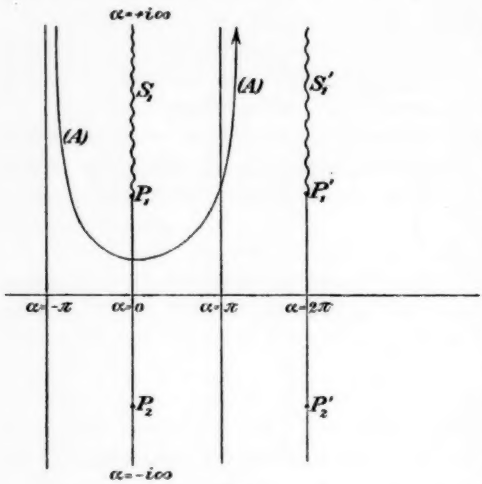


Fig 3.

Man trage in der α-Ebene die Punkte ein, für welche

$$r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos\alpha = 0$$

ist; das sind zwei conjugirte Punkte $P_1\,P_2$ auf der imaginären Axe, und eine Reihe von Punkten P_1', P_2' u. s. w., deren Abscissen um Vielfache von 2π gegen die Abscissen von P_1 und P_2 vermehrt oder vermindert sind. Der Weg (A) beginnt nun im Positiv-imaginär-Unendlichen zwischen oder auf den Geraden pars real. $\alpha = -\pi$ und pars real. $\alpha = 0$, bleibt stets oberhalb der reellen Axe, läuft aber zwischen P_1 und der reellen Axe hindurch und kehrt zwischen oder auf den Graden pars real. $\alpha = \pi$ und pars real. $\alpha = 2\pi$ in's Positiv-imaginär-Unendliche zurück. Die Wurzel $\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos\alpha}$ machen wir eindeutig, indem wir von den Punkten P_1, P_1' u. s. w. parallel zur imaginären Axe Sperrlinien S_1, S_1' in's Unendliche ziehn, und schreiben ihr auf der reellen Axe den positiven Werth vor. Es wird später zu betrachten sein, wie weit der Weg A in jedem Falle deformirt werden darf.

Man sieht der Function g an, dass sie für $\varphi = 0$ und $\varphi = 2\pi$, wenn also der Argumentpunkt von der einen oder andern Seite auf den Schirm rückt, verschwindet. Aus Herrn Sommerfeld's Herstellungsweise der Function U geht hervor, dass sie selbst und damit auch g der Differentialgleichung (11) genügt. Ferner lässt sich zeigen, dass g nur im Parameterpunkte d. h. für $r = r_0$, $\varphi = \varphi_0$ unstetig wird und zwar wie der Logarithmus der reciproken Distanz von diesem Punkte. Diese Eigenschaften qualificiren die Function g zur Green'schen Function für die

eingangs gestellte Randwerthaufgabe. Wenn wir wüssten, dass es eine ausserhalb des Schirms überall endliche und stetige Lösung der Differentialgleichung gäbe, welche auf dem Schirm vorgeschriebene Werthe u annähme, so würde dieselbe durch das über beide Seiten des Schirmes zu erstreckende Integral:

$$(14) \qquad 2\pi u(0) = \int ds \frac{\partial g}{\partial n} u.$$

geliefert werden, unter der weiteren Voraussetzung, dass ein ähnliches über einen unendlich grossen Kreis zu führendes Zusatzintegral verschwände. Da aber die Theorie der Differentialgleichung (11) noch nicht bis zu einem allgemeinen Existenzbeweis für Lösungen in grösseren Gebieten durchgebildet ist, so müssen wir den Existenzbeweis im speciellen nachliefern, also zeigen, dass diese Integraldarstellung wirklich die vorgeschriebenen Randwerthe liefert, dass sie der Differentialgleichung (11) genügt und sich im Unendlichen verhält, wie es der physikalischen Natur unsrer Aufgabe entspricht.

Eine Specialisirung können wir schon hier vornehmen. Wir werden es stets nur mit auf beiden Schirmseiten gleichen Randwerthen u zu thun haben und können daher statt des obigen Integrals schreiben:

$$2\pi u(0) = \int_0^\infty dr\, u \left\{\frac{\partial g}{\partial n_a} + \frac{\partial g}{\partial n_b}\right\}.$$

Da für $\varphi = 0$: $\frac{\partial g}{\partial n_a} = \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial \varphi}$ und für $\varphi = 2\pi$: $\frac{\partial g}{\partial n_b} = -\frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial \varphi}$ ist, so gilt:

$$\frac{\partial g}{\partial n_a} + \frac{\partial g}{\partial n_b} = \frac{1}{r}\left\{\left(\frac{\partial g}{\partial \varphi}\right)_{\varphi=0} - \left(\frac{\partial g}{\partial \varphi}\right)_{\varphi=2\pi}\right\}$$

und daraus ergiebt sich leicht mit Hülfe von (12), wenn wir noch die Abkürzung G einführen:

$$(15) \qquad 2\pi u(0) = \int_0^\infty dr\, u\, G,$$

$$(16) \quad G = G(r_0, \varphi_0, r) = \frac{1}{4i\pi r}\sin\frac{\varphi_0}{2}\int U_0\left(k\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\alpha}\right)\sin\frac{\alpha}{2}\, d\alpha$$

$$\cdot\left\{\frac{1}{\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\varphi_0}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\varphi_0}{2}\right)^2}\right\}.$$

8. Verschiedene Formen von G. Um die zu dem Existenzbeweis von $u(0)$ nöthigen Eigenschaften des Ausdrucks G leichter erkennen zu können, nehmen wir einige Umformungen mit ihm vor.

In Bezug auf die Bessel'sche Function $U_0(z)$ sei vorausbemerkt, dass sie zu singulären Punkten nur den Nullpunkt und den unendlich fernen Punkt hat. Im Nullpunkt wird sie unstetig in der Form:

$$U_0(z) = \log\frac{1}{z} + \text{funct. cont.} \tag{17}$$

Im Unendlichen hat sie den Grenzwerth:

$$U_0(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, e^{-i\left(z+\frac{\pi}{4}\right)}. \tag{18}$$

Für die Derivirte:

$$U_1(z) = \frac{d\,U_0(z)}{dz}$$

ergiebt sich daraus die Unstetigkeit im Nullpunkt:

$$U_1(z) = -\frac{1}{z} + \text{funct. cont.} \tag{19}$$

und der Grenzwerth im Unendlichen:

$$U_1(z) = -i\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, e^{-i\left(z+\frac{\pi}{4}\right)}. \tag{20}$$

Der Verlauf des obigen Integrationswegs (A) aus und nach dem Unendlichen ist so gewählt, dass der Ausdruck $-iz = -ik\sqrt{r^2+r_0^2-2rr_0\cos\alpha}$ im Unendlichen keinen reellen positiven Theil bekommt, sodass der ganze Integrand von G auf den entfernten Theilen des Integrationswegs hinreichend klein wird, um trotz der unendlichen Weglänge nur einen endlichen Beitrag zum Integral zu liefern.

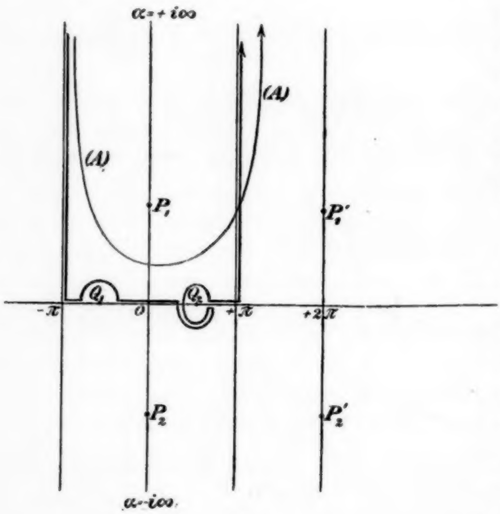


Fig. 4.

Im Endlichen hat man als Unstetigkeitspunkte zunächst die schon oben in die Figur eingezeichneten Punkte P_1, P_2 u. s. w., in welchen das Argument von U_0, die Wurzel

$$\sqrt{r^2+r_0^2-2rr_0\cos\alpha}$$

verschwindet, ausserdem aber die Punkte:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \cos\frac{\varphi_0}{2} \quad \text{oder} \quad \alpha = \pm\,\varphi_0 + 4n\pi$$

und n ganzzahlig.

$$\cos\frac{\alpha}{2} = -\cos\frac{\varphi_0}{2} \quad \text{oder} \quad \alpha = \pm\,(2\pi - \varphi_0) + 4n\pi.$$

In dem Intervall $-\pi$ bis $+\pi$ befinden sich immer zwei von diesen Punkten,

nämlich im Falle $\varphi_0 < \pi$	im Falle $\varphi_0 > \pi$
der Punkt Q_1: $\alpha = -\varphi_0$	der Punkt Q_1: $\alpha = -(2\pi - \varphi_0)$
und der Punkt Q_2: $\alpha = +\varphi_0$	und der Punkt Q_2: $\alpha = +(2\pi - \varphi_0)$.

Die Punkte Q_1 und Q_2 liegen in beiden Fällen symmetrisch zum Nullpunkt.

Man kann nun den Weg (A) in folgender Weise deformiren, ohne einen Unstetigkeitspunkt zu überschreiten. Man gehe vom Unendlichen her längs der Graden pars real. $\alpha = -\pi$ bis zur reellen Axe, dann weiter längs der reellen Axe, dabei den Punkt Q_1 durch einen kleinen Bogen nach oben umgehend, bis man in die Nähe des Punktes Q_2 kommt. Hier mache man einen kleinen Bogen nach unten, der zu dem Bogen über Q_1 völlig symmetrisch ist, kehre aber an der reellen Axe wieder um und umkreise den Punkt Q_2 einmal vollständig im Sinne des Uhrzeigers, bis man von neuem auf die reelle Axe trifft. Dieser gehe man dann entlang bis zum Punkt $\alpha = +\pi$ und kehre längs der Geraden pars real. $\alpha = +\pi$ in's Unendliche zurück.

Der Integrand von G wechselt mit α sein Vorzeichen. Es wird daher das Integral über den Weg von $\alpha = -\pi$ bis $\alpha = +\pi$, wenn man die eine vollständige Umkreisung von Q_2 ausnimmt, Null und es kann demnach der Integrationsweg in die folgenden drei Stücke aufgelöst werden: 1) Vom Unendlichen längs der Graden pars real. $\alpha = -\pi$ bis $\alpha = -\pi$. 2) Umkreisung von Q_2. 3) Von $\alpha = +\pi$ längs der Graden pars real $\alpha = +\pi$ ins Unendliche. Die Integrale über diese Strecken wollen wir mit G_1, G_2, G_3 bezeichnen. Man setze zunächst in G_2:

$$z = \cos\frac{\alpha}{2}, \qquad z_0 = \cos\frac{\varphi_0}{2}.$$

Dann geht G_2 über in:

$$G_2 = -\frac{1}{2i\pi r}\sin\frac{\varphi_0}{2}\int U_0\left(k\sqrt{(r+r_0)^2 - 4rr_0z^2}\right)dz\left\{\frac{1}{(z-z_0)^2} + \frac{1}{(z-z_0)^2}\right\}$$

$$= +\frac{1}{2i\pi r}\sin\frac{\varphi_0}{2}\,\frac{d}{dz_0}\left\{\int U_0\left(k\sqrt{(r+r_0)^2 - 4rr_0z^2}\right)dz\left[\frac{1}{z_0 - z} + \frac{1}{z_0 + z}\right]\right\}.$$

Das Integral ist um den Punkt Q_2 herum zu nehmen. Es ist aber in Q_2 im Falle $\varphi_0 < \pi$: $\alpha = +\varphi_0$, demnach $z = z_0$. Hingegen im

Falle $\varphi_0 > \pi$ ist in Q_2: $\alpha = 2\pi - \varphi_0$ und demnach $z = -z_0$. In Bezug auf z ist also im ersten Falle um den Punkt $z = z_0$, im zweiten um den Punkt $z = -z_0$ zu integriren. Im ersten Fall liefert der Theil $\frac{1}{z_0 + z}$ der Klammer im Integranden keinen Beitrag zum Integral, weil er in dem vom Integrationsweg umschlossenen Gebiet stetig bleibt, im zweiten Fall aus demselben Grunde der Theil $\frac{1}{z_0 - z}$. Was in jedem Fall übrig bleibt, ist von der Form des Cauchy'schen Integrals der Functionentheorie, lässt sich nach dem Cauchy'schen Satze ausführen und ergiebt:

$$G_2 = \pm \frac{1}{r} \sin\frac{\varphi_0}{2} \frac{d}{dz_0} U_0\left(k\sqrt{(r+r_0)^2 - 4rr_0z_0^2}\right)$$

oder:

$$G_2 = \mp \frac{2}{r} \frac{d}{d\varphi_0} U_0\left(k\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\varphi_0}\right),$$

wobei — *ein Gebrauch der von jetzt an beibehalten werden soll* — das obere Zeichen für $\varphi_0 < \pi$, das untere für $\varphi_0 > \pi$ gilt.

Es ist weiter G_1 und G_3 zu behandeln. Man ersetze in G_1 α durch $-\pi + iv$, dann hat man von $v = +\infty$ bis $v = 0$ zu integriren. Ebenso ersetze man in G_3 α durch $\pi + iv$, wo dann von $v = 0$ bis $v = +\infty$ zu integriren ist. Man erhält leicht:

$$G_1 = G_3 = \frac{1}{4\pi r} \sin\frac{\varphi_0}{2} \int_0^\infty U_0\left(k\sqrt{r^2 + r_0^2 + 2rr_0\cos iv}\right) \cos\frac{iv}{2}$$
$$\cdot\, dv \left\{ \left(\frac{1}{\sin\frac{iv}{2} - \cos\frac{\varphi_0}{2}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sin\frac{iv}{2} + \cos\frac{\varphi_0}{2}} \right)^2 \right\}.$$

Nunmehr wird der vollständige Ausdruck von G, wenn man noch in G_2 die Differentiation nach φ_0 ausführt:

$$(21)\qquad G(r_0, \varphi_0, r) = G_1 + G_2 + G_3 = \mp 2r_0 \sin\varphi_0\, k\, \frac{U_1(kD)}{D}$$
$$+ \frac{1}{2\pi r} \sin\frac{\varphi_0}{2} \int_0^\infty U_0(kD') \cos\frac{iv}{2}\, dv \left\{ \frac{1}{\left(\sin\frac{iv}{2} - \cos\frac{\varphi_0}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\sin\frac{iv}{2} + \cos\frac{\varphi_0}{2}\right)^2} \right\},$$

wobei zur Abkürzung gesetzt ist:

$$D = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\varphi_0}, \qquad D' = \sqrt{r^2 + r_0^2 + 2rr_0\cos iv}.$$

Beachtet man, dass der hier auftretende Integrand, wenn man den Factor U_0 abscheidet, ohne weiteres integrabel ist und führt in Rücksicht

auf diesen Umstand eine partielle Integration aus, so findet man als zweiten Ausdruck für G:

$$(22)\qquad G(r_0, \varphi_0, r) = \mp 2r_0 \sin\varphi_0 k \frac{U_1(kD)}{D}$$

$$-\frac{k}{\pi} r_0 \sin\frac{\varphi_0}{2} \int_0^\infty \frac{U_1(kD')}{D'} dv \left\{ \frac{\sin iv}{\sin\frac{iv}{2} - \cos\frac{\varphi_0}{2}} + \frac{\sin iv}{\sin\frac{iv}{2} + \cos\frac{\varphi_0}{2}} \right\}.$$

Aus den beiden Ausdrücken (21) und (22) von G lassen sich unmittelbar seine wichtigsten Eigenschaften erkennen. Man bemerkt nämlich sofort, dass das in (22) auftretende Integral stets endlich und stetig ist, von dem einzigen Fall abgesehn, dass $r = r_0 = 0$ ist. Das Glied vor dem Integral wird unstetig nur in dem Fall, dass $D = 0$ wird, worunter auch der Fall $r = r_0 = 0$ fällt. *Demnach wird überhaupt G nur unstetig im Falle $D = 0$, wenn also der Parameterpunkt r_0, φ_0 von der einen oder andern Seite auf den Schirm rückt oder analytisch ausgedrückt, wenn*

$$r_0 = r, \quad \varphi_0 = 0 \ \textit{oder}\ 2\pi$$

ist. Sehen wir von dem Falle $r_0 = r = 0$ ab, so wird die Unstetigkeit durch das erste Glied allein bestimmt und erhält nach (19) die Form:

$$(23)\qquad G = \pm 2r_0 \sin\varphi_0 \frac{F}{D^2} = \pm \frac{2r_0 \sin\varphi_0}{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos\varphi_0} \cdot F,$$

wobei F stetig und für $D = 0$:

$$(24)\qquad \lim F = 1$$

wird.

Das Verhalten von G für grosses r erkennt man am bequemsten aus dem Ausdruck (21). Das erste Glied wird für grosses r, und damit grosses D, nach (20) klein wie $\frac{1}{D^{\frac{3}{2}}}$. Unter dem Integral ist das Argument von U_0 stets grösser als $k(r + r_0)$. Man schliesst daraus leicht mit Hülfe von (18), dass das ganze Integral für grosses r klein wird wie $\frac{1}{\sqrt{k(r+r_0)}}$. Sein Beitrag zu G wird also klein, wie $\frac{1}{r\sqrt{r+r_0}}$. Daraus folgt alles in allem, *dass für wachsendes r der Ausdruck G klein wird von der Ordnung $\frac{1}{r^{\frac{3}{2}}}$.*

9. Existenzbeweis der Lösung der 1. Aufgabe. $u(0)$ hat die vorgeschriebenen Randwerthe u. Mit Hülfe der abgeleiteten Eigenschaften von G wollen wir nun die Eigenschaften des Ausdrucks:

$$(25)\qquad u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dr\, u\, G(r_0, \varphi_0, r)$$

studiren, wobei wir *die vorgeschriebenen Randwerthe u und ihre erste Derivirte nach r* überall auf dem Schirm — für alle Werthe von r — als *endlich und stetig* voraussetzen.

Zunächst lässt sich zeigen, dass $u(0)$ in u übergeht, wenn man den Abstand $x_0 = r_0 \sin \varphi_0$ des Parameterpunktes vom Schirm verschwindend klein werden lässt. Setzt man nämlich $G = r_0 \sin \varphi_0 H$, also:

$$u(0) = r_0 \sin \varphi_0 \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dr\, u\, H,$$

so sieht man, dass alle endlichen Theile des Integrals für verschwindendes $r_0 \sin \varphi_0$ zu $u(0)$ nichts beitragen können. Auch muss nach dem eben für G abgeleiteten Resultat bei wachsendem r die Grösse H klein werden wie $\frac{1}{r^{\frac{3}{2}}}$, sodass auch die unendliche Länge des Integrationswegs nur einen endlichen Beitrag zum Integral liefern kann, der mit dem verschwindenden Factor $r_0 \sin \varphi_0$ multiplicirt, selbst verschwindet. Es sind daher nur solche Stücke des Integrationsintervalles zu berücksichtigen, in welchen H unstetig wird. Das geschieht aber nur in dem Punkt des Schirms, an welchen der Parameterpunkt heranrückt, allein für $r = r_0$. Ist also ε eine beliebig kleine Grösse, so kann man setzen:

$$\text{Für } \lim r_0 \sin \varphi_0 = 0: \quad u(0) = r_0 \sin \varphi_0 \frac{1}{2\pi} \int_{r_0-\varepsilon}^{r_0+\varepsilon} dr\, u\, H.$$

In der Nähe des Parameterpunktes hat aber H nach (23) den Ausdruck:

$$H = \pm \frac{2F}{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \varphi_0}. \tag{26}$$

Daher wird in Rücksicht auf die Stetigkeit von u, die Kleinheit von ε und die Gleichung (24):

$$u(0) = \pm \frac{1}{2\pi} r_0 \sin \varphi_0\, u(r_0) \int_{r_0-\varepsilon}^{r_0+\varepsilon} \frac{2\,dr}{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \varphi_0}.$$

Die Ausführung des Integrals giebt:

$$u(0) = \pm \frac{1}{\pi} u(r_0) \left[\operatorname{arc\,tg} \frac{r_0(1-\cos\varphi_0) + \varepsilon}{r_0 \sin \varphi_0} - \operatorname{arc\,tg} \frac{r_0(1-\cos\varphi_0) - \varepsilon}{r_0 \sin \varphi_0} \right]$$

und daraus folgt für $\lim \varphi_0 = 0$ oder $\lim \varphi_0 = 2\pi$:

$$u(0) = u(r_0).$$

Hiermit ist das gewünschte Resultat bewiesen, dass $u(0)$ auf beiden Seiten des Schirmes die Randwerthe u annimmt.

10. **Nachtrag für Punkte in der Schirmkante.** Indessen sind im vorigen noch die Punkte in unmittelbarer Nähe der Schirmkante, die sehr kleinen Werthe von r_0, auszunehmen, da für diese r_0 und r gleichzeitig sehr klein und daher die Ausdrücke (23) und (26) ungültig werden. Um den Beweis für diese Punkte nachzutragen, bezeichne man den vorgeschriebenen Randwerth von u für $r = 0$, an der Schirmkante, mit u_k und setze:

$$u = u_k + r \cdot w.$$

Dabei wird w eine stets endliche Grösse sein, weil wir die Endlichkeit von $\frac{\partial u}{\partial r}$ vorausgesetzt haben. Der Ausdruck (25) von $u(0)$ zerfällt damit in zwei Theile:

$$u'(0) = u_k \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty dr\, G(r_0, \varphi_0, r)$$

und

$$u''(0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty dr\, r\, w\, G(r_0, \varphi_0, r).$$

Von $u'(0)$ wird sich später zeigen, dass es überall auf dem Schirm, auch in der Schirmkante, den Werth u_k hat. Es kommt also hier nur darauf an, zu zeigen, dass $u''(0)$ in der Schirmkante, für verschwindendes r_0, verschwindet. Setzt man in $u''(0)$ wieder $G = r_0 \sin\varphi_0 H$, so folgt wie oben, dass es genügt, diejenigen Theile des Integrationsintervalls in Betracht zu ziehen, wo H unstetig wird, das ist die Nachbarschaft von $r = r_0$ oder, wenn r_0 sehr klein ist, die sehr kleinen Werthe von r. Es gilt also:

$$(27) \qquad \text{für } \lim r_0 \sin\varphi_0 = 0: \qquad u''(0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\varepsilon dr\, r\, w\, G(r_0, \varphi_0, r),$$

wobei ε eine sehr kleine Grösse ist.

Nun ist die Unstetigkeit von G für sehr kleines r_0 und r zu untersuchen. Geht man aus von dem Ausdruck (22) und bezeichnet das in demselben auftretende Integral mit J, so wird:

$$J = \int\limits_0^\infty \frac{U_1\left(k\sqrt{r^2 + r_0^2 + 2 r r_0 \cos iv}\right)}{\sqrt{r^2 + r_0^2 + 2 r r_0 \cos iv}} \sin iv\, dv \left\{ \frac{1}{\sin\frac{iv}{2} - \cos\frac{\varphi_0}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{iv}{2} + \cos\frac{\varphi_0}{2}} \right\}.$$

Setzt man $\sin\frac{iv}{2} = i\zeta$, so schreibt sich J:

$$J = 4\int\limits_0^\infty \frac{U_1\left(k\sqrt{(r + r_0)^2 + 4 r r_0 \zeta^2}\right)}{\sqrt{(r + r_0)^2 + 4 r r_0 \zeta^2}}\, \zeta\, d\zeta \left(\frac{1}{\zeta + i\cos\frac{\varphi_0}{2}} + \frac{1}{\zeta - i\cos\frac{\varphi_0}{2}} \right),$$

oder durch leichte Umstellungen:

$$J = \frac{8}{(4rr_0)^{\frac{3}{4}}} \int\limits_0^\infty U_1\left(k\sqrt{(r+r_0)^2+4rr_0\zeta^2}\right) \sqrt[4]{4rr_0\zeta^2}\, \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}}\, \frac{1}{\sqrt{\zeta^2+\frac{(r+r_0)^2}{4rr_0}}} \cdot \frac{\zeta^2}{\zeta^2+\cos^2\frac{\varphi_0}{2}}$$

und daraus folgt:

$$\operatorname{Mod} J < \frac{1}{(rr_0)^{\frac{3}{4}}} M \cdot \frac{8}{4^{\frac{3}{4}}} \int\limits_0^\infty \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}}\, \frac{1}{\sqrt{\zeta^2+\frac{(r+r_0)^2}{4rr_0}}}\, \frac{\zeta^2}{\zeta^2+\cos^2\frac{\varphi_0}{2}},$$

wobei:

M das Maximum des Moduls von $\sqrt[4]{4rr_0\zeta^2}\; U_1\left(k\sqrt{(r+r_0)^2+4rr_0\zeta^2}\right)$ im Integrationsintervall bedeutet.

Setzt man: $\eta^2 = 4rr_0\zeta^2$, so ist M das Maximum des Moduls von

$$V = \sqrt{\eta}\; U_1\left(k\sqrt{(r+r_0)^2+\eta^2}\right).$$

Für alle grösseren endlichen und nach (20) auch für alle unendlichen Werthe nimmt V mässige endliche Werthe an. Für kleine Werthe von η ist nach (19) nahe:

$$V = -\frac{1}{k}\, \frac{\sqrt{\eta}}{\sqrt{(r+r_0)^2+\eta^2}}.$$

Das Maximum des Moduls dieses Ausdrucks tritt ein für $\eta = r + r_0$ und ist gleich $\frac{1}{k\sqrt{2(r+r_0)}}$; dieses für kleine Werthe von η eintretende Maximum wächst mit abnehmendem $r + r_0$ in's Unendliche, während die für grössere Werthe von η eventuell eintretenden Maxima stets endlich bleiben. Für hinreichend kleines $r + r_0$ ist daher dieses Maximum das grösste, es folgt also:

$$M = \frac{1}{k\sqrt{2(r+r_0)}}.$$

Setzt man jetzt:

(28)
$$J = \frac{A}{(rr_0)^{\frac{3}{4}}\sqrt{(r+r_0)}}$$

so folgt:

$$\operatorname{Mod} A < \frac{2}{k} \int\limits_0^\infty \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}}\, \frac{1}{\sqrt{\zeta^2+\frac{(r+r_0)^2}{4rr_0}}}\, \frac{\zeta^2}{\zeta^2+\cos^2\frac{\varphi_0}{2}}.$$

Dieses Integral ist offenbar stets eine endliche Grösse, sodass A endlich sein muss.

Führt man nun den Ausdruck (28) für das Integral in (22) ein und ersetzt zugleich das erste Glied in (22) durch seinen Ausdruck (23), so folgt:

$$G = \pm \frac{2r_0 \sin\varphi_0}{r^2+r_0^2-2rr_0\cos\varphi_0} \cdot F + \frac{A'\cdot\pi}{k}\, r_0 \sin\frac{\varphi_0}{2}\, \frac{1}{(rr_0)^{\frac{3}{4}}}\, \frac{1}{\sqrt{r+r_0}}$$

wo F und A' endliche Grössen sind. Führt man dies weiter in (27) ein und berücksichtigt, dass man wegen der Kleinheit von ε w durch einen Mittelwerth $\overline{w}$ und F nach (24) durch 1 ersetzen darf, so folgt:

$$u''(0) = \pm \frac{1}{\pi} r_0 \sin \varphi_0 \, \overline{w} \int_0^{\varepsilon} \frac{r\,dr}{r^2 + r_0^{\,2} - 2 r r_0 \cos \varphi_0} + r_0^{\frac{1}{2}} \sin \frac{\varphi_0}{2} \, \overline{w} \int_0^{\varepsilon} \frac{dr\, r^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{r + r_0}} A'.$$

Von dem zweiten Integral sieht man sofort, dass es stets endlich ist, weil der Integrand nicht einmal für $r_0 = 0$ zur -1. Ordnung unstetig wird. Demnach verschwindet sein Product mit $r_0^{\frac{1}{2}}$, wenn $r_0 = 0$ wird. Das erste Integral giebt ausgeführt:

$$u''(0) = \pm \frac{1}{\pi} r_0 \sin \varphi_0 \, \overline{w} \log \frac{\sqrt{r_0^{\,2} + \varepsilon^2 - 2 \varepsilon r_0 \cos \varphi_0}}{r_0}$$
$$\pm r_0 \cos \varphi_0 \, \overline{w} \left[\operatorname{arc\,tg} \frac{\varepsilon - r_0 \cos \varphi_0}{r_0 \sin \varphi_0} + \frac{\pi}{2} - \varphi_0 \right].$$

Dieser Ausdruck verschwindet ebenfalls für $r_0 = 0$.

Damit ist aber nachgewiesen, *dass auch für* $r_0 = 0$ *die Function* $u(0)$ *in den vorgeschriebenen Randwerth* $u'(0) = u_k$ *übergeht*, und zwar gilt dies, da wir keinen speciellen Werth von φ_0 vorausgesetzt haben, *in welcher Richtung man sich auch der Schirmkante nähern mag.*

11. Schluss des Existenzbeweises. Sehr leicht lässt sich zeigen, dass $u(0)$ der Differentialgleichung (11) genügt. Da $G(r_0, \varphi_0, r)$ für jeden Werth von r als Function von r_0, φ_0 betrachtet eine Lösung der Differentialgleichung ist, so muss auch die Superposition unendlich vieler solcher Lösungen, aus der nach (25) $u(0)$ entsteht, eine Lösung der Differentialgleichung darstellen, wofern die Summe nur nebst ihren ersten und zweiten Derivirten endlich bleibt. Das ist aber der Fall deshalb, weil $G(r_0, \varphi_0, r)$ nebst allen Derivirten überall ausserhalb des Schirmes endlich ist und weil es selbst — und wie sich leicht zeigen lässt, ebenso seine Derivirten — mit wachsendem r in solcher Weise klein wird, dass die unendliche Länge des Integrationsweges für r nicht zu einer Unstetigkeit der Integrale führt.

Somit ist bewiesen, dass *der Ausdruck* (25) *für* $u(0)$ *thatsächlich die Lösung der gestellten Randwerthaufgabe für den einfachen Rand liefert* — von einem Punkte abgesehn: Wir haben das Verhalten von $u(0)$ im Unendlichen noch nicht nachgeprüft. Dies wird sich indessen bequemer an einer späteren Stelle erledigen lassen.

12. Der Werth von G für $\varphi_0 = \pi$. Von ganz besonderer Bedeutung für das Folgende ist *der Werth, den* G *in der Ebene des Schirms*, aber in ihrem vom Schirm freien Theil, *für* $\varphi_0 = \pi$ *annimmt.* Wir

wollen diesen Werth kurz durch $G(r_0, r)$ bezeichnen. Man findet aus (22) für $\varphi_0 = \pi$:

$$G(r_0, r) = -\frac{4k}{\pi} r_0 \int_0^\infty dv \cos\frac{iv}{2} \frac{U_1\left(k\sqrt{r^2 + r_0^2 + 2rr_0 \cos iv}\right)}{\sqrt{r^2 + r_0^6 + 2rr_0 \cos iv}}.$$

Führt man eine neue Variable w ein durch:

$$\sin iw = \sin\frac{iv}{2} \frac{2\sqrt{rr_0}}{r + r_0}, \qquad \cos iw = \frac{\sqrt{r^2 + r_0^2 + 2rr_0 \cos iv}}{r + r_0}$$

so folgt:

$$(29) \qquad G(r_0, r) = -\frac{4k}{\pi}\sqrt{\frac{r_0}{r}} \int_0^\infty dw\, U_1\{k(r + r_0)\cos iw\}.$$

Jetzt erinnere man sich an die Integraldarstellung der Bessel'schen Function (13):

$$U_0(z) = \int_0^\infty du\, e^{-iz\cos iu}.$$

Es sei R eine sehr grosse Zahl und man setze:

$$U_0'(z) = \int_0^R du\, e^{-iz\cos iu}, \quad U_0''(z) = \int_R^\infty du\, e^{-iz\cos iu}, \quad U_0(z) = U_0'(z) + U_0''(z).$$

In $U_0'(z)$ darf man unter dem Integralzeichen differenziren und findet daher:

$$U_1(z) = \frac{dU_0(z)}{dz} = -i\int_0^R du \cos iu\, e^{-iz\cos iu} + U_1''(z), \quad U_1''(z) = \frac{d}{dz} U_0''(z).$$

Dies wollen wir in (29) einführen, dann folgt:

$$(30) \qquad G(r_0, r) = \frac{4ki}{\pi}\sqrt{\frac{r_0}{r}} \int_0^\infty dw \int_0^R du \cos iu\, e^{-ik(r+r_0)\cos iw \cos iu}$$

$$- \frac{4k}{\pi}\sqrt{\frac{r_0}{r}} \int_0^\infty dw\, U_1''\{k(r + r_0)\cos iw\}.$$

Wir wollen zunächst nachweisen, dass das zweite Integral dieses Ausdrucks für wachsendes R verschwindet.

Aus:

$$U_0''(z) = \int_R^\infty du\, e^{-iz\cos iu}$$

folgt durch partielle Integration:

$$U_0''(z) = \left[-\frac{e^{-iz\cos iu}}{z\sin iu} - \frac{i}{z}\int \frac{du\cos iu}{\sin^2 iu} e^{-iz\cos iu}\right]_R^\infty$$

$$= \frac{e^{-iz\cos iR}}{z\sin iR} - \frac{i}{z}\int\limits_R^\infty \frac{du\cos iu}{\sin^2 iu} e^{-iz\cos iu}.$$

Hier darf man offenbar unter dem Integralzeichen differenziren und findet:

$$U_1''(z) = \frac{d}{dz} U_0''(z) = -\frac{i}{z}\,\frac{\cos iR}{\sin iR} e^{-iz\cos iR} + \frac{i}{z^2}\int\limits_R^\infty \frac{du\cos iu}{\sin^2 iu} e^{-iz\cos iu}$$

$$-\frac{1}{z}\int\limits_R^\infty \frac{du\cos^2 iu}{\sin^2 iu} e^{-iz\cos iu}.$$

Für wachsendes R wird $\operatorname{tg} iR = 1$ und die beiden Integrale verschwinden wegen des immer rascher oscillirenden Factors $e^{-iz\cos iu}$. Daher wird für sehr grosses R:

$$U_1''(z) = -\frac{i}{z} e^{-iz\cos iR}.$$

Damit folgt:

$$\int dw\, U_1''\{k(r+r_0)\cos iw\} = -\frac{i}{k(r+r_0)}\int\limits_0^\infty \frac{dw}{\cos iw} e^{-ik(r+r_0)\cos iw \cos iR}.$$

Auch hier oscillirt der Exponentialfactor immer rascher, je mehr R wächst. Das Integral verschwindet also für wachsendes R und es bleibt somit in (30) nur das erste Integral übrig:

$$G(r_0, r) = \frac{4ki}{\pi}\sqrt{\frac{r_0}{r}}\int\limits_0^\infty dw\int\limits_0^R du\cos iu\, e^{-ik(r+r_0)\cos iw\cos iu}.$$

Um die Integrationsordnung unbedenklich beliebig vertauschen zu können, wollen wir setzen:

$$G(r_0, r) = \frac{4ki}{\pi}\sqrt{\frac{r_0}{r}}\int\limits_0^R dw\int\limits_0^R du\cos iu\, e^{-ik(r+r_0)\cos iw\cos iu}$$

und erst nach der Integration R in's Unendliche wachsen lassen.

Wir führen neue Variabeln ein durch die Gleichungen:

$$\sin i\left(\frac{u+w}{2}\right) = i\varrho\cos\psi, \quad \sin i\left(\frac{u-w}{2}\right) = i\varrho\sin\psi.$$

Es folgt durch leichte Rechnungen:

$$\cos iw\cos iu = \varrho^2 + 1, \quad \cos iu = \sqrt{1+\varrho^2+\varrho^4\sin^2\psi\cos^2\psi} + \varrho^2\sin\psi\cos\psi,$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial\varrho} & \frac{\partial u}{\partial\psi} \\ \frac{\partial w}{\partial\varrho} & \frac{\partial w}{\partial\psi} \end{vmatrix} = \frac{2\varrho}{\sqrt{1+\varrho^2+\varrho^4\sin^2\psi\cos^2\psi}}$$

und damit:

$$(31)\qquad G(r_0, r)$$
$$= \frac{8ki}{\pi}\sqrt{\frac{r_0}{r}}\int\int \varrho\, d\varrho\, d\psi\, e^{-ik(r+r_0)(\varrho^2+1)}\left(1 + \frac{\varrho^2 \sin\psi\cos\psi}{\sqrt{1+\varrho^2+\varrho^4\sin^2\psi\cos^2\psi}}\right).$$

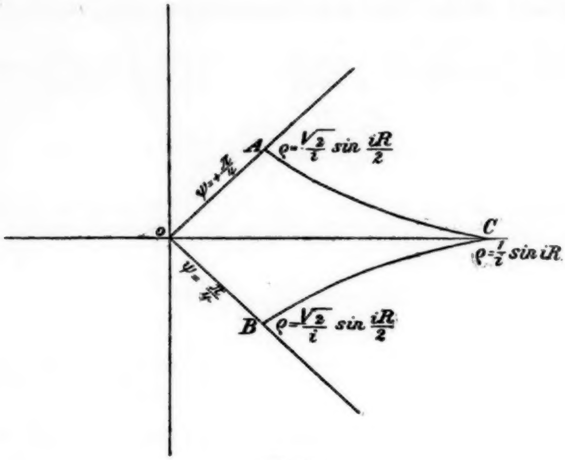


Fig. 5.

Zwischen welchen Grenzen ist dieses Integral zu nehmen? In der u, w-Ebene ist das Gebiet durch die Geraden $u=0$, $w=0$, $u=R$, $w=R$ begrenzt.

Die Abbildung in die ϱ-ψ-Ebene ergiebt:

a) für $u=0$: $\sin\frac{iw}{2} = i\varrho\cos\psi = -i\varrho\sin\psi$ d. h. $\psi = -\frac{\pi}{4}$.

b) „ $w=0$: $\sin\frac{iu}{2} = i\varrho\cos\psi = +i\varrho\sin\psi$ d. h. $\psi = +\frac{\pi}{4}$,

c) „ $u=R$: $\operatorname{tg}\psi = \dfrac{\sin i\frac{R-w}{2}}{\sin i\frac{R+w}{2}}$, $\varrho^2 = -1 + \cos iR\cos iw$.

Wenn also w von 0 bis R geht, so läuft $\operatorname{tg}\psi$ von 1 nach 0, ψ von $+\frac{\pi}{4}$ nach 0, zugleich ϱ von $\frac{\sqrt{2}}{i}\sin\frac{iR}{\lambda}$ bis $\frac{1}{i}\sin iR$.

d) für $w=R$: $\operatorname{tg}\psi = \dfrac{\sin i\frac{u-R}{2}}{\sin i\frac{u+R}{2}}$, $\varrho^2 = -1 + \cos iR\cos iu$.

Wenn u von 0 bis R geht, so geht ψ von $-\frac{\pi}{4}$ bis 1, ϱ von $\frac{\sqrt{2}}{i}\sin\frac{iR}{2}$ bis $\frac{1}{i}\sin iR$.

Das Integrationsgebiet für r, ψ wird demnach ein zur Axe $\psi = 0$ symmetrisches Viereck mit den beiden geraden Seiten OA, OB und den beiden krummlinigen AC, BC. Aus der Symmetrie des Gebietes zur ψ-Axe folgt, dass der zweite Theil der Klammer in (31), welcher den Factor $\sin\psi$ enthält, keinen Beitrag zum Integral liefert. Im ersten Theil lässt sich die Integration nach ϱ ausführen:

$$(32)\qquad G(r_0, r) = \frac{4}{\pi}\sqrt{\frac{r_0}{r}}\,\frac{e^{-ik(r+r_0)}}{r+r_0}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} d\psi\left[1 - e^{-ik(r+r_0)\varrho^2}\right]$$

wobei nun noch für ϱ die auf den Curven AC, BC gültigen Werthe einzusetzen sind.

Auf AC, für $u = R$ hat man:

$$i\varrho\cos\psi = \sin i\,\frac{R+w}{2}, \qquad i\varrho\sin\psi = \sin i\,\frac{R-w}{2}.$$

Durch Elimination von w aus diesen Gleichungen findet man leicht:

$$\varrho^2 = \frac{i^2\sin^2 iR}{1+\sin 2\psi\cos iR}$$

und ganz ähnlich findet man auf CB, für $w = R$

$$\varrho^2 = \frac{i^2\sin^2 iR}{1-\sin 2\psi\cos iR}$$

damit wird:

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} d\psi\, e^{-ik(r+r_0)\varrho^2} = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\psi\, e^{\frac{ik(r+r_0)\sin^2 iR}{1+\sin 2\psi\cos iR}}.$$

Man sieht diesem Integral an, dass es in Folge der Oscillation des Exponentialfactors bei wachsendem R verschwindet, und es bleibt somit als *einfacher Ausdruck von* $G(r_0, r)$ der erste Theil von (32) übrig:

$$(33)\qquad \boldsymbol{G(r_0, r) = 2\sqrt{\frac{r_0}{r}}\,\frac{e^{-ik(r+r_0)}}{r+r_0}}.$$

13. Analoges für die 2. Randwerthaufgabe. Die bisherigen Betrachtungen dieses Paragraphen haben sich durchaus auf die erste der beiden eingangs erwähnten Randwerthaufgaben für den graden Rand beschränkt, bei welcher die Oberflächenwerthe von u selbst gegeben waren.

Es sind jetzt noch analoge Ueberlegungen anzustellen für die zweite Randwerthaufgabe, bei welcher die Normalderivirte $\frac{\partial u}{\partial x}$ auf dem Schirm vorgeschriebene Werthe annehmen soll.

Als Green'sche Function für diese zweite Aufgabe tritt wieder ein aus Herrn Sommerfeld's U-Function sofort herzustellender Ausdruck ein, nämlich:

$$(34) \qquad g'(r_0, \varphi_0, r, \varphi) = U(r_0, \varphi_0, r, \varphi) + U(r_0, \varphi_0, r, -\varphi).$$

Es genügt g' ebenso der Differentialgleichung (11) und wird ebenso im Parameterpunkte r_0, φ_0 unstetig wie g. Nur wird g' auf dem Schirm nicht Null, dafür sieht man aber sofort, dass auf beiden Seiten des Schirms (für $\varphi = 0$ und 2π) die Normalderivirte $\frac{\partial g'}{\partial n}\left(= \pm \frac{1}{r}\frac{\partial g'}{\partial \varphi}\right)$ verschwindet. Für die gesuchte Function u liefert daher der Green'sche Satz:

$$2\pi u(0) = -\int dw\, g' \frac{\partial u}{\partial n}.$$

Trennt man die beiden Schirmseiten $S_a(\varphi = 0)$ und $S_b(\varphi = 2\pi)$ von einander, so wird:

$$2\pi u(0) = -\int_0^\infty dr \left\{ g'_{\varphi=0}\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_a + g'_{\varphi=2\pi}\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_b \right\}.$$

Späterhin kommt allein der Fall in Betracht, dass:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_a = -\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_b = \frac{\partial u}{\partial x}$$

ist. Dann wird:

$$(35) \qquad 2\pi u(0) = \int_0^\infty dr \frac{\partial u}{\partial x} \cdot G',$$

wobei nach (12) und (34):

$$(36) \qquad G' = -g'_{(\varphi=0)} + g'_{(\varphi=2\pi)}$$

$$= \frac{1}{2i\pi}\int U_0\left(k\sqrt{r_0^2 + r^2 - 2rr_0\cos a}\right)\sin\frac{\alpha}{2}\, d\alpha \left[\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\varphi_0}{2}} - \frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\varphi_0}{2}}\right]$$

ist, das Integral über den oben beschriebenen Weg A genommen.

Es wäre nun im Grunde dieselbe Untersuchung der Eigenschaften von G' und daran anschliessend der Existenzbeweis für die Lösung $u(0)$ der zweiten Randwerthaufgabe zu führen, wie sie oben für G und die erste Randwerthaufgabe durchgeführt worden sind. Es mögen uns diese Betrachtungen, deren Ergebniss ja vorauszusehen ist, wegen ihrer nahen Analogie zu den früheren Ableitungen erspart bleiben und es seien nur zwei Resultate für G' hervorgehoben:

Eine Deformation des Integrationswegs A, wie in Nr. 8, ergiebt für G' die Form:

$$(37)\qquad G' = \pm 2\,U_0\left(k\sqrt{r^2+r_0^2-2rr_0\cos\varphi_0}\right)$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty U_0\left(k\sqrt{r^2+r_0^2+2rr_0\cos iv}\right)\cos\frac{iv}{2}\,dv\left[\frac{1}{\cos\frac{\varphi_0}{2}-\sin\frac{iv}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{\varphi_0}{2}+\sin\frac{iv}{2}}\right].$$

Ferner findet man sofort aus (16) und (36):

$$G = \frac{1}{r}\,\frac{\partial G'}{\partial\varphi_0}$$

und daraus folgt für $\varphi_0 = \pi$ nach (33) der späterhin wichtige einfache Ausdruck:

$$(38)\qquad \text{Für } \varphi_0 = \pi:\quad \frac{1}{r_0}\,\frac{\partial G'}{\partial\varphi_0} = 2\sqrt{\frac{r}{r_0}}\,\frac{e^{-ik(r+r_0)}}{r+r_0}.$$

§ 4.

Das Näherungsverfahren für die Beugung durch einen Spalt.

14. Präcisirung der Aufgabe.*) Nach diesen Vorbereitungen gehen wir an unsre eigentliche Aufgabe, die Behandlung der Beugung des

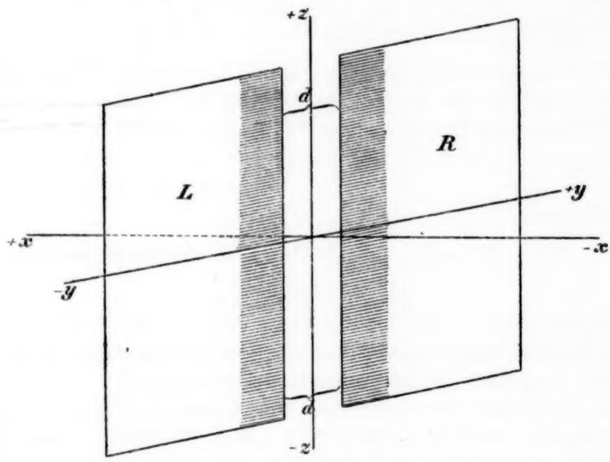


Fig. 6.

Lichts durch einen Spalt. Wir beschränken uns, wie erwähnt, von vornherein auf den Fall, dass eine plane Welle aus dem Unendlichen senk-

*) Vgl. Poincaré, Acta mathematica Bd. XVI, pag. 302 ff.

recht zur Spaltebene einfällt. Eine Normale der Wellenebene, welche durch die Mitte des Spalts geht, nehmen wir zur x-Axe; wir wollen dieselbe zur Fixirung der Vorstellungen horizontal denken, und es schreite die Welle von positivem zu negativem x fort. Der ganze (vertikal zu denkende) Schirm S zerfällt in eine rechte Hälfte $R(y>0)$ und eine linke $L(y<0)$. Als z-Axe nehmen wir die Mittellinie des Spaltes. Die Spaltbreite sei d.

Die Componenten der electrischen Schwingung X, Y, Z genügen nach Maxwell den Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = a^2 \Delta^2 X, \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = a^2 \Delta^2 Y, \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = a^2 \Delta^2 Z$$

verbunden mit der Bedingung:

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0,$$

und genau denselben Gleichungen genügen die Componenten des magnetischen Vectors L, M, N. Solange es sich um rein periodische Vorgänge der Periode τ handelt, kann man setzen:

$$(39) \qquad X = \text{pars real.}\left(e^{\frac{2\pi i t}{\tau}} \cdot \xi\right), \quad Y = \text{pars real.}\left(e^{\frac{2\pi i t}{\tau}} \cdot \eta\right),$$

$$Z = \text{pars real.}\left(e^{\frac{2\pi i t}{\tau}} \cdot \zeta\right),$$

wo τ die Schwingungsperiode ist und ξ, η, ζ kurz als die Componenten der *complexen Amplitude* der electrischen Schwingung bezeichnet werden sollen, und erhält dann unter Einführung der Wellenlänge $\lambda = a\tau$ und der Hülfsgrösse

$$(40) \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

die Gleichungen:

$$(41) \qquad \Delta^2\xi + k^2\xi = 0, \quad \Delta^2\eta + k^2\eta = 0, \quad \Delta^2\zeta + k^2\zeta = 0,$$

$$(42) \qquad \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0.$$

Ein identisches System findet sich für die Componenten λ, μ, ν der complexen Amplitude der magnetischen Schwingung.

Die „Intensität" der electrischen Schwingung in jedem Punkte wird gegeben durch $(\text{Mod. } \xi)^2 + (\text{Mod. } \eta)^2 + (\text{Mod. } \zeta)^2$, die der magnetischen durch $(\text{Mod. } \lambda)^2 + (\text{Mod. } \mu)^2 + (\text{Mod. } \nu)^2$.

Nun sind verschiedene Fälle zu unterscheiden je nach der Art der Polarisation der einfallenden Welle. Sei dieselbe erstens horizontal polarisirt. Dann findet bekanntlich die electrische Schwingung vertikal statt. Es ist also $\xi = \eta = 0$. Da ferner eine Abhängigkeit der Schwingung

von der z-Coordinate nicht bestehen kann, so folgt $\frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0$, sodass die Gleichung (42) von selbst erfüllt wird. Es bleibt allein die letzte Gleichung (41)

$$\text{(A)} \qquad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + k^2 \zeta = 0.$$

Die Randbedingung am Schirm besteht, wie schon oben erwähnt, darin, dass die electrische Schwingung senkrecht auf dem Schirm stehen muss. Die in der Schirmebene liegenden Componenten η, ζ müssen also verschwinden. Da dies für η von selbst geschieht, so bleibt als Randbedingung auf dem Schirm:

$$\text{(B)} \qquad \zeta = 0.$$

Sei zweitens die einfallende Welle vertikal polarisirt. Dann schwingt der electrische Vector horizontal und der magnetische Vector steht vertikal. Es wird also $\lambda = \mu = 0$ und es bleibt wieder allein:

$$\text{(A')} \qquad \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial y^2} + k^2 \nu = 0.$$

Was die Randbedingungen in diesem Falle angeht, so hängen bekanntlich nach den Maxwell'schen Gleichungen die zeitlichen Aenderungen der electrischen Componenten von den räumlichen Derivirten der magnetischen Componenten ab und als Bedingung, dass die in die Schirmebene fallenden electrischen Componenten dauernd verschwinden, ergiebt sich aus den Maxwell'schen Gleichungen:

$$\text{(B')} \qquad \frac{\partial \nu}{\partial x} = 0.$$

Die Lichtintensität in jedem Punkte des Raumes wird gegeben für horizontal polarisirtes Licht durch:

$$(43) \qquad J = (\text{Mod. } \zeta)^2,$$

und für vertikal polarisirtes durch:

$$(44) \qquad J = (\text{Mod. } \nu)^2.$$

Es sind jetzt noch die Bedingungen im Unendlichen hinzuzufügen.

Hat etwa ζ in grosser Entfernung vom Schirm, für grosses x die Form:

$$\zeta = (\alpha + i\beta) e^{ikx} \qquad \alpha, \beta \text{ Constante},$$

so folgt aus (39):

$$Z = \text{pars real.} \left(\zeta e^{\frac{2\pi i t}{\tau}}\right) = \alpha \cos 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} + \frac{t}{\tau}\right) - \beta \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} + \frac{t}{\tau}\right).$$

Das ist die allgemeine Form einer ebenen von positivem nach negativem x laufenden Welle. Wäre hingegen: $\zeta = (\alpha + i\beta) e^{-ikx}$, so würde man für Z eine in umgekehrter Richtung laufende Welle erhalten.

Die physikalische Aufgabe verlangt, dass nur eine einzige aus dem Unendlichen einfallende Welle existirt, welche von positivem x herkommt, während im übrigen nur in's Unendliche auslaufende Wellen auftreten dürfen, die vom Schirm durch Reflexion oder Beugung ihren Ursprung nehmen. Als Grenzbedingung im Unendlichen ergiebt sich daher:

(45) $$\zeta = (\alpha + \beta i) e^{ikx} + \text{auslaufende Wellen.}$$

Nun wäre im Grunde eine Untersuchung einzuschalten, woran man *analytisch* auslaufende Wellen im Gegensatz zu einlaufenden erkennt. Doch dürfen wir uns dies hier ersparen, weil bei den Formen, die uns später begegnen, die Entscheidung ohne weiteres zu fällen sein wird.

Durch geeignete Wahl des Anfangspunktes der Zeitrechnung kann man $\beta = 0$ machen. Setzt man ausserdem die Intensität der einfallenden Welle gleich 1, so wird:

(C) Im Unendlichen: $\zeta = e^{ikx} + \text{auslaufende Wellen.}$

Genau ebenso hat man im Falle vertikal polarisirten Lichtes zu verlangen:

(C′) Im Unendlichen: $\nu = e^{ikx} + \text{auslaufende Wellen.}$

Schliesslich wollen wir noch den Fall in Betracht ziehn, dass die einfallende Welle aus gewöhnlichem unpolarisirtem Licht besteht. Dann lässt sich die Welle in eine horizontal und eine vertikal polarisirte Componente ζ und ν zerlegen, deren jede nach den eben aufgestellten Gleichungen zu verfolgen ist. Die Lichtintensität in jedem Punkte wird gegeben durch:

(46) $$J = (\text{Mod. } \zeta)^2 + (\text{Mod. } \nu)^2.$$

Der Polarisationszustand des gebeugten Lichts hängt ab von dem Verhältniss:

(47) $$\frac{\text{Mod. } \zeta}{\text{Mod. } \nu}.$$

Ist dasselbe gleich 1, so ist das Licht unpolarisirt. Ist es grösser als 1, so ist das Licht horizontal, ist es kleiner als 1, so ist das Licht vertikal polarisirt.

15. Das Näherungsverfahren für den Fall der horizontal polarisirten einfallenden Welle. Wir betrachten vorläufig nur den Fall einer horizontal polarisirten einfallenden Welle, suchen also eine Lösung der Gleichungen (A), (B), (C). Man setze:

(48) $$\zeta = e^{ikx} - u.$$

Dann erhält man für u wiederum die Differentialgleichung (A)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0.$$

Die Randbedingung (B) auf dem Schirm geht über in:

(49) $$\text{Für } x = 0,\ |y| > \frac{d}{2}: \quad u = 1$$

und die Bedingung (C) verwandelt sich in die einfachere, dass u im Unendlichen nur aus auslaufenden Wellen bestehen soll. Man bemerkt die Verwandtschaft dieser Randwerthaufgabe mit der im vorigen Paragraphen für den einfachen Rand gelösten ersten Aufgabe.

Um das gegenwärtige Problem auf Grund jenes früheren zu lösen, schlagen wir folgendes Näherungsverfahren ein, dessen Darstellung hier ein klein wenig gegen die Uebersicht in § 2 aus formalen Gründen abgeändert erscheint.

Beistehende Figur stelle einen Horizontalschnitt durch den Schirm dar. Wir führen in der x-y Ebene für denselben Punkt 0 zwei Systeme von

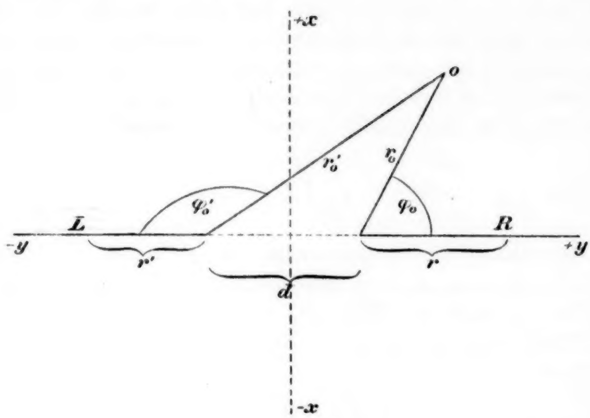


Fig. 7.

Polarcoordinaten r_0, φ_0 und r_0', φ_0' ein, welche von den beiden Kanten K_R und K_L des Spaltes aus in der durch die Figur erläuterten Weise zu zählen sind. Die Punkte auf den beiden Schirmhälften legen wir fest durch ihre Distanzen r (auf R) und r' (auf L) von den respectiven Schirmkanten.

Nun lässt sich zunächst eine Function u_1 bestimmen, welche als Function des Ortes des Punktes 0 betrachtet der Wellengleichung (A) genügt und welche auf der einen Schirmhälfte R den gewünschten Werth 1

hat. Dieselbe wird nämlich nach Nr. 9 ff. geliefert durch den Ausdruck (25):

$$u_1(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty dr\, G(r_0, \varphi_0, r).$$

Ganz ebenso wird eine Function v_1, welche auf der Schirmhälfte L den Werth 1 annimmt, geliefert durch:

$$v_1(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty dr'\, G(r_0', \varphi_0', r').$$

Die Summe $u_1 + v_1$ würde die Lösung des Problems darstellen, wenn u_1 auf der linken und v_1 auf der rechten Schirmhälfte verschwände. Es ist physikalisch ziemlich evident, dass u_1 und v_1 Lichtbewegungen darstellen, die sich wesentlich senkrecht zur Schirmfläche von ihrer respectiven Schirmhälfte aus fortpflanzen und nur wenig in seitlicher Richtung nach der andern Schirmhälfte hinüberstrahlen. In der That ergiebt sich später der Ausdruck $u_1 + v_1$ als eine gute Näherung für den Fall, dass die Spaltbreite d gross ist im Vergleich zur Wellenlänge. Geht man aber auf eine strenge Lösung aus, so muss man dies Hinüberstrahlen auf die andern Schirmhälften berücksichtigen und kann folgendermassen fortfahren.

Auf der linken Schirmhälfte nimmt u_1 den Werth an:

$$u_1(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty dr\, G(r_0, \pi, r).$$

Wir wollen diesen „hinübergeworfenen" Werth durch einen Querstrich kennzeichnen, für $G(r_0, \pi, r)$ den Ausdruck (33) einführen und r_0 durch den Werth, den es nach der Figur für $\varphi_0 = \pi$ annimmt, nämlich $r' + d$ ersetzen. Dann folgt für den auf die linke Schirmhälfte hinübergeworfenen Werth von u:

$$\bar{u}_1(r') = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dr \sqrt{\frac{r'+d}{r}}\; \frac{e^{-ik(r+r'+d)}}{r+r'+d}$$

und ebenso folgt für den auf die rechte Schirmhälfte hinübergeworfenen Werth von v_1:

$$\bar{v}_1(r) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dr' \sqrt{\frac{r+d}{r'}}\; \frac{e^{-ik(r+r'+d)}}{r+r'+d}.$$

Die Randwerthe von $u_1 + v_1$ sind also auf den beiden Schirmhälften, statt 1 zu werden, gleich $1 + \bar{v}_1$ resp. $1 + \bar{u}_1$. Man suche nun die Randwerthe 1 selbst herzustellen, indem man die neuen Functionen bildet:

$$u_2(0) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty dr\, G(r_0, \varphi_0, r)\,\bar{v}_1(r),$$

$$v_2(0) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty dr'\, G(r_0', \varphi_0', r')\,\bar{u}_1(r').$$

Die erste Function hat auf R die Werthe $-\bar{v}_1$, die zweite auf L die Werthe $-\bar{u}_1$. Die Summe $u_1+v_1+u_2+v_2$ hätte also auf beiden Schirmen den Randwerth 1, wenn u_2 auf L und v_2 auf R verschwände. In Wirklichkeit geht u_2 auf L über in:

$$\bar{u}_2(r') = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty dr\,\sqrt{\frac{r'+d}{r}}\;\frac{e^{-ik(r+r'+d)}}{r+r'+d}\;\bar{v}_1(r)$$

und v_2 geht auf R über in:

$$\bar{v}_2(r) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty dr'\,\sqrt{\frac{r+d}{r'}}\;\frac{e^{-ik(r+r'+d)}}{r+r'+d}\;\bar{u}_1(r').$$

Diese Reste kann man in ähnlicher Weise zu beseitigen suchen, (es wird dies nicht weiter zu verfolgen nöthig sein), und durch ständige Wiederholung derselben Operationen des Herüberwerfens und der Lösung der Randwerthaufgaben für die einzelnen Schirmhälften kommt man zu der folgenden — zunächst hypothetischen — Lösung unseres Problems:

$$u(0) = \sum_{n=1}^{\infty}[u_n(0) + v_n(0)], \tag{51}$$

wobei die u_n und v_n aus den Recurrenzen gefunden werden:

$$\tag{52} \begin{aligned} u_{n+1}(0) &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty dr\, G(r_0, \varphi_0, r)\,\bar{v}_n(r),\\ v_{n+1}(0) &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty dr'\, G(r_0', \varphi_0', r')\,\bar{u}_n(r'), \end{aligned}$$

welche für $\varphi_0 = \pi$, resp. $\varphi_0' = \pi$ übergehn in:

$$\tag{53} \begin{aligned} \bar{u}_{n+1}(r') &= -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty dr\,\sqrt{\frac{r'+d}{r}}\;\frac{e^{-ik(r+r'+d)}}{r+r'+d}\;\bar{v}_n(r),\\ \bar{v}_{n+1}(r) &= -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty dr'\,\sqrt{\frac{r+d}{r'}}\;\frac{e^{-ik(r+r'+d)}}{r+r'+d}\;\bar{u}_n(r'). \end{aligned}$$

Man kann die Darstellung etwas vereinfachen, indem man die Integrale (52) in (51) einsetzt und beachtet, dass für $r = r'$, wie schon aus der Symmetrie der beiden Schirmhälften folgt, $\bar{u}_n(r') = \bar{v}_n(r)$ wird. Es findet sich dann unter leichter Abänderung der Bezeichnung:

$$(54) \qquad u(0) = +\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty dr\,[G(r_0, \varphi_0, r) + G(r_0', \varphi_0', r)]\,\bar{u}(r),$$

wobei:

$$(55) \qquad \bar{u}(r) = \sum_1^\infty \bar{u}_n(r),$$

$$(56) \qquad \bar{u}_{n+1}(r) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty dr' \sqrt{\frac{r+d}{r'}}\,\frac{e^{-ik(r+r'+d)}}{r+r'+d}\,\bar{u}_n(r'),$$

$$(57) \qquad \bar{u}_1(r) = +1.$$

Man kann hier $\bar{u}(r)$ als eine Art *Oberflächenbelegung* des Schirms auffassen, aus der nach (54) das Wellenpotential $u(0)$ im Raume abzuleiten ist. Das Annäherungsverfahren beschränkt sich auf die Herstellung der Oberflächenbelegung. Dem entsprechend lässt sich die Aufgabe, die uns noch bevorsteht, in zwei Theile zerlegen. Wir weisen zunächst nach, dass man von dem Anfangswerth (57) ausgehend durch die Recurrenzen (56) eine convergente Reihe (55) für die Oberflächenbelegung erhält, und zeigen später, dass das aus dieser Oberflächenbelegung hervorgehende räumliche Wellenpotential $u(0)$ allen unsern Forderungen Genüge leistet.

16. Hülfssatz zum Convergenzbeweis. Die Grundlage für den Convergenzbeweis des gegenwärtigen und eines ähnlichen später anzuwendenden Näherungsverfahrens bildet der folgende Satz. Seien:

$$(58) \qquad y_0 = 1,\ y_1 = y_1(x_1, x_2),\ y_2 = y_2(x_2, x_3) \cdots y_n = y_n(x_n, x_{n+1}) \cdots$$

eine Reihe verschiedener Functionen je zweier Variabeln. Jede dieser Functionen (abgesehen von y_0) habe die Eigenschaft, für positive Argumente stets positiv zu sein und mit dem Wachsen eines Argumentes in's Unendliche ständig bis auf Null abzunehmen, und dieselbe Eigenschaft komme auch der negativ genommenen Derivirten jeder Function nach dem zweiten Argument $\left(-\frac{\partial y_n}{\partial x_{n+1}}\right)$ zu. Ein Beispiel für derartige Functionen wäre $y_n = \frac{1}{x_n + x_{n+1}}$. Man bilde der Reihe nach die über alle positiven ganzzahligen Werthe der Argumente zu nehmenden Summen:

$$
(59)\qquad
\begin{aligned}
\chi_1(x_1) &= 1,\\
\chi_2(x_2) &= \sum_{x_1=0}^{\infty} (-1)^{x_1}\, y_1(x_1, x_2)\, \chi_1(x_1),\\
\chi_3(x_3) &= \sum_{x_2=0}^{\infty} (-1)^{x_2}\, y_2(x_2, x_3)\, \chi_2(x_2),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\\
\chi_{n+1}(x_{n+1}) &= \sum_{x_n=0}^{\infty} (-1)^{x_n}\, y_n(x_n, x_{n+1})\, \chi_n(x_n).\\
&\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

Setzt man:

$$
(60)\qquad y_0 \cdot y_1 \cdot y_2 \cdots y_n = \varphi_{n+1}(x_1, x_2, \cdots x_n, x_{n+1}),
$$

so kann man auch schreiben:

$$
(61)\quad \chi_{n+1}(x_{n+1}) = \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{x_n=0}^{\infty} (-1)^{x_1+x_2+\cdots+x_n}\, \varphi_{n+1}(x_1, x_2, \cdots x_n, x_{n+1}).
$$

Für diese n-fache Summe χ_{n+1} gelten die Ungleichheiten:

$$
(62)\qquad 0 < \chi_{n+1}(x_{n+1}) < \varphi_{n+1}(0, 0, \cdots 0, x_{n+1}),
$$

$$
(63)\qquad 0 < -\frac{\partial \chi_{n+1}(x_{n+1})}{\partial x_{n+1}} < -\frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial x_{n+1}}(0, 0, \cdots 0, x_{n+1})
$$

oder in Worten: *„Die Summe ist positiv und kleiner als ihr Anfangsglied. Ihr Differentialquotient nach x_{n+1} (der einzigen Variabeln, von der sie abhängt) ist negativ und dem absoluten Betrage nach kleiner, als der Differentialquotient ihres Anfangsgliedes nach x_{n+1}.“*

Es ist übrigens hier und im Folgenden stets der Fall der Gleichheit in dem der Ungleichheit als möglich mit einbegriffen zu denken. Auch soll durch die Forderung, dass eine Function ständig abnehme, ihre streckenweise Constanz nicht ausgeschlossen werden.

Beweis: Für $n = 0$ hat man $\chi_1 = 1$, $\varphi_1 = y_0 = 1$, sodass die Ungleichungen (62) und (63) für $n = 0$ (z. T. als Gleichheiten) erfüllt sind. Wir wollen annehmen, dass sie für irgend eine Zahl $n - 1$ gelten, dass also die Ungleichungen:

$$
(64)\qquad 0 < \chi_n(x_n) < \varphi_n(0, 0, \cdots 0, x_n),
$$

$$
(65)\qquad 0 < -\frac{\partial \chi_n(x_n)}{\partial x_n} < -\frac{\partial \varphi_n(0, 0, \cdots 0, x_n)}{\partial x_n}
$$

bewiesen seien und durch den Schluss von $n - 1$ auf n ihre Gültigkeit für jedes n nachweisen.

Die ersten Hälften der beiden Ungleichungen (64) und (65) besagen, dass χ_n eine stets positive und mit wachsendem x_n ständig abnehmende Function ist. Dieselbe Eigenschaft haben wir für $y_n(x_n, x_{n+1})$ eingangs vorausgesetzt, daher hat auch das Product $\chi_n(x_n)\, y_n(x_n, x_{n+1})$ diese Eigenschaft. Zudem muss es für unendliches x_n verschwinden, weil dies für y_n vorausgesetzt ist. Die Summe:

$$\chi_{n+1}(x_{n+1}) = \sum_{x_n=0}^{\infty} (-1)^{x_n}\, y_n(x_n, x_{n+1})\, \chi_n(x_n)$$

ist demnach aus lauter Gliedern von abwechselndem Vorzeichen und allmählich bis auf Null abnehmendem absoluten Betrage zusammengesetzt, das Anfangsglied ist positiv, und von einer solchen Summe ist klar, dass sie stets positiv und kleiner, als ihr erstes Glied ist, also:

$$0 < \chi_{n+1}(x_{n+1}) < y_n(0, x_{n+1})\, \chi_n(0)$$

oder in Rücksicht auf (64):

$$0 < \chi_{n+1}(x_{n+1}) < y_n(0, x_{n+1})\, \varphi_n(0, 0, \cdots 0)$$

oder nach der Definitionsgleichung (60) der φ_n:

$$0 < \chi_{n+1}(x_{n+1}) < \varphi_{n+1}(0, 0, \cdots 0, x_{n+1}),$$

das ist die Ungleichung (62).

Man findet ferner durch Differentiation der letzten Gleichung (59) nach x_{n+1}:

$$-\frac{\partial \chi_{n+1}(x_{n+1})}{\partial x_{n+1}} = \sum_{x_n=0}^{\infty} (-1)^{x_n} \left[-\chi_n(x_n) \frac{\partial y_n}{\partial x_{n+1}}(x_n, x_{n+1}) \right].$$

Dem hier in eckige Klammern eingefassten Ausdruck kommen nach (64), (65) und den obigen Voraussetzungen über den Differentialquotienten von y_n nach x_{n+1}, dieselben Eigenschaften zu, wie vorhin dem Product $\chi_n \cdot y_n$ und es folgt daher, wie oben:

$$0 < -\frac{\partial \chi_{n+1}(x_{n+1})}{\partial x_{n+1}} < -\chi_n(0) \frac{\partial \chi_n}{\partial x_{n+1}}(0, x_{n+1})$$

und nach (64):

$$0 < -\frac{\partial \chi_{n+1}(x_{n+1})}{\partial x_{n+1}} < -\varphi_n(0, 0, \cdots 0) \frac{\partial y_n}{\partial x_{n+1}}(0, x_{n+1})$$

oder in Rücksicht auf (60):

$$0 < -\frac{\partial \chi_{n+1}(x_{n+1})}{\partial x_{n+1}} < -\frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial x_{n+1}}(0, 0, \cdots 0, x_{n+1}).$$

Das ist aber die Ungleichung (63) und damit ist der Hülfssatz bewiesen.

Es ist leicht zu sehen, dass für das Bestehn der Ungleichheiten (62) und (63) bei einer Summe der Form (61) die Productform (60) von φ nicht wesentlich ist, sondern dass der Satz auch noch für sehr viel allgemeinere Functionen φ von beliebig vielen Argumenten bestehn bleibt, die sich mit dem Wachsen der Argumente nur in gewisser Weise asymptotisch der Null nähern müssen. Indessen passt sich der hier behandelte Specialfall am besten den folgenden Anwendungen an.

17. Convergenzbeweis. Wir kehren zu dem durch die Gleichungen (54)—(57) dargestellten Näherungsverfahren zurück und wollen gestützt auf den eben abgeleiteten Hülfssatz seine Convergenz beweisen.

Einige Glieder der Entwicklung von $\bar{u}(r)$ lauten explicit hingeschrieben, wenn man zum Auseinanderhalten der verschiedenen aufeinanderfolgenden Integrationen die Variabeln r und r', soweit es nöthig, mit geeigneten Indices versieht:

$$\bar{u}_1(r) \quad = 1,$$

$$\bar{u}_2(r) \quad = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty dr_1 \sqrt{\frac{r+d}{r_1}}\,\frac{e^{-ik(r+r_1+d)}}{r+r_1+d},$$

$$\bar{u}_3(r) \quad = +\frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty dr_2\,dr_1 \sqrt{\frac{r+d}{r_2}}\sqrt{\frac{r_2+d}{r_1}}\,\frac{e^{-ik(r+r_2+d+r_2+r_1+d)}}{(r+r_2+d)\,(r_2+r_1+d)},$$

. . . .

$$\bar{u}_{n+1}(r) = \left(-\frac{e^{-ikd}}{\pi}\right)^n e^{-ikr}\cdot\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty dr_n\,dr_{n-1}\cdots$$

$$\cdots dr_1\sqrt{\frac{r+d}{r_n}\cdot\frac{r_n+d}{r_{n-1}}\cdots\frac{r_2+d}{r_1}}\;\frac{e^{-ik[2r_n+2r_{n-1}+\cdots+2r_2+r_1]}}{(r+r_n+d)\,(r_n+r_{n-1}+d)\cdots(r_2+r_1+d)}.$$

Setzt man:

$$y_1(r_1, r_2) = \frac{1}{\sqrt{r_1}}\,\frac{1}{r_2+r_1+d} \tag{66}$$

und für $i \geqq 2$:

$$y_i(r_i, r_{i+1}) = \sqrt{\frac{r_i+d}{r_i}}\,\frac{1}{r_i+r_{i+1}+d}, \tag{67}$$

und ferner:

$$\varphi_{n+1}(r_1, r_2, \cdots r_n, r) = y_1(r_1, r_2)\,y_2(r_2, r_3)\cdots y_n(r_n, r) \tag{68}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{r_1}}\sqrt{\frac{r_2+d}{r_2}\cdots\frac{r_n+d}{r_n}}\;\frac{1}{r_1+r_2+d}\cdot\frac{1}{r_2+r_3+d}\cdots\frac{1}{r_n+r+d},$$

so wird:

$$(69)\quad \bar{u}_{n+1}(r) = \left(-\frac{e^{-ikd}}{\pi}\right)^n e^{-ikr}\cdot\sqrt{r+d}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\cdots\int\limits_0^\infty dr_n\, dr_{n-1}\cdots$$

$$\cdots dr_1\, e^{-ik[2r_n+2r_{n-1}+\cdots+2r_2+r_1]}\cdot\varphi_{n+1}(r_1, r_2, \cdots r_n, r).$$

In diesem n-fachen Integral lässt sich der Integrationsweg jeder Variabeln derartig in Intervalle zerlegen, dass der Exponentialfactor im Integranden von Intervall zu Intervall seine Vorzeichen wechselt. Die Zerlegung lässt sich folgendermassen zum Ausdruck bringen. Man setze:

$$r_1 = p_1 + \frac{\pi}{k}x_1,\ r_2 = p_2 + \frac{\pi}{2k}x_2, \cdots r_n = p_n + \frac{\pi}{2k}x_n,$$

oder in Rücksicht auf die Relation $k = \frac{2\pi}{\lambda}$:

$$(70)\qquad r_1 = p_1 + \frac{\lambda}{2}x_1,\ r_2 = p_2 + \frac{\lambda}{4}x_2, \cdots r_n = p_n + \frac{\lambda}{4}x_n.$$

Man erhält dann die einzelnen Intervalle, indem man p_1 zwischen 0 und $\frac{\lambda}{2}$, die übrigen p zwischen 0 und $\frac{\lambda}{4}$ variiren lässt und jedes x der Reihe nach auf allen möglichen positiven ganzzahligen Werthen festhält. Führt man diese Zerlegung des Integrals (69) aus und setzt dabei für die Variabeln in den einzelnen Intervallen die Werthe (70) ein, so folgt:

$$(71)\quad \bar{u}_{n+1}(r) = \left(-\frac{e^{-ikd}}{\pi}\right)^n e^{-ikr}\sqrt{r+d}\cdot\int\limits_0^{\frac{\lambda}{4}}\int\limits_0^{\frac{\lambda}{4}}\cdots\int\limits_0^{\frac{\lambda}{2}} dp_n\, dp_{n-1}\cdots$$

$$\cdots dp_1\, e^{-ik[2p_n+2p_{n-1}+\cdots+2p_2+p_1]}\chi_{n+1},$$

wobei:

$$(72)\qquad \chi_{n+1} = \chi_{n+1}(p_1, p_2, \cdots p_n, r) = \sum_{x_1=0}^\infty\sum_{x_2=0}^\infty\cdots\sum_{x_n=0}^\infty(-1)^{x_1+x_2+\cdots x_n}$$

$$\cdot\varphi_{n+1}\left(p_1 + \frac{\lambda}{2}x_1,\ p_2 + \frac{\lambda}{4}x_2, \cdots p_n + \frac{\lambda}{4}x_n, r\right)$$

ist, die Summationen über alle ganzzahligen Werthe der x erstreckt.

Aus (71) ergiebt sich nach dem Satz, dass die Summe der Moduln complexer Grössen grösser ist, als der Modul der Summe:

$$(73)\quad \text{Mod. }\bar{u}_{n+1}(r) < \left(\frac{1}{\pi}\right)^n\sqrt{r+d}\cdot\int\limits_0^{\frac{\lambda}{4}}\int\limits_0^{\frac{\lambda}{4}}\cdots\int\limits_0^{\frac{\lambda}{2}} dp_n\, dp_{n-1}\cdots dp_1\ \text{Mod. }\chi_{n+1}.$$

Für Mod. χ_{n+1} lässt sich aber leicht eine Grenze finden. Führt man die Werthe (70) in die Ausdrücke (66) und (67) ein, so wird y_i eine Function

von x_i und x'_{i+1} (für r hat man x_{n+1} zu setzen), welche stets positiv ist und mit dem Wachsen eines Argumentes in's Unendliche auf Null abnimmt, und dasselbe gilt für $-\frac{\partial y_i}{\partial x_{i+1}}$. Das sind aber die Eigenschaften, welche wir für die y_i der vorigen Nummer vorausgesetzt hatten. Die Grössen φ und χ gegenwärtiger Nummer setzen sich aus den y_i in gleicher Weise zusammen, wie die ebenso bezeichneten der vorigen Nummer. Demnach gilt für die Summe (72) der obige Satz, dass sie positiv und kleiner ist als ihr erstes Glied:

$$(74) \qquad 0 < \chi_{n+1} < \varphi_{n+1}(p_1, p_2, \cdots p_n, r)$$

und zugleich folgt für ihren Differentialquotienten:

$$(75) \qquad 0 < -\frac{\partial \chi_{n+1}}{\partial r} < -\frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial r}(p_1, p_2, \cdots p_n, r).$$

Da χ_{n+1} eine reelle und hiernach auch eine positive Grösse ist, so wird Mod. $\chi_{n+1} = \chi_{n+1}$. Führt man den Werth von φ aus (68) in (74) und die entstehende Grenze für Mod. χ in (73) ein, so erhält man:

$$(76) \qquad \text{Mod.}\, \bar{u}_{n+1}(r) < \left(\frac{1}{\pi}\right)^n \sqrt{r+d} \int\limits_0^{\frac{\lambda}{4}} \int\limits_0^{\frac{\lambda}{4}} \cdots \int\limits_0^{\frac{\lambda}{2}} dp_n\, dp_{n-1} \cdots dp_1$$
$$\cdot \sqrt{\frac{p_n+d}{p_n} \cdots \frac{p_2+d}{p_2} \cdot \frac{1}{p_1}}\, \frac{1}{r+p_n+d} \cdots \frac{1}{p_2+p_1+d}.$$

Mit einer Abschätzung dieses Integrals ist der Convergenzbeweis vollendet. Man kann zunächst nach p_1 integriren:

$$\int\limits_0^{\frac{\lambda}{2}} \frac{dp_1}{\sqrt{p_1}} \frac{1}{p_2+p_1+d} = \left[\frac{2}{\sqrt{p_2+d}} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{p_1}{p_2+d}}\right]_0^{\frac{\lambda}{2}} = \frac{2}{\sqrt{p_2+d}} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{\lambda}{2(p_2+d)}}$$

und daraus folgt:

$$\int\limits_0^{\frac{\lambda}{2}} \frac{dp_1}{\sqrt{p_1}} \frac{1}{p_2+p_1+d} < \frac{2}{\sqrt{p_2+d}} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{\lambda}{2d}}.$$

Die Einsetzung dieser Grenze in (76) ergiebt:

$$(77) \quad \text{Mod.}\, \bar{u}_{n+1}(r) < \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{\lambda}{2d}}\right) \frac{\sqrt{r+d}}{\pi^{n-1}} \int\limits_0^{\frac{\lambda}{4}} \cdots \int\limits_0^{\frac{\lambda}{4}} dp_n \cdots dp_2$$
$$\cdot \sqrt{\frac{p_n+d}{p_n} \cdots \frac{p_3+d}{p_3} \cdot \frac{1}{p_2}}\, \frac{1}{r+p_n+d} \cdots \frac{1}{p_3+p_2+d}.$$

Nun lässt sich nach p_2 integriren:

$$\int_0^{\frac{\lambda}{4}} \frac{dp_2}{\sqrt{p_2}} \frac{1}{p_3+p_2+d} = \frac{2}{\sqrt{p_3+d}} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{\lambda}{4(p_3+d)}} < \frac{2}{\sqrt{p_3+d}} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{\lambda}{4d}}.$$

Setzt man diese Grenze in (77) ein, so kann man nach p_3 integriren und wenn man so fortfährt und nur bei der letzten Integration nach p_n den genauen Werth des Integrals belässt, statt eine Grenze einzuführen, so erhält man:

$$(78)\ \text{Mod.}\,\bar{u}_{n+1}(r) < \left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{\lambda}{2d}}\right)\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{\lambda}{4d}}\right)^{n-2}\cdot\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{\lambda}{4(d+r)}}\right).$$

Aus dieser Ungleichung ist sofort das *wichtige Resultat* abzulesen: „*Die Reihe der $\bar{u}_n$ convergirt mindestens so rasch, wie eine nach Potenzen von* $\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{\lambda}{4d}}\right)$ *fortschreitende geometrische Reihe*, und da diese Grösse für jeden von Null verschiedenen Werth der Spaltbreite d kleiner als 1 ist, so folgt, *dass die Reihe für jede beliebige endliche Spaltbreite convergirt.*“

Uebrigens gilt die Ungleichung (78) nur für $n \geqq 2$, während für $n = 1$ leicht die einfachere erhalten wird:

$$(79) \qquad \text{Mod.}\,[\bar{u}_2(r)] < \frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{\lambda}{2(d+r)}}.$$

Man sieht aus (78) und (79), dass für wachsendes r sämmtliche $\bar{u}_n$ für $n \geqq 2$ klein werden wie $\frac{1}{\sqrt{r}}$, sodass *sich in grosser Entfernung vom Spalt die Oberflächenbelegung dem constanten Werth $\bar{u}_1 = 1$ annähert.*

Es sei hier noch eine Grenze für den Differentialquotienten von $\bar{u}_{n+1}$ nach r eingeschaltet, die sich im Folgenden nützlich erweist und die man durch Differentiation von (71) in Rücksicht auf (75) genau nach dem eben angewandten Verfahren erhält:

$$(80) \quad \text{Mod.}\,\frac{d}{dr}\left(\frac{u_{n+1}(r)\,e^{ikr}}{\sqrt{r+d}}\right) < \left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{\lambda}{2d}}\right)\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{\lambda}{4d}}\right)^{n-2} \cdot\frac{d}{dr}\left[-\frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{r+d}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{\lambda}{4(r+d)}}\right] \quad \text{für } n \geqq 2,$$

und speciell für $n = 1$:

$$\text{Mod.}\,\frac{d}{dr}\left(\frac{u_2(r)\,e^{ikr}}{\sqrt{r+d}}\right) < \frac{d}{dr}\left[-\frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{r+d}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{\lambda}{2(r+d)}}\right].$$

Die durch die Ungleichungen (78) und (79) gelehrte Convergenz unseres Verfahrens ist eine sehr rasche, sobald der Spalt breit gegen die Wellenlänge ist. Man erhält z. B. numerisch bei einer Spaltbreite von 50 Wellenlängen für $r = 0$:

$$\text{Mod.}\,|\bar{u}_n| < 0{\cdot}064{\cdot}[0{\cdot}045]^{n-2} \qquad n \geqq 2.$$

Ist die Spaltbreite gleich der Wellenlänge, so folgt:

$$\text{Mod.}\,|\bar{u}_n| < 0{\cdot}392[0{\cdot}295]^{n-2},$$

also immer noch eine ziemlich gute Convergenz.

Für $d = 0$ aber wird nicht etwa nur der Convergenzbeweis unzureichend, vielmehr hört hier in der That die Convergenz auf, da, wie leichte Rechnungen lehren, in diesem Grenzfalle sämmtliche $\bar{u}_n$ abwechselnd gleich ± 1 werden.

18. Das räumliche Wellenpotential. Wir gehen jetzt zum zweiten Theil unsrer Aufgabe über, zu zeigen, dass die durch die Summe der $\bar{u}_n$ dargestellte Oberflächenbelegung $\bar{u}$ des Schirms ein räumliches Wellenpotential $u(0)$ ergiebt, welches unsre Randwerthaufgabe löst. Es ist nach (54):

$$u(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty dr\; G(r_0, \varphi_0, r)\,\bar{u}(r) + \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty dr\; G(r_0', \varphi_0', r)\,\bar{u}(r).$$

Da $\bar{u}(r)$, wie oben nachgewiesen, für alle Werthe von r endlich und wegen (80) auch stetig ist, so können wir auf jedes dieser Integrale die Resultate von Nr. 9—11 anwenden. *Es folgt zunächst*, dass jedes der Integrale und demnach auch ihre Summe $u(0)$ *die Differentialgleichung* (A) *löst.* Wenn ferner der Punkt 0 auf die rechte Schirmhälfte R rückt, so wird $\varphi_0 = 0$ oder 2π, hingegen $\varphi_0' = \pi$. Das erste Integral geht also nach Nr. 9 und 10 in $\bar{u}(r_0)$ über, das zweite nimmt den Werth an:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty dr\sqrt{\frac{r_0+d}{r}}\;\frac{e^{-ik(r+r_0+d)}}{r+r_0+d}\;\bar{u}(r).$$

Ersetzt man hier $\bar{u}(r)$ durch die Summe $\sum\limits_1^\infty \bar{u}_n(r)$ und integrirt gliedweise, was bei der absoluten Convergenz der Summe erlaubt ist, so erhält man nach (56) als Werth des Integrals:

$$-\sum_{n=2}^{\infty}\bar{u}_n(r_0).$$

Demnach wird der Werth von $u(0)$ auf der rechten Schirmhälfte:

$$u(0) = \bar{u}(r_0) - \sum_{n=2}^{\infty}\bar{u}_n(r_0) = \sum_{n=1}^{\infty}\bar{u}_n(r_0) - \sum_{n=2}^{\infty}\bar{u}_n(r_0) = \bar{u}_1(r_0) = 1.$$

Dasselbe Resultat lässt sich für die linke Schirmhälfte ebenso beweisen. *Es hat demnach $u(0)$ auf dem Schirm die vorgeschriebenen Randwerthe.*

Schliesslich ist noch das Verhalten von $u(0)$ im Unendlichen zu prüfen. Die Forderung ist, dass dort $u(0)$ nur aus auslaufenden Wellen bestehn soll.

Da $u(0)$ aus der Superposition unendlich vieler Functionen G entsteht, so ist diese Forderung erfüllt, wenn die Functionen G im Unendlichen stets nur auslaufende Wellen liefern. Wir haben also zu bilden:

$$P = \text{pars real.} \left[G(r_0, \varphi_0, r) e^{2\pi i \frac{t}{\tau}} \right]$$

und zu prüfen, ob dieser Ausdruck für sehr grossen Abstand vom Schirm den Charakter auslaufender Wellen hat. Wir wählen für G die Form (21) und dürfen hierin, da nur grosse Abstände vom Schirm in Betracht kommen, für die Bessel'schen Functionen ihre asymptotischen Werthe (18) und (20) einsetzen. Dann wird:

$$G(r_0, \varphi_0, r) = \pm i r_0 \sin \varphi_0 \sqrt{2\pi k}\, e^{-i\frac{\pi}{4}} \frac{e^{-ikD}}{\sqrt{D^3}}$$

$$+ \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{2r\sqrt{2\pi k}} \sin \frac{\varphi_0}{2} \int_0^\infty \frac{e^{-ikD'}}{\sqrt{D'}} \cos \frac{iv}{2}\, dv \left\{ \frac{1}{\left(\sin \frac{iv}{2} - \cos \frac{\varphi_0}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\sin \frac{iv}{2} + \cos \frac{\varphi_0}{2}\right)^2} \right\}$$

wobei:

$$D = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \varphi_0}, \quad D' = \sqrt{r^2 + r_0^2 + 2rr_0 \cos iv}$$

ist. Hiernach erscheint G als eine Superposition von Ausdrücken der Form

$$\frac{e^{-ikD}}{\sqrt{D^3}} \cdot A \quad \text{resp.} \quad \frac{e^{-ikD'}}{\sqrt{D'}} \cdot A',$$

wobei A und A' von r_0 unabhängige Grössen sind. Setzt man noch:

$$A = \alpha e^{i\psi}, \quad A' = \alpha' e^{i\psi'},$$

wo α und α' reell sein sollen, so folgt:

$$\text{pars real.} \left(\frac{e^{-ikD}}{\sqrt{D^3}} A\, e^{2\pi i \frac{t}{\tau}} \right) = \frac{\alpha}{\sqrt{D^3}} \cos 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{D}{\lambda} + \psi \right),$$

$$\text{pars real.} \left(\frac{e^{-ikD'}}{\sqrt{D'}} A' e^{2\pi i \frac{t}{\tau}} \right) = \frac{\alpha'}{\sqrt{D'}} \cos 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{D'}{\lambda} + \psi' \right).$$

Die Bedingung constanter Phase für die durch diese Ausdrücke dargestellten Wellenbewegungen ist:

$$\frac{t}{\tau} - \frac{D}{\lambda} + \psi = \text{const.} \quad \text{resp.} \quad \frac{t}{\tau} - \frac{D'}{\lambda} + \psi' = \text{const.}$$

Da ψ und ψ' in Bezug auf r_0 Constanten sind, so folgt daraus:

$$D = \frac{\lambda}{\tau} \cdot t + \text{const.}, \qquad D' = \frac{\lambda}{\tau}\, t + \text{const.}$$

Die Wellen schreiten also zu grösseren Werthen von D und D' und daher, weil bei an und für sich grossem r_0 sowohl D als D' mit wachsendem r_0 wächst, zu grösseren Werthen von r_0 fort, sie laufen in's Unendliche hinaus.

Demnach ist zunächst G und hiermit dann auch $u(0)$ *nur aus in's Unendliche hinauslaufenden Wellen zusammengesetzt.*

So ergiebt sich das Resultat, dass in den Gleichungen (54)—(57) *thatsächlich eine Lösung der gestellten Randwerthaufgabe vorliegt.*

19. **Näherungsverfahren für den Fall einer vertikal polarisirten einfallenden Welle.** Ist die einfallende Welle vertikal polarisirt, so hat man nach Nr. 14 eine Lösung v der Differentialgleichung (A'):

$$(A') \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + k^2 v = 0$$

zu suchen, welche auf dem Schirm der Bedingung (B'): $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ genügt und im Unendlichen von der Form (C'):

$$v = e^{ikx} + \text{auslaufende Wellen}$$

ist.

Setzt man:

$$(81) \qquad v = e^{ikx} - iku,$$

so muss u gleichfalls der Differentialgleichung (A') genügen, auf dem Schirm muss gelten:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1$$

und im Unendlichen muss u nur aus auslaufenden Wellen zusammengesetzt sein. Zur Herstellung der Function u kann man nun ein ganz analoges Näherungsverfahren einschlagen, wie im Falle der horizontal polarisirten Welle. Nach Nr. 13 Formel (35) findet man ein Wellenpotential u, welches auf der rechten Schirmhälfte vorgeschriebene Werthe von $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x}$ annimmt, durch:

$$u(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty dr \, \frac{\partial u}{\partial x} \, G'(r_0, \varphi_0, r).$$

Daraus folgt:

$$\frac{\partial u(0)}{\partial x_0} = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty dr \, \frac{\partial u}{\partial x} \, \frac{\partial G'}{\partial x_0}(r_0, \varphi_0, r).$$

Für $\varphi_0 = \pi$ auf der linken Schirmhälfte gilt:

$$\frac{\partial}{\partial x_0} = -\frac{1}{r_0}\,\frac{\partial}{\partial \varphi_0},$$

der „hinübergeworfene" Werth von $\frac{\partial u}{\partial x}$ wird daher:

$$\frac{\partial u(0)}{\partial x_0} = -\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty dr \, \frac{\partial u}{\partial x} \, \frac{1}{r_0}\left[\frac{\partial G'}{\partial \varphi_0}(r_0, \varphi_0, r)\right]_{\varphi_0 = \pi}.$$

Setzt man hier für $\frac{1}{r_0}\,\frac{\partial G'}{\partial \varphi_0}$ den Ausdruck (38) ein, berücksichtigt, dass für $\varphi_0 = \pi$ nach Fig. 7 $r_0 = r' + d$ wird und kennzeichnet den hinübergeworfenen Werth, wie oben, durch einen Querstrich, so erhält man:

$$\frac{\partial \overline{u(r')}}{\partial x} = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty dr \sqrt{\frac{r}{r'+d}}\,\frac{e^{-ik(r+r'+d)}}{r+r'+d}\,\frac{\partial u(r)}{\partial x}.$$

Mit Hülfe dieser Formel kann man, ausgehend von $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$ auf beiden Schirmhälften, die Randwerthe von $\frac{\partial u}{\partial x}$ fortwährend hinüber- und herüberwerfen und erhält dann ganz analog wie oben die folgende hypothetische Lösung des Problems für die vertikal polarisirte Welle (zur Bequemlichkeit ist $\frac{\partial u}{\partial x}$ überall durch v ersetzt):

(82) $$u(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty dr\,[G'(r_0, \varphi_0, r) + G'(r_0', \varphi_0', r)]\,v(r),$$

wobei:

(83) $$v(r) = \sum_{n=1}^\infty v_n(r),$$

(84) $$v_{n+1}(r) = \frac{1}{\pi}\int_r^\infty dr' \sqrt{\frac{r'}{r+d}}\,\frac{e^{-ik(r+r'+d)}}{r+r'+d}\,v_n(r'),$$

(85) $$v_1(r) = 1.$$

Der Unterschied gegen den Fall der horizontal polarisirten Welle besteht darin, dass erstens das räumliche Wellenpotential $u(0)$ aus der Oberflächenbelegung v hier mit Hülfe der Green'schen Function G', statt mit G, abgeleitet wird und dass zweitens in der Recurrenz (84) unter dem Integral statt des Factors $\sqrt{\frac{r+d}{r'}}$, wie in der früheren Recurrenz (56), sein reciproker Werth $\sqrt{\frac{r'}{r+d}}$ auftritt. Letzteres bedingt, wie sich gleich zeigen wird, eine kleine Erschwerung des Convergenzbeweises.

Es ist möglich und für das Folgende vortheilhaft, die Functionenreihe $v_n(r)$ durch eine andere Functionenreihe $w_n(r)$ zu ersetzen, die ebenfalls nach der Recurrenz (84) gebildet wird, aber von einem andern Anfangsglied ausgeht. Addirt man alle Gleichungen (84) von $n = 1$ bis $n = \infty$, so folgt unter der Voraussetzung, dass die Reihe (83) convergirt:

(86) $$\sum_{n=2}^\infty v_n(r) = v(r) - 1 = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dr' \sqrt{\frac{r'}{r+d}}\,\frac{e^{-ik(r+r'+d)}}{r+r'+d}\,v(r').$$

In Nr. 15 hatten wir eine Functionenreihe $u_n(r)$ gebildet durch die Recurrenz (56)

$$\bar{u}_{n+1}(r) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty dr' \sqrt{\frac{r+d}{r'}} \frac{e^{-ik(r+r'+d)}}{r+r'+d} \bar{u}_n(r').$$

Durch Addition aller dieser Recurrenzen ergiebt sich für die Summe $\bar{u}(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_n(r)$ in Rücksicht darauf, dass $\bar{u}_1(r) = 1$ war:

$$\bar{u}(r) - 1 = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty dr' \sqrt{\frac{r+d}{r'}} \frac{e^{-ik(r+r'+d)}}{r+r'+d} \bar{u}(r')$$

Subtrahirt man diese Gleichung von (86), so folgt durch eine einfache Umstellung:

$$v(r) - \bar{u}(r) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dr' \sqrt{\frac{r'}{r+d}} \frac{e^{-ik(r+r'+d)}}{r+r'+d} [v(r') - \bar{u}(r')]$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{dr'\, e^{-ik(r+r'+d)}}{\sqrt{r'(r+d)}} \bar{u}(r').$$

Setzt man jetzt:

(87) $$v(r) - \bar{u}(r) = w(r)\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{dr'}{\sqrt{r'}} e^{-ikr'} \bar{u}(r'),$$

so folgt:

(88) $$w(r) = \frac{e^{-ik(r+d)}}{\sqrt{r+d}} + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dr' \sqrt{\frac{r'}{r+d}} \frac{e^{-ik(r+r'+d)}}{r+r'+d} w(r').$$

Man erhält eine dieser Functionalgleichung genügende Function $w(r)$ wie man aus der Analogie mit (86) unmittelbar erkennt, indem man setzt:

(89) $$w(r) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(r)$$

und die $w_n(r)$ nach der mit (84) übereinstimmenden Recurrenz:

(90) $$w_{n+1}(r) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dr' \sqrt{\frac{r'}{r+d}} \frac{e^{-ik(r+r'+d)}}{r+r'+d} w_n(r')$$

bildet, dabei aber von dem Anfangsglied:

(91) $$w_1(r) = \frac{e^{-ik(r+d)}}{\sqrt{r+d}}$$

ausgeht — unter der Voraussetzung, dass die Summe (89) convergirt. Ist erst deren Convergenz nachgewiesen, so ergiebt sich die Endlichkeit von $v(r)$ leicht aus (87) mit Hülfe der oben für $\bar{u}(r')$ nachgewiesenen Eigenschaften.

20. **Convergenzbeweis für die Reihe der** $w_n(r)$. Wir beginnen den Convergenzbeweis ganz analog wie oben in Nr. 17. Durch wiederholte Anwendung der Recurrenz (90) in Rücksicht auf das Anfangsglied (91) und Einführung verschiedener Indices für die Integrationsvariabeln ergiebt sich:

$$w_{n+1}(r) = \left(\frac{e^{-ikd}}{\pi}\right)^n \frac{e^{-ik(r+d)}}{\sqrt{r+d}} \cdot \int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty dr_n\, dr_{n-1} \cdots dr_1$$

$$\cdot \sqrt{\frac{r_n}{r_n+d} \cdot \frac{r_{n-1}}{r_{n-1}+d} \cdots \frac{r_1}{r_1+d}}\; \frac{e^{-2ik(r_n+r_{n-1}+\cdots+r_1)}}{(r+r_n+d)(r_n+r_{n-1}+d)\cdots(r_2+r_1+d)}.$$

Die Integrationswege zerlege man ähnlich, wie in den Gleichungen (70)—(72), derartig in Intervalle, dass der Exponentialfactor von Intervall zu Intervall seine Zeichen wechselt. Man hat zu diesem Zweck zu setzen:

$$r_i = p_i + \frac{\lambda}{4} x_i \qquad i = 1, 2, \cdots n,$$

für x_i der Reihe nach alle ganzen positiven Zahlen anzunehmen und p_i jedesmal von 0 bis $\frac{\lambda}{4}$ variiren zu lassen. Die Zerlegung ergiebt:

$$(92) \qquad w_{n+1}(r)$$

$$= \left(\frac{e^{-ikd}}{\pi}\right)^n \frac{e^{-ik(r+d)}}{\sqrt{r+d}} \int_0^{\frac{\lambda}{4}} \int_0^{\frac{\lambda}{4}} \cdots \int_0^{\frac{\lambda}{4}} dp_n\, dp_{n-1} \cdots dp_1\, e^{-2ik(p_n+p_{n-1}+\cdots+p_1)} \chi_{n+1},$$

wobei:

$$(93) \qquad \chi_{n+1} = \chi_{n+1}(p_1, p_2, \cdots p_n, r)$$

$$= \sum_{x_1=0}^\infty \sum_{x_2=0}^\infty \cdots \sum_{x_n=0}^\infty (-1)^{x_1+x_2+\cdots+x_n} \varphi_{n+1}\left(p_1 + \frac{\lambda}{4} x_1, p_2 + \frac{\lambda}{4} x_2, \cdots p_n + \frac{\lambda}{4} x_n, r\right)$$

und

$$(94) \qquad \varphi_{n+1}(r_1, r_2, \cdots r_n, r)$$

$$= \frac{1}{(r+r_n+d)(r_n+r_{n-1}+d)\cdots(r_2+r_1+d)} \sqrt{\frac{r_n}{r_n+d} \cdot \frac{r_{n-1}}{r_{n-1}+d} \cdots \frac{r_1}{r_1+d}}$$

ist.

Aus (92) folgt die Grenze für $w_{n+1}(r)$

$$(95) \quad \text{Mod.}\, w_{n+1}(r) < \left(\frac{1}{\pi}\right)^n \frac{1}{\sqrt{r+d}} \int_0^{\frac{\lambda}{4}} \int_0^{\frac{\lambda}{4}} \cdots \int_0^{\frac{\lambda}{4}} dp_n\, dp_{n-1} \cdots dp_1\, \text{Mod.}\, \chi_{n+1}.$$

Es handelt sich noch darum, eine Grenze für Mod. χ_{n+1} aufzufinden. Unser Hülfssatz aus Nr. 16 scheint zunächst zu versagen. Denn die hier auf-

tretende Function φ_{n+1} (94) lässt sich in Folge der erwähnten Ersetzung der Wurzeln durch ihre reciproken Werthe in keiner Weise so in Factoren zerlegen, dass jeder Factor nur von zwei Variabeln abhängt, mit deren Wachsen er beständig bis auf Null abnimmt. Indessen führt ein einfacher Kunstgriff auf diesen Fall zurück. Man setze:

$$z_i = \sqrt{\frac{r_i}{r_i + d}} \frac{1}{r_{i+1} + r_i + d} \qquad (r_{n+1} = r),$$

sodass:

$$\varphi_{n+1} = z_1 \cdot z_2 \cdots z_i \cdots z_n$$

wird. Jeder von diesen Factoren z_i lässt sich nun in der Weise in eine Differenz $y_i - y_i'$ zerlegen, dass die Functionen y_i und y_i' einzeln die Eigenschaften haben, welche bei der Ableitung des Hülfssatzes von den dort mit dem Buchstaben y bezeichneten Functionen vorausgesetzt wurden. Setzt man nämlich:

$$(96) \qquad y_i - y_i' = z_i, \qquad y_i + y_i' = \sqrt{\frac{r_i + d}{r_i}} \frac{1}{r_{i+1} + r_i + d},$$

so wird:

$$y_i = \frac{1}{r_{i+1} + r_i + d}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r_i + d}{r_i}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r_i}{r_i + d}}\right),$$

$$y_i' = \frac{1}{r_{i+1} + r_i + d}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r_i + d}{r_i}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r_i}{r_i + d}}\right),$$

und man erkennt leicht, dass y_i und y_i' mit wachsendem r_i oder r_{i+1} von positiven Werthen ständig bis auf Null abnehmen und dass dasselbe für $-\frac{dy_i}{dr_{i+1}}$ und $-\frac{dy_i'}{dr_{i+1}}$ gilt. Durch Einführung der y geht φ_{n+1} über in:

$$(97) \qquad \varphi_{n+1} = (y_1 - y_1')(y_2 - y_2') \cdots (y_n - y_n').$$

Denkt man sich die Klammern ausmultiplicirt, so setzt sich φ_{n+1} aus einer Reihe theils positiver, theils negativer Producte und χ_{n+1} nach (93) aus den n-fachen Summen über diese einzelnen Producte zusammen. Jedes Product besteht aus n Factoren, welche die für die Anwendbarkeit des Hülfssatzes erforderlichen Bedingungen erfüllen. Die Summe über jedes Product ist daher kleiner als das betreffende Anfangsglied und χ_{n+1} muss dem absoluten Werthe nach kleiner sein, als die Summe der absoluten Werthe aller Anfangsglieder. Letztere Summe erhält man aber aus (97), indem man allen Producten das positive Vorzeichen giebt, sie wird gleich $(y_1 + y_1')(y_2 + y_2') \cdots (y_n + y_n')$. Es folgt also:

$$\text{Mod. } \chi_{n+1} < (y_1 + y_1')(y_2 + y_2') \cdots (y_n + y_n'),$$

wobei übrigens noch in den Ausdrücken der y für alle r_i ihre Werthe in den Anfangsgliedern p_i einzusetzen sind.

Dann ergiebt sich nach (96):

$$\text{Mod.}\,\chi_{n+1} < \sqrt{\frac{p_1+d}{p_1}\,\frac{p_2+d}{p_2}\cdots\frac{p_n+d}{p_n}}\cdot\frac{1}{(p_1+p_2+d)(p_2+p_3+d)\cdots(p_n+r+d)}$$

und hiermit nach (95):

$$\text{Mod.}\,w_{n+1}(r) < \left(\frac{1}{\pi}\right)^n \frac{1}{\sqrt{r+d}}\int\limits_0^{\frac{\lambda}{4}}\int\limits_0^{\frac{\lambda}{4}}\cdots\int\limits_0^{\frac{\lambda}{4}} dp_n\,dp_{n-1}\cdots dp_1$$

$$\cdot\sqrt{\frac{p_1+d}{p_1}\,\frac{p_2+d}{p_2}\cdots\frac{p_n+d}{p_n}}\;\frac{1}{(p_1+p_2+d)(p_2+p_3+d)\cdots(p_n+r+d)}.$$

Setzt man noch für $\sqrt{p_1+d}$ seinen grössten Werth im Integrationsintervall $\sqrt{d+\frac{\lambda}{4}}$ ein, so folgt:

$$\text{Mod.}\,w_{n+1}(r) < \left(\frac{1}{\pi}\right)^n \sqrt{\frac{\frac{\lambda}{4}+d}{r+d}}\int\limits_0^{\frac{\lambda}{4}}\int\limits_0^{\frac{\lambda}{4}}\cdots\int\limits_0^{\frac{\lambda}{4}} dp_n\,dp_{n-1}\cdots dp_1$$

$$\cdot\sqrt{\frac{1}{p_1}\,\frac{p_2+d}{p_2}\cdots\frac{p_n+d}{p_n}}\;\frac{1}{(p_1+p_2+d)(p_2+p_3+d)\cdots(p_n+r+d)}.$$

Das hier auftretende Integral stimmt aber mit dem Integral (76) überein bis auf den kleinen Unterschied, dass über p_1 nicht von 0 bis $\frac{\lambda}{2}$, sondern nur bis $\frac{\lambda}{4}$ zu integriren ist. Es gestattet dieselbe Behandlung, wie das Integral (76), und liefert:

$$(98)\qquad \text{Mod.}\,w_{n+1}(r) < \left(\frac{2}{\pi}\,\text{arc tg}\sqrt{\frac{\lambda}{4d}}\right)^{n-1}\cdot\frac{2}{\pi}\,\frac{\sqrt{\frac{\lambda}{4}+d}}{r+d}\cdot\text{arc tg}\sqrt{\frac{\lambda}{4(d+r)}}.$$

Mit dieser Ungleichung ist die Convergenz der Reihe der w_n, die Endlichkeit ihrer Summe $w(r)$, für beliebige endliche Spaltbreite d dargethan.

21. Oberflächenbelegung $v(r)$ und Wellenpotential $u(0)$. Da $\bar{u}(r)$ und $w(r)$ endlich sind, so bedarf es zum Nachweis, dass die Oberflächenbelegung:

$$(99)\qquad v(r) = \bar{u}(r) + w(r)\,\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{dr'}{\sqrt{r'}}\,e^{-ikr'}\,\bar{u}(r')$$

endlich ist, nichts weiter, als die Endlichkeit des Integrals:

$$(100)\qquad J = \int\limits_0^\infty \frac{dr'}{\sqrt{r'}}\,e^{-ikr'}\,\bar{u}(r')$$

zu erweisen. Man setze:

$$u(r) = 1 + h(r)\, e^{-ikr}, \tag{101}$$

sodass also:

$$h(r) = \sum_{n=2}^{\infty} u_n(r)\, e^{ikr}$$

ist. Wir prüfen das Verhalten von $h(r)$ für grosses r. Die rechten Seiten der Ungleichungen (78) und (79) werden für grosses r, wie man leicht sieht, klein wie $\frac{1}{\sqrt{r}}$. Addirt man diese sämmtlichen Ungleichungen, so folgt daher für grosses r:

$$\text{Mod. } h(r) < \frac{A}{\sqrt{r}} \tag{102}$$

wo A eine endliche Grösse ist. Aehnlich erhält man aus den Ungleichungen (80)

$$\text{Mod. } \frac{d}{dr}\left(\frac{h(r)}{\sqrt{r+d}}\right) < \frac{B}{r^2},$$

wo B eine endliche Grösse ist. Letztere Gleichung lässt sich auch schreiben:

$$\frac{1}{\sqrt{r+d}} \text{ Mod. } \left[\frac{dh(r)}{dr} - \frac{1}{2}\,\frac{h(r)}{r+d}\right] < \frac{B}{r^2}$$

und daraus folgt:

$$\text{Mod. } \frac{dh(r)}{dr} < B\,\frac{\sqrt{r+d}}{r^2} + \frac{1}{2} \text{ Mod. } \frac{h(r)}{r+d}$$

und in Rücksicht auf (102):

$$\text{Mod. } \frac{dh(r)}{dr} < B\,\frac{\sqrt{r+d}}{r^2} + \frac{1}{2}\,\frac{A}{(r+d)\sqrt{r}}$$

oder:

$$\text{Mod. } \frac{dh(r)}{dr} < \frac{C}{r^{\frac{3}{2}}}, \tag{103}$$

wo C eine neue endliche Grösse ist.

Das zu untersuchende Integral J schreibt sich in Rücksicht auf (101), wenn man den Accent von r fortlässt:

$$J = \int_0^\infty \frac{dr}{\sqrt{r}}\, e^{-ikr} + \int_0^\infty \frac{dr}{\sqrt{r}}\, e^{-2ikr} h(r).$$

Das erste dieser Integrale ist bekanntlich endlich gleich $\sqrt{\frac{\pi}{ki}}$. Das zweite könnte, weil $h(r)$ stets endlich ist, höchstens durch die Länge des Integrationswegs unendlich werden. Es genügt also nachzuweisen, dass:

$$J' = \int_R^\infty \frac{dr}{\sqrt{r}} e^{-2ikr} h(r)$$

endlich ist, wenn R eine beliebige sehr grosse Zahl bedeutet. Führt man die stets endliche Function von r

$$K(r) = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{r}} e^{-2ikr}$$

ein, so wird:

$$J' = \int_R^\infty dr\, h(r) \frac{dK(r)}{dr}$$

und durch partielle Integration in Rücksicht darauf, dass für unendliches r $h(r)$ verschwindet:

$$J' = -h(R)K(R) - \int_R^\infty dr\, K(r) \frac{dh(r)}{dr}.$$

Da $K(r)$ stets endlich ist, $\frac{dh(r)}{dr}$ aber nach (103) mit wachsendem r klein wird, wie $\frac{1}{r^{\frac{3}{2}}}$, so folgt, dass J', dass J und damit, dass $v(r)$ endlich ist.

Wir sind hiermit soweit gelangt, wie für den Fall horizontal polarisirten Lichts in Nr. 17. Wir haben gezeigt, *dass aus dem Näherungsverfahren*, welches durch die Gleichungen (89)—(91) gekennzeichnet wird, mit Hülfe von (99) *eine bestimmte endliche Oberflächenbelegung* $v(r)$ *erhalten wird.* Analoge Ueberlegungen, wie in Nr. 18, deren Ausführung wir uns hier ersparen wollen, führen zu dem Resultat, *dass das aus dieser Oberflächenbelegung* nach (82) *hervorgehende räumliche Wellenpotential* $u(0)$:

$$u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dr [G'(r_0, \varphi_0, r) + G'(r_0', \varphi_0', r)] v(r)$$

thatsächlich allen Bedingungen des Problems Genüge leistet.

Ich wiederhole den Satz aus der Inhaltsübersicht (§ 2): *„Es ist damit der strenge Nachweis erbracht, dass eine Lösung der gestellten Randwerthaufgaben überhaupt möglich ist, was bisher keineswegs mit Sicherheit feststand, sondern nur nach dem „Rayleigh'schen Princip“ wahrscheinlich zu machen war.*

§ 5.

Discussion der durch das Näherungsverfahren gelieferten Lösung.

22. Vorbemerkung. So befriedigend die vorstehenden Resultate vom mathematischen Gesichtspunkt aus erscheinen können, physikalisch sind sie deshalb unzureichend, weil die aufeinander folgenden Glieder der Entwicklung der Oberflächenbelegungen durch fortgesetzte Integrationen gewonnen werden, die allgemein nicht ausführbar sind. Indessen lassen sich da auch speciellere Folgerungen ableiten, wo die Convergenz des Näherungsverfahrens rasch genug ist, um eine Beschränkung auf die allerersten Glieder zu gestatten. Es wird daher die Discussion der gewonnenen Lösungen in der Weise zu führen sein, dass wir zunächst einmal die ersten Glieder der Entwicklungen für sich betrachten und dann den Einfluss der höheren Glieder abschätzen. Wo sich der Einfluss der höheren Glieder als hinreichend klein erweist, kann die Betrachtung der ersten Glieder zu physikalischen Einzelfolgerungen verwandt werden.

23. Die ersten Glieder der Entwicklung für horizontal polarisirtes Licht. Für horizontal polarisirtes Licht war die Oberflächenbelegung $u(r)$ in der Form $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(r)$ dargestellt worden, wobei $u_1(r) = 1$ war. Beschränkt man sich auf das erste Glied, setzt also $u(r) = 1$, so erhält man für das Wellenpotential $u(0)$ im Raume nach (54):

(104) $$u(0) = w(r_0, \varphi_0) + w(r_0', \varphi_0')$$

wobei:

(105) $$w(r_0, \varphi_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} dr\, G(r_0, \varphi_0, r)$$

ist. Diese Function $w(r_0, \varphi_0)$ ist näher zu untersuchen — eine Arbeit, welche wesentlich erleichtert wird durch Beachtung eines engen Zusammenhangs, der zwischen $w(r_0, \varphi_0)$ und einem bereits von Herrn Sommerfeld discutirten Ausdruck besteht.

$w(r_0, \varphi_0)$ hat nach Nr. 18 und Nr. 9 die Eigenschaften, im Unendlichen nur aus auslaufenden Wellen zu bestehn und auf der rechten Schirmhälfte den Werth 1 anzunehmen. Bildet man daher:

(106) $$Z(r_0, \varphi_0) = e^{ikx_0} - w(r_0, \varphi_0) = e^{ikr_0 \sin\varphi_0} - w(r_0, \varphi_0),$$

so wird auf der rechten Schirmhälfte (für $x_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$ oder 2π) $Z = 0$ und im Unendlichen besitzt Z eine von positivem x her einfallende, senkrecht zur Kante polarisirte Welle. Das sind aber die Bedingungen des Beugungsproblems für eine aus dem Unendlichen einfallende ebene Welle,

welche senkrecht auf den durch die rechte Schirmhälfte gebildeten einfachen Rand auffällt, die Bedingungen also für einen Fall eben des Problems, das von Herrn Sommerfeld behandelt worden ist. Herr Sommerfeld giebt seiner Lösung die Form (ich vereinige Herrn Sommerfeld's Formeln l. c. pag. 359 (5) und pag. 367 (3a), specialisire auf den Fall der senkrecht einfallenden Welle, indem ich dort $\varphi' = \frac{\pi}{2}$ setze, versehe ferner r und φ mit dem Index 0):

$$(107)\qquad \begin{aligned} Z(r_0, \varphi_0) &= e^{ikr_0 \sin\varphi_0} \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{T_1} e^{-i\tau^2} d\tau - e^{-ikr_0 \sin\varphi_0} \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{T_2} e^{-i\tau^2} d\tau, \\ T_1 &= \sqrt{2kr_0} \cos\left(\frac{\varphi_0}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \qquad T_2 = \sqrt{2kr_0} \cos\left(\frac{\varphi_0}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \sqrt{kr_0(1+\sin\varphi_0)}, \qquad\qquad = \sqrt{kr_0(1-\sin\varphi_0)}. \end{aligned}$$

Da die eindeutige Bestimmtheit des Problems physikalisch evident ist, müssen beide Ausdrücke für Z (106) und (107) übereinstimmen und auf Grund dieser physikalischen Evidenz möge die etwas umständliche rechnerische Transformation des einen Ausdrucks in den andern hier erspart bleiben*).

Mit Hülfe von Z drückt sich $u(0)$ folgendermassen aus:

$$u(0) = 2e^{ikx_0} - Z(r_0, \varphi_0) - Z(r_0', \varphi_0'),$$

und nach (48) wird die uns eigentlich interessirende Grösse, die complexe electrische Schwingungsamplitude ζ:

$$\zeta(0) = e^{ikx_0} - u(0) = Z(r_0, \varphi_0) + Z(r_0', \varphi_0') - e^{ikx_0}.$$

Da wir es fortan nur noch mit vom Punkte 0 abhängigen Grössen zu thun haben, dürfen wir überall den Index 0 fortlassen. Setzen wir zudem in ζ den Ausdruck (107) von Z ein, so erhalten wir:

$$(108)\qquad \begin{aligned} \zeta = e^{ikx}&\left\{\frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{T_1} e^{-i\tau^2} d\tau + \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{T_1'} e^{-i\tau^2} d\tau - 1\right\} - e^{-ikx}\left\{\frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{T_2} e^{-i\tau^2} d\tau + \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{T_2'} e^{-i\tau^2} d\tau\right\}, \\ T_1 &= \sqrt{2kr} \cos\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \qquad T_2 = \sqrt{2kr'} \cos\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right), \\ T_1' &= \sqrt{2kr'} \cos\left(\frac{\varphi'}{2} - \frac{\pi}{2}\right), \qquad T_2' = \sqrt{2kr'} \cos\left(\frac{\varphi'}{2} + \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

*) Eine Eigenschaft des Ausdrucks:

$$w(r_0, \varphi_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dr\, G(r_0, \varphi_0, r),$$

die eigentlich erst aus der Transformation hervorgeht, ist bei diesen Schlüssen schon

Es sei daran erinnert, dass r, φ und r', φ' Polarcoordinaten des Punktes 0 in Bezug auf die beiden Spaltkanten bedeuten. Neben diesen beiden Systemen wollen wir jetzt noch ein drittes ϱ, χ einführen, welches die Spaltmitte zum Pol hat und bei dem der Winkel χ von der negativen

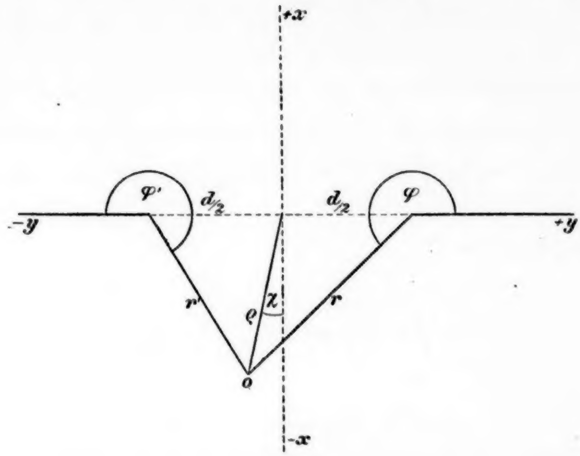


Fig. 8.

x-Axe aus positiv nach der negativen y-Axe hin gezählt wird. Der Winkel χ ist dann das, was man gewöhnlich als „Beugungswinkel" bezeichnet. Zwischen den rechtwinklichen Coordinaten x, y und diesen drei Systemen von Polarcoordinaten ergiebt die Figur die Beziehungen:

$$
(109) \qquad \begin{aligned} x &= -\varrho \cos\chi = r \sin\varphi = r' \sin\varphi', \\ y &= -\varrho \sin\chi = r\cos\varphi + \frac{d}{2} = r'\cos\varphi' - \frac{d}{2}. \end{aligned}
$$

Ferner sei eine Bemerkung über die in ζ auftretenden Integrale vorausgenommen. Dieselben gestatten eine sehr einfache angenäherte Darstellung, sobald die betr. Grenze T numerisch gross ist. Man hat nämlich für positives T die semiconvergente Entwicklung (Sommerfeld l. c. p. 359):

$$
\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_T^\infty e^{-i\tau^2}\, d\tau = \frac{e^{-iT^2}}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{1}{2i}\,\frac{1}{T} - \frac{1}{(2i)^2}\,\frac{1}{T^3} + \frac{1\cdot 3}{(2i)^3}\,\frac{1}{T^5} \cdots \right\}
$$

anticipirt. Es folgt nämlich aus Nr. 9 zwar, dass $w(r_0, \varphi_0) = 1$ ist auf allen Punkten des Schirmes, aber ausgenommen die Schirmkante. Für Punkte in der Schirmkante haben wir nicht gezeigt, dass $w(r_0, \varphi_0) = 1$ ist, vielmehr haben wir oben (in Nr. 11) gerade diese Eigenschaft vorausgesetzt und auf einen späteren Beweis verwiesen. Der Beweis würde in der Transformation liegen. Denn in der Schirmkante, für $r_0 = 0$, wird unabhängig von φ_0 nach (107) $Z = 0$ und daher nach (106): $w = 1$.

und daraus folgt unter Beschränkung auf das erste Glied dieser Entwicklung und in Rücksicht auf die bekannte Gleichung:

$$(110)\qquad \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\tau^2}\,d\tau = 1,$$

für grosses positives T:

$$\frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{T} e^{-i\tau^2}\,d\tau = 1 - \frac{e^{-iT^2+\frac{\pi i}{4}}}{\sqrt{\pi}}\,\frac{1}{2iT},$$

für grosses negatives T:

$$(111)\qquad \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{T} e^{-i\tau^2}\,d\tau = -\frac{e^{-iT^2+\frac{\pi i}{4}}}{\sqrt{\pi}}\,\frac{1}{2iT}.$$

Bei der jetzt folgenden Discussion des Ausdrucks ζ *wollen wir uns auf den* optisch wichtigsten *Fall beschränken, dass der Punkt* 0 *hinter dem Spalt* $\left(\varphi \text{ und } \varphi' > \pi,\ -\frac{\pi}{2} < \chi < \frac{\pi}{2}\right)$ *und in grosser Entfernung vom Spalt liegt.* Dabei soll nicht nur das Verhältniss der Entfernung zur Spaltbreite $\frac{\varrho}{d}$, sondern auch das combinirte Verhältniss $\frac{\varrho}{d}\cdot\frac{\lambda}{d}$ sehr gross sein, d. h. im Falle der Spalt in einem gewissen Verhältniss breit gegen die Wellenlänge ist, soll die Entfernung vom Spalt in einem *höheren* Verhältniss gross gegen die Spaltbreite sein. Wir wollen direct setzen:

$$(112)\qquad \frac{\varrho}{d}\cdot\frac{\lambda}{d} = c^3 \quad\text{oder}\quad \varrho = \frac{d^2}{\lambda}\,c^3,$$

wo c eine *grosse Zahl* ist.

Die Grössen T drücken sich durch ϱ und χ folgendermassen aus:

$$(113)\qquad \begin{aligned}
(T_1)^2 &= k\left(\sqrt{\varrho^2 + d\varrho\sin\chi + \frac{d^2}{4}} - \varrho\cos\chi\right),\\
(T_1')^2 &= k\left(\sqrt{\varrho^2 - d\varrho\sin\chi + \frac{d^2}{4}} - \varrho\cos\chi\right),\\
(T_2)^2 &= k\left(\sqrt{\varrho^2 + d\varrho\sin\chi + \frac{d^2}{4}} + \varrho\cos\chi\right),\\
(T_2')^2 &= k\left(\sqrt{\varrho^2 - d\varrho\sin\chi + \frac{d^2}{4}} + \varrho\cos\chi\right)
\end{aligned}$$

oder für sehr grosses ϱ durch binomische Entwicklung der Wurzeln nahe:

$$(114)\quad \begin{aligned} (T_1)^2 &= k\left(\varrho[1-\cos\chi]+\frac{d}{2}\sin\chi\right), & (T_2)^2 &= k\left(\varrho[1+\cos\chi]+\frac{d}{2}\sin\chi\right), \\ (T_1')^2 &= k\left(\varrho[1-\cos\chi]-\frac{d}{2}\sin\chi\right), & (T_2')^2 &= k\left(\varrho[1+\cos\chi]-\frac{d}{2}\sin\chi\right). \end{aligned}$$

Das Vorzeichen ist hier jedes Mal in Uebereinstimmung mit (108) zu wählen. Aus (108) folgt aber, dass hinter dem Spalt (φ und $\varphi' > \pi$) T_2 und T_2' stets negativ sind. Ferner folgt aus (114), dass für grosses $\frac{\varrho}{\lambda}$ oder $k\varrho$ hinter dem Spalt $\left((\chi) < \frac{\pi}{2}\right)$ T_2 und T_2' numerisch stets gross sind. Zerlegt man daher den Ausdruck (108) von ζ in zwei Theile, indem man setzt:

$$(115)\qquad \zeta = \alpha - \beta.$$

$$(116)\quad \begin{aligned} \alpha &= e^{ikx}\left\{\frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{T_1} e^{-i\tau^2}d\tau + \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{T_1'} e^{-i\tau^2}d\tau - 1\right\}, \\ \beta &= e^{-ikx}\left\{\frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{T_2} e^{-i\tau^2}d\tau + \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{T_2'} e^{-i\tau^2}d\tau\right\}, \end{aligned}$$

so darf man in β die Näherungsformeln (111) anwenden und erhält:

$$\beta = \frac{e^{\frac{\pi i}{4} - ik(x+\varrho[1+\cos\chi])}}{2i\sqrt{\pi k}}\cdot\left\{\frac{e^{-\frac{ikd}{2}\sin\chi}}{\sqrt{\varrho(1+\cos\chi)+\frac{d}{2}\sin\chi}} + \frac{e^{\frac{ikd}{2}\sin\chi}}{\sqrt{\varrho(1+\cos\chi)-\frac{d}{2}\sin\chi}}\right\},$$

wobei die Wurzeln mit positivem Zeichen zu nehmen sind. Hier kann man noch in den Nennern das Glied $\frac{d}{2}\sin\chi$ gegen $\varrho(1+\cos\chi)$ vernachlässigen und findet in Rücksicht auf (109):

$$(117)\qquad \beta = \frac{e^{-ik\varrho-\frac{\pi i}{4}}}{\sqrt{2\pi k\varrho}}\,\frac{\cos\left(\frac{kd}{2}\sin\chi\right)}{\cos\frac{\chi}{2}}.$$

Etwas schwieriger ist die Behandlung des ersten Theils von ζ, von α. Was zunächst die Vorzeichen von T_1 und T_1' angeht, so sind drei Gebiete (I), (I') und (II) zu unterscheiden, welche durch die Schirmhälften und die Geraden $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ und $\varphi' = \frac{3\pi}{2}$ begrenzt werden. In den Gebieten des

„geometrischen Schattens“ (I) und (I') haben T_1 und T_1' entgegengesetztes Vorzeichen, in dem Gebiete des „geometrischen Lichts“ II sind

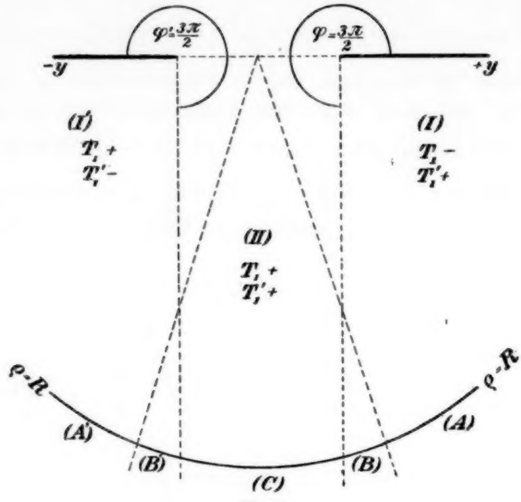


Fig. 9.

sie beide positiv. Es ist, wie erwähnt, nur unsere Absicht, das Verhalten von ζ auf der Peripherie eines sehr grossen Kreises:

$$\varrho = \frac{d^2}{\lambda} \cdot c^3 = R$$

zu untersuchen. Wir theilen diese Peripherie in folgender Weise ein. Man ziehe die Linien:

$$\frac{d}{\lambda} \sin \chi = \frac{1}{c} \quad \text{und} \quad \frac{d}{\lambda} \sin \chi = -\frac{1}{c} \cdot$$

Es sind dies zwei von der Spaltmitte unter sehr kleinem Winkel χ ausgehende Gerade. Dieselben treffen die Grenzen zwischen den Gebieten I, I' und II in der Distanz:

$$\varrho = \frac{d}{2 \sin \chi} = \frac{d^2}{\lambda} \cdot \frac{c}{2},$$

welche kleiner ist als der Radius unsres Kreises $R = \frac{d^2}{\lambda} \cdot c^3$. Die Peripherie des Kreises R zerfällt demnach in fünf Theile. In zwei Theile (A) und (A'), in welchen:

$$\left| \frac{d}{\lambda} \sin \chi \right| > \frac{1}{c} \tag{118}$$

ist, und in drei Theile (B), (B'), (C'), in welchen:

(119) $$\left|\frac{d}{\lambda}\sin\chi\right| < \frac{1}{c}$$

ist und welche sich noch durch das Vorzeichen von T_1 und T_1' von einander unterscheiden.

Wir beginnen mit den Gebieten (A) und (A'). Beachtet man die Ungleichung:

$$1-\cos\chi = 2\sin^2\frac{\chi}{2} > \frac{1}{2}\sin^2\chi,$$

so folgt in Rücksicht auf (118):

$$k\varrho(1-\cos\chi) = \frac{kd^2}{\lambda}c^3(1-\cos\chi) > \frac{kd^2}{2\lambda}c^3\sin^2\chi > \frac{k\lambda c}{2}$$

oder, da $k=\frac{2\pi}{\lambda}$ ist

(120) $$k\varrho(1-\cos\chi) > \pi c.$$

Ferner wird:

$$\left|\frac{\varrho(1-\cos\chi)}{\frac{d}{2}\sin\chi}\right| > \frac{\varrho}{d}\sin\chi > \frac{d}{\lambda}c^3\cdot\frac{\lambda}{dc}$$

oder:

(121) $$\left|\frac{\varrho(1-\cos\chi)}{\frac{d}{2}\sin\chi}\right| > c^2.$$

Die Ungleichheiten (120) und (121) lehren, dass in den Ausdrücken (114) von T_1 und T_1' der erste Theil $k\varrho(1-\cos\chi)$ numerisch gross und ausserdem gross im Verhältniss zum zweiten Theil $\frac{kd}{2}\sin\chi$ ist. Demnach ist in (A) und (A') T_1 und T_1' gross. Man darf daher die Näherungsformeln (110) resp. (111) verwenden und erhält in Rücksicht auf das entgegengesetzte Vorzeichen von T_1 und T_1':

In (A) und (A'):

$$\alpha = \frac{e^{\frac{\pi i}{4}+ik(x-\varrho[1-\cos\chi])}}{2i\sqrt{\pi k}}\left\{\frac{e^{\frac{ikd}{2}\sin\chi}}{\sqrt{\varrho(1-\cos\chi)-\frac{d}{2}\sin\chi}} - \frac{e^{-\frac{ikd}{2}\sin\chi}}{\sqrt{\varrho(1-\cos\chi)+\frac{d}{2}\sin\chi}}\right\}$$

oder, wenn man in den Wurzeln die zweiten Theile gegen die ersten vernachlässigt:

(122) $$\alpha = \frac{e^{\frac{\pi i}{4}-ik\varrho}}{\sqrt{2\pi k\varrho}}\,\frac{\sin\left(\frac{kd}{2}\sin\chi\right)}{\sin\frac{\chi}{2}}.$$

Für die übrigen drei Gebiete (B), (B') und (C') empfiehlt sich eine kleine Umsetzung des Ausdrucks (116) von α. Es ist:

$$\int_{-\infty}^{T_1'} e^{-i\tau^2}\,d\tau = \int_{-T_1'}^{\infty} e^{-i\tau^2}\,d\tau = \int_{-T_1'}^{T_1} e^{-i\tau^2}\,d\tau + \int_{T_1}^{\infty} e^{-i\tau^2}\,d\tau,$$

$$\int_{-\infty}^{T_1} e^{-i\tau^2}\,d\tau + \int_{-\infty}^{T_1'} e^{-i\tau^2}\,d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\tau^2}\,d\tau + \int_{-T_1'}^{T_1} e^{-i\tau^2}\,d\tau,$$

und damit wird in Rücksicht auf (110):

(123) $$\alpha = \frac{e^{\frac{i\pi}{4}+ikx}}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-T_1'}^{T_1} e^{-i\tau^2}\,d\tau.$$

Nehmen wir hier zunächst das Gebiet (B') in Angriff, so ist in demselben T_1 positiv, T_1' negativ und durch Einführung der absoluten Werthe der T folgt:

(123a) $$\alpha = \frac{e^{\frac{i\pi}{4}+ikx}}{\sqrt{\pi}} \int_{|T_1'|}^{|T_1|} e^{-i\tau^2}\,d\tau.$$

Nun gilt in (B') die Ungleichung (119), aus der folgt:

$$kd \sin\chi = 2\pi \frac{d}{\lambda} \sin\chi < \frac{2\pi}{c}.$$

Demnach ist der Unterschied zwischen $(T_1)^2$ und $(T_1')^2$ nach (114) eine sehr kleine Grösse und es kann daher innerhalb des Integrationsintervalls $e^{-i\tau^2}$ constant gleich seinem Mittelwerth $e^{-ik\varrho(1-\cos\chi)}$ gesetzt werden. Damit wird aber:

(124) $$\alpha = \frac{e^{\frac{i\pi}{4}+ikx}}{\sqrt{\pi}} e^{-ik\varrho(1-\cos\chi)} (|T_1| - |T_1'|).$$

Um $|T_1| - |T_1'|$ mit einer solchen Genauigkeit zu finden, dass der Fehler klein wird gegen den Betrag der Grösse selbst, sind die Ausdrücke (113) für T_1 und T_1' etwas genauer zu entwickeln. Berücksichtigt man bei der Entwicklung der Wurzeln ein Glied mehr als in (114), so folgt:

$$T_1^2 = k\varrho\,(1-\cos\chi) + \frac{kd}{2}\sin\chi + \frac{kd^2}{8\varrho}\cos^2\chi,$$

$$T_1'^2 = k\varrho\,(1-\cos\chi) - \frac{kd}{2}\sin\chi + \frac{kd^2}{8\varrho}\cos^2\chi$$

oder durch eine einfache Umstellung:

$$
(125)\quad \begin{aligned}
T_1^2 &= 2k\varrho\left(\sin\frac{\chi}{2}+\frac{d}{4\varrho}\cos\frac{\chi}{2}\right)^2-\frac{kd^2}{8\varrho}\sin^2\frac{\chi}{2}\,(2\cos\chi+1),\\
T_1'^2 &= 2k\varrho\left(\sin\frac{\chi}{2}-\frac{d}{4\varrho}\cos\frac{\chi}{2}\right)^2-\frac{kd^2}{2}\sin^2\frac{\chi}{2}\,(2\cos\chi+1).
\end{aligned}
$$

Vernachlässigt man die zweiten Glieder, so erhält man:

$$
(126)\quad T_1=\sqrt{2k\varrho}\left(\sin\frac{\chi}{2}+\frac{d}{4\varrho}\cos\frac{\chi}{2}\right),\quad T_1'=\sqrt{2k\varrho}\left(-\sin\frac{\chi}{2}+\frac{d}{4\varrho}\cos\frac{\chi}{2}\right).
$$

Die Vorzeichen sind hier schon so bestimmt, dass sie mit den aus (108) folgenden Vorzeichen übereinstimmen. Beachtet man noch, dass in dem Gebiete (B') nach der Figur:

$$2\varrho\,\mathrm{tg}\,\frac{\chi}{2}>\varrho\sin\chi>\frac{d}{2}$$

ist und bildet in Rücksicht hierauf die absoluten Werthe von T und T', so folgt:

$$|T_1|-|T'|=\sqrt{\frac{kd^2}{2\varrho}}\cdot\cos\frac{\chi}{2}.$$

Die Wurzel aus den vernachlässigten Gliedern ist von der Ordnung $\sqrt{\frac{kd^2}{2\varrho}}\sin\frac{\chi}{2}$, also bei den hier in Frage kommenden kleinen Werthen des Winkels χ in der That gegen $|T_1|-|T'|$ zu vernachlässigen.

Setzen wir wegen der Kleinheit von χ noch $\cos\frac{\chi}{2}=1$, so folgt:

für das Gebiet (B'):

$$
(127)\quad \alpha=e^{\frac{i\pi}{4}-ik\varrho}\cdot\sqrt{\frac{kd^2}{2\pi\varrho}}.
$$

Eine ganz ähnliche Rechnung führt zu dem Resultat, dass für das Gebiet (B) derselbe Werth von α gilt.

Es bleibt das Gebiet (C). In (C) hat man nach der Figur:

$$|\varrho\sin\chi|<\frac{d}{2}$$

und dazu die Ungleichung (119):

$$\left|\frac{d}{\lambda}\sin\chi\right|<\frac{1}{c}.$$

Daraus folgt:

$$T_1^2=k\varrho\cdot 2\sin^2\frac{\chi}{2}+\frac{dk}{2}\sin\chi<\frac{kd}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{\chi}{2}+\frac{kd}{2}\sin\chi<\frac{\pi}{c}\left(1+\frac{1}{2\cos^2\frac{\chi}{2}}\right)$$

und ebenso:

$$T_1'^2=k\varrho\cdot 2\sin^2\frac{\chi}{2}-\frac{dk}{2}\sin\chi<\frac{\pi}{c}\left(1+\frac{1}{2\cos^2\frac{\chi}{2}}\right).$$

Im ganzen Gebiet (C) sind also T_1 und T_1' sehr kleine Grössen. In dem Integral:

$$\alpha = \frac{e^{\frac{i\pi}{4}+ikx}}{\sqrt{\pi}} \int_{-T_1}^{T_1'} e^{-i\tau^2} d\tau,$$

darf man daher wegen der Kleinheit der Grenzen $e^{-i\tau^2} = 1$ setzen und findet somit:

$$\alpha = \frac{e^{\frac{i\pi}{4}+ikx}}{\sqrt{\pi}} (T_1 + T_1').$$

Setzt man hier für T_1 und T_1' die Werthe (126) ein und beachtet, dass für kleines χ nahe $x = -\varrho$ ist, so folgt:

$$\alpha = e^{\frac{i\pi}{4}-ik\varrho} \sqrt{\frac{kd^2}{2\pi\varrho}}, \tag{128}$$

also eine mit (127) identische Formel.

Unser Resultat für α ist sonach zusammengefasst dieses: In den Gebieten (A) und (A') gilt nach (118) und (122):

$$\left|\frac{kd}{2}\sin\chi\right| > \frac{\pi}{c}, \qquad \alpha = \frac{e^{\frac{\pi i}{4}-ik\varrho}}{\sqrt{2\pi k\varrho}} \frac{\sin\left(\frac{kd}{2}\sin\chi\right)}{\sin\frac{\chi}{2}}.$$

In den Gebieten (B), (B') und (C) gilt nach (119), (127) und (128):

$$\left|\frac{kd}{2}\sin\chi\right| < \frac{\pi}{c}, \qquad \alpha = \frac{e^{\frac{\pi i}{4}-ik\varrho}}{\sqrt{2\pi k\varrho}} \cdot kd.$$

Nun sieht man aber, dass für ein χ, welches der letzteren Ungleichung genügt (c ist sehr gross), die erste Formel in die zweite übergeht. *Demnach kommt der ersten Formel allgemeine Gültigkeit für alle Werthe von χ zu.*

Setzen wir jetzt die gefundenen Ausdrücke für α und β in (115) ein, so erhalten wir als *Darstellung der elektrischen Schwingungscomponente für alle Punkte in grosser Entfernung vom Spalt hinter dem Schirm:*

$$\xi = \frac{e^{-ik\varrho}}{\sqrt{2\pi k\varrho}} \left\{ e^{\frac{\pi i}{4}} \frac{\sin\left(\frac{kd}{2}\sin\chi\right)}{\sin\frac{\chi}{2}} - e^{-\frac{\pi i}{4}} \frac{\cos\left(\frac{kd}{2}\sin\chi\right)}{\cos\frac{\chi}{2}} \right\}. \tag{129}$$

Das ist das Ergebniss der Discussion des ersten Gliedes des Näherungsverfahrens.

24. Einfluss der höheren Glieder. Es ist in zweiter Linie zu untersuchen, welchen Betrag der Einfluss der höheren Glieder des Näherungsverfahrens erreicht.

In Rücksicht auf die Ungleichung: arc tg $x < x$ kann man die früher abgeleiteten Grenzen (78), (79), (80) für die Glieder der Entwicklung der Oberflächenbelegung durch die etwas weiteren ersetzen:

$$\text{Mod.}\,[\bar{u}_{n+1}(x)] < \left(\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\lambda}{d}}\right)^{n-1}\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2\lambda}{d+r}},$$

$$\text{Mod.}\,\frac{d}{dr}\left[\frac{u_{n+1}(r)\,e^{ikr}}{\sqrt{r+d}}\right] < \left(\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\lambda}{d}}\right)^{n-1}\frac{1}{\pi}\,\frac{\sqrt{2\lambda}}{(d+r)^2}.$$

Setzt man, wie oben:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\bar{u}_n(r) = h(r)\,e^{-ikr}$$

und führt die Abkürzung:

$$\vartheta = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\lambda}{d}}$$

ein, so folgt:

$$\text{(130)}\qquad \text{Mod.}\,h(r) < \frac{\vartheta}{1-\vartheta}\sqrt{\frac{2d}{d+r}},$$

$$\text{Mod.}\,\frac{d}{dr}\left[\frac{h(r)}{\sqrt{r+d}}\right] < \frac{\vartheta}{1-\vartheta}\,\frac{\sqrt{2d}}{(d+r)^2}$$

und aus letzterer Ungleichung:

$$\frac{1}{\sqrt{r+d}}\,\text{Mod.}\,\frac{dh(r)}{dr} < \frac{\vartheta}{1-\vartheta}\,\frac{\sqrt{2d}}{(d+r)^2} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{(r+d)^{\frac{3}{2}}}\,\text{Mod.}\,h(r)$$

und daraus:

$$\text{(131)}\qquad \text{Mod.}\,\frac{dh(r)}{dr} < \frac{3}{2}\,\frac{\vartheta}{1-\vartheta}\,\frac{\sqrt{2d}}{(d+r)^{\frac{3}{2}}}.$$

Setzt man jetzt:

$$V(r_0,\varphi_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} dr\,G(r_0,\varphi_0,r)\sum_{n=2}^{\infty}\bar{u}_n(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} dr\,e^{-ikr}\,G(r_0,\varphi_0,r)\,h(r),$$

so stellt nach (54) die Summe

$$V(r_0,\varphi_0) + V(r_0',\varphi_0')$$

das durch die Einwirkung der höheren Glieder zu ζ hinzukommende Zusatzpotential dar.

Es ist eine Grenze für $V(r_0,\varphi_0)$ zu suchen. Der Ausdruck (22) von $G(r_0,\varphi_0,r)$ lautete:

$$G(r_0, \varphi_0, r) = \mp 2 r_0 \sin\varphi_0\, k\, \frac{U_1(kD)}{D}$$

$$-\frac{k}{\pi} r_0 \sin\frac{\varphi_0}{2} \int_0^\infty \frac{U_1(kD')}{D'}\, dv \sin iv \left\{ \frac{1}{\sin\frac{iv}{2} - \cos\frac{\varphi_0}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{iv}{2} + \cos\frac{\varphi_0}{2}} \right\},$$

$$D = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2 r r_0 \cos\varphi_0}, \quad D' = \sqrt{r^2 + r_0^2 + 2 r r_0 \cos iv}.$$

Wir wollen uns nun bei der weiteren Grenzbestimmung auf Punkte r_0, φ_0 beschränken, die erstens in grosser Entfernung vom Spalt liegen und zweitens nicht zu grossen Beugungswinkeln angehören in der Art, dass die Entfernung D von den Punkten des Schirms und erst recht die Grösse D' im Verhältniss zur Wellenlänge für alle zu betrachtenden Punkte stets gross ist. Man hat es dann nur noch mit grossen Argumenten kD und kD' der Bessel'schen Function U_1 zu thun und darf für U_1 seinen asymptotischen Werth (20):

$$U_1(z) = -i \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, e^{-i\left(z + \frac{\pi}{4}\right)}$$

einführen. Hiermit geht aber G über in:

$$G(r_0, \varphi, r) = \pm i r_0 \sin\varphi_0 \sqrt{2\pi k}\, \frac{e^{-ikD - \frac{i\pi}{4}}}{D^{\frac{3}{2}}}$$

$$+ \sqrt{\frac{k}{2\pi}}\, r_0 \sin\frac{\varphi_0}{2} \int_0^\infty dr \sin iv \left\{ \frac{1}{\sin\frac{iv}{2} - \cos\frac{\varphi_0}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{iv}{2} + \cos\frac{\varphi_0}{2}} \right\} \frac{e^{-ikD' + \frac{i\pi}{4}}}{D'^{\frac{3}{2}}}.$$

Führt man die Hülfsfunctionen ein:

$$(132) \quad F(r_0, \varphi_0) = \int_0^\infty dr\, \frac{e^{-ik(D+r)}}{D^{\frac{3}{2}}}\, h(r), \quad F'(r_0, v) = \int_0^\infty dr\, \frac{e^{-ik(D'+r)}}{D'^{\frac{3}{2}}}\, h(r),$$

so folgt für V:

$$V(r_0, \varphi_0) = \pm i r_0 \sin\varphi_0 \sqrt{\frac{k}{2\pi}} \cdot F(r_0, \varphi_0)\, e^{-\frac{i\pi}{4}}$$

$$+ \sqrt{\frac{k}{2\pi}}\, \frac{e^{+\frac{i\pi}{4}}}{2\pi}\, r_0 \sin\frac{\varphi_0}{2} \int_0^\infty dv \sin iv\, F'(r_0, v) \left\{ \frac{1}{\sin\frac{iv}{2} - \cos\frac{\varphi_0}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{iv}{2} + \cos\frac{\varphi_0}{2}} \right\}.$$

Daraus leitet man die Grenze für V ab:

$$\text{(133)} \qquad \operatorname{Mod.} V < |r_0 \sin\varphi_0| \sqrt{\frac{k}{2\pi}} \operatorname{Mod.} F$$

$$+ \left|r_0 \sin\frac{\varphi_0}{2}\right| \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{2\pi}} \int_0^\infty dv \sin iv \operatorname{Mod.} F'(r_0, v) \cdot \left\{ \frac{1}{\sin\frac{iv}{2} - \cos\frac{\varphi_0}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{iv}{2} + \cos\frac{\varphi_0}{2}} \right\}.$$

Es bleibt also die Aufgabe, Grenzen für Mod. F und Mod. F' zu finden.

Aus dem Ausdruck (132) von F folgt durch partielle Integration:

$$F = \left[\frac{i}{k} \frac{e^{-ik(D+r)}}{1 + \frac{dD}{dr}} \frac{h(r)}{D^{\frac{3}{2}}} \right]_{r=0}^{r=\infty} - \frac{i}{k} \int_0^\infty dr\, e^{-ik(D+r)} \frac{d}{dr} \left[\frac{h(r)}{D^{\frac{3}{2}}\left(1 + \frac{dD}{dr}\right)} \right], \quad \frac{dD}{dr} = \frac{r - r_0 \cos\varphi_0}{D}$$

und daraus findet man leicht in Rücksicht auf (130):

$$\text{(134)} \quad \operatorname{Mod.} F < \frac{\vartheta}{1-\vartheta} \frac{\sqrt{2}}{k} \frac{1}{r_0^{\frac{3}{2}}(1 - \cos\varphi_0)} + \frac{1}{k} \int_0^\infty dr \operatorname{Mod.} \frac{d}{dr} \left[\frac{h(r)}{D^{\frac{3}{2}}\left(1 + \frac{dD}{dr}\right)} \right].$$

Wenn man beachtet, dass $D^{\frac{3}{2}}\left(1 + \frac{dD}{dr}\right) = \sqrt{D}\,(D + r - r_0 \cos\varphi_0)$ eine mit r stets wachsende Grösse ist, so wird:

$$\operatorname{Mod.} \frac{d}{dr} \left[\frac{h(r)}{D^{\frac{3}{2}}\left(1 + \frac{dD}{dr}\right)} \right] < - \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{D^{\frac{3}{2}}\left(1 + \frac{dD}{dr}\right)} \right] \operatorname{Mod.} (hr)$$

$$+ \frac{1}{D^{\frac{3}{2}}\left(1 + \frac{dD}{dr}\right)} \operatorname{Mod.} \frac{dh(r)}{dr}$$

und mit Hülfe von (130) und (131):

$$\operatorname{Mod.} \frac{d}{dr} \left[\frac{h(r)}{D^{\frac{3}{2}}\left(1 + \frac{dD}{dr}\right)} \right]$$

$$< \frac{\vartheta}{1-\vartheta} \sqrt{2d} \left\{ \frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{r+d}^{\,3}} \frac{1}{D^{\frac{3}{2}}\left(1 + \frac{dD}{dr}\right)} - \frac{1}{\sqrt{r+d}} \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{D^{\frac{3}{2}}\left(1 + \frac{dD}{dr}\right)} \right] \right\}$$

$$< \frac{\vartheta}{1-\vartheta} \sqrt{2d} \left\{ \frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{r+d}^{\,3}} \frac{1}{D^{\frac{3}{2}}\left(1 + \frac{dD}{dr}\right)} - \frac{3}{\sqrt{r+d}} \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{D^{\frac{3}{2}}\left(1 + \frac{dD}{dr}\right)} \right] \right\}$$

$$< - \frac{3\vartheta}{1-\vartheta} \sqrt{2d} \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{\sqrt{r+d}\, D^{\frac{3}{2}}\left(1 + \frac{dD}{dr}\right)} \right].$$

Setzt man dies in (134) ein, so folgt:

$$\text{Mod.}\, F < \frac{4\vartheta}{1-\vartheta}\,\frac{\sqrt{2}}{k}\,\frac{1}{r_0^{\frac{3}{2}}(1-\cos\varphi_0)}.$$

Eine ganz ähnliche Behandlung liefert für F':

$$\text{Mod.}\, F' < \frac{4\vartheta}{1-\vartheta}\,\frac{\sqrt{2}}{k}\,\frac{1}{r_0^{\frac{3}{2}}(1+\cos iv)}.$$

Damit wird nach (133):

$$\text{Mod.}\, V < \frac{4\vartheta}{1-\vartheta}\,\frac{1}{\sqrt{\pi k r_0}}\left\{\left|\frac{\sin\varphi_0}{1-\cos\varphi_0}\right| + \left|\sin\frac{\varphi_0}{2}\right|\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\frac{dv\sin iv}{1+\cos iv}\left\{\frac{1}{\sin\frac{iv}{2}-\cos\frac{\varphi_0}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{iv}{2}-\cos\frac{\varphi_0}{2}}\right\}\right\}.$$

Führt man in dem Integral $\xi = \sin\frac{iv}{2}$ als Variable ein, so wird dasselbe rational, und lässt sich daher leicht ausführen. Die Rechnung ergiebt für seinen Werth:

$$\frac{2\pi}{\sin^2\frac{\varphi_0}{2}}\left(1 \mp \cos\frac{\varphi_0}{2}\right) \quad \text{je nachdem} \quad \begin{array}{l}\varphi_0 < \pi\\ \varphi_0 > \pi\end{array}$$

und damit wird die gesuchte Grenze von V:

$$\text{Mod.}\, V(r_0, \varphi_0) < \frac{4\vartheta}{1-\vartheta}\,\frac{1}{\sqrt{\pi k r_0}}\,\frac{1}{\sin\frac{\varphi_0}{2}}.$$

Bildet man auf dieselbe Weise eine Grenze für $V(r_0', \varphi_0')$ und ersetzt, wie es für grosse Entfernung vom Spalt erlaubt ist, r_0 und r_0' durch ϱ, φ_0 durch $\frac{3\pi}{2}-\chi$, φ_0' durch $\frac{3\pi}{2}+\chi$ (s. Fig. 8), so erhält man die gesuchte Grenze für den Einfluss der Restglieder:

$$(135)\quad \text{Mod.}[V(r_0,\varphi_0)+V(r_0',\varphi_0')] < \frac{4\vartheta}{1-\vartheta}\sqrt{\frac{2}{\pi k\varrho}}\cdot\frac{\cos\frac{\chi}{2}}{\cos\chi},\quad \vartheta = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\lambda}{d}} = \sqrt{\frac{2}{\pi k d}}.$$

Der Betrag dieser Grenze wird unten mit dem Betrag ζ des ersten Gliedes zu vergleichen sein.

25. Analoges für vertikal polarisirtes Licht. Zunächst sollen noch die analogen Ueberlegungen für vertikal polarisirtes Licht angegeben werden, um dann die Resultate gemeinsam discutiren zu können.

Man beginne auch hier damit, die Oberflächenbelegung $v(r) = 1$ zu setzen und das aus dieser Oberflächenbelegung nach (82) entspringende Wellenpotential:

$$u(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty dr[G'(r_0, \varphi_0, r) + G'(r_0', \varphi_0', r)]$$

zu betrachten. Man bemerkt sogleich, dass wiederum ein naher Zusammenhang zwischen $u(0)$ und derjenigen Function Z' bestehn muss, durch welche Herr Sommerfeld die Beugung einer parallel zur Kante polarisirten Welle an einem einfachen Rand dargestellt hat, und zwar findet man ähnlich wie oben:

$$iku(0) = 2e^{ikx} - Z'(r_0, \varphi_0) - Z'(r_0', \varphi_0').$$

Damit folgt für die magnetische Schwingungsamplitude ν:

$$\nu = e^{ikx} - iku(0) = Z'(r_0, \varphi_0) + Z'(r_0', \varphi_0') - e^{ikx}.$$

Führt man die aus Herrn Sommerfeld's Arbeit (pag. 359 (5) und pag. 367 (3b)) zu entnehmende Darstellung der Function Z' ein, so erhält man für ν durch einfache Umstellungen:

$$\nu = \alpha + \beta$$

(wobei α und β die beiden bei der obigen Discussion von Z in (115) eingeführten Hülfsgrössen sind) und es folgt daher mit Hülfe der Ausdrücke (117) und (122) von β und α:

$$(136) \qquad \nu = \frac{e^{-ik\varrho}}{\sqrt{2\pi k\varrho}} \left\{ e^{\frac{\pi i}{4}} \frac{\sin\left(\frac{kd}{2}\sin\chi\right)}{\sin\frac{\chi}{2}} + e^{-\frac{\pi i}{4}} \frac{\cos\left(\frac{kd}{2}\sin\chi\right)}{\cos\frac{\chi}{2}} \right\}.$$

Es wäre nun weiter eine Grenze für den Einfluss des vernachlässigten Restes von $v(r)$ abzuleiten. Indessen möge es genügen, hier nur den Charakter des Resultates anzugeben, das aus einer ähnlichen, aber noch etwas umständlicheren Rechnung hervorgeht, wie sie in voriger Nummer ausgeführt wurde. Bezeichnet man nämlich mit ν' den vernachlässigten Rest der magnetischen Schwingungsamplitude, so findet sich:

$$(137) \qquad \text{Mod. } \nu' < \frac{1}{\sqrt{2\pi k\varrho}} \frac{\vartheta}{(1-\vartheta)^2} \frac{B}{\cos^2\chi},$$

wobei B eine mässige numerische Zahl ist. Diese Grenze bezieht sich wieder nur auf Punkte in grösserem Abstand vom Schirm.

26. Zusammenstellung und Ergebnisse. Wir wollen die Ergebnisse für die Beträge der ersten Glieder unsrer Entwicklungen, wie der Reste, aus den Gleichungen (129), (135), (136), (137) zusammenstellen, dabei aber zugleich eine Aenderung ihrer Form vornehmen. Auch sei nochmals hervorgehoben, dass *die folgenden einfachen Formeln nur für Punkte hinter dem Schirm und in einer Entfernung vom Spalt, für welche* $\frac{\varrho \cdot \lambda}{d^2}$ *eine grosse Zahl ist, gelten.*

Wir setzen:

$$(A)\qquad J=\left[\frac{\sin\left(\frac{kd}{2}\sin\chi\right)}{kd\sin\frac{\chi}{2}}\right]^2+\left[\frac{\cos\left(\frac{kd}{2}\sin\chi\right)}{kd\cos\frac{\chi}{2}}\right]^2$$

und:

$$(B)\qquad \operatorname{tg}\delta=\operatorname{tg}\left(\frac{\chi}{2}\right)\cdot\operatorname{cotg}\left(\frac{kd}{2}\sin\chi\right).$$

Dann folgt für die complexe Schwingungsamplitude bei horizontal polarisirtem Licht aus Gl. (129):

$$\zeta=\sqrt{\frac{kd^2}{2\pi\varrho}}\cdot\sqrt{J}\,e^{-i\left(k\varrho-\frac{\pi}{4}-\delta\right)}$$

und bei vertikal polarisirtem Licht aus Gl. (136):

$$\nu=\sqrt{\frac{kd^2}{2\pi\varrho}}\,\sqrt{J}\,e^{-i\left(k\varrho-\frac{\pi}{4}+\delta\right)}.$$

Daraus folgt für die Schwingungscomponenten selbst:

$$Z=\text{pars real.}\left(\zeta e^{2\pi i\frac{t}{\tau}}\right)=\sqrt{\frac{kd^2}{2\pi\varrho}}\cdot\sqrt{J}\cos\frac{2\pi}{\lambda}\left(\varrho-\frac{\lambda}{8}-\frac{\delta}{2\pi}\lambda-at\right),$$

$$N=\text{pars real.}\left(\nu e^{2\pi i\frac{t}{\tau}}\right)=\sqrt{\frac{kd^2}{2\pi\varrho}}\cdot\sqrt{J}\cos\frac{2\pi}{\lambda}\left(\varrho-\frac{\lambda}{8}+\frac{\delta}{2\pi}\lambda-at\right).$$

Man sieht, dass $\left(\text{abgesehn von dem Factor }\frac{kd^2}{2\pi\varrho}\right)$ J *die Lichtintensität bedeutet, während* δ $\left(\text{abgesehn von dem constanten Phasengewinn }\frac{\lambda}{8}\right)$ *die durch die Beugung verursachte Phasenverschiebung darstellt.*

Für die vernachlässigten Reste ζ' und ν' der Schwingungsamplituden gelten in jeder gegen die Wellenlänge grossen Entfernung vom Schirm die Grenzen:

$$\text{Mod. }\zeta'<\sqrt{\frac{kd^2}{2\pi\varrho}}\,\frac{8}{kd}\,\frac{\vartheta}{1-\vartheta}\,\frac{\cos\frac{\chi}{2}}{\cos\chi},\quad \text{Mod. }\nu'<\sqrt{\frac{kd^2}{2\pi\varrho}}\,\frac{B}{kd}\,\frac{\vartheta}{(1-\vartheta)^2}\,\frac{1}{\cos^2\chi},$$

$$\vartheta=\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\lambda}{d}}=\sqrt{\frac{2}{\pi kd}}\qquad B\text{ eine mässig grosse Zahl.}$$

Aendert man noch die Einheit der Lichtintensität im Verhältniss $\frac{kd^2}{2\pi\varrho}$, so kann man auch schreiben:

$$(C)\qquad \zeta=\sqrt{J}\,e^{-i\left(k\varrho-\frac{\pi}{4}-\delta\right)},\quad \nu=\sqrt{J}\,e^{-i\left(k\varrho-\frac{\pi}{4}+\delta\right)},$$

$$(D)\qquad \text{Mod. }\zeta'<4\pi\,\frac{\vartheta^3}{1-\vartheta}\,\frac{\cos\frac{\chi}{2}}{\cos\chi},\quad \text{Mod. }\nu'<\frac{\pi}{2}B\,\frac{\vartheta^3}{(1-\vartheta)^2}\,\frac{1}{\cos^2\chi}.$$

Wir wollen nun die wohlbekannte Formel, welche die ältere Beugungstheorie für die Intensität des durch einen Spalt gebeugten Lichtes giebt, mit zum Vergleich heranziehn. Dieselbe lautet (Kirchhoff, Optik, pag. 91, wo $a = \frac{d}{2}$, $p = k \sin\chi$ und, um auf die jetzige Intensitätseinheit zu kommen, const. = 1 zu setzen ist):

$$\text{(E)} \qquad J' = \left[\frac{\sin\left(\frac{kd}{2}\sin\chi\right)}{\frac{kd}{2}\sin\chi}\right]^2.$$

Zwischen dem älteren Intensitätsausdruck J' und dem hier abgeleiteten neuen J findet man leicht die Beziehung:

$$\text{(138)} \qquad J = J'\cos\chi + \left(\frac{1}{kd\cos\frac{\chi}{2}}\right)^2.$$

Man kennt die Lichtvertheilung, welche der Ausdruck J' liefert. Auf einem senkrecht zur Richtung nach dem Spalt aufgestellten Schirm zeigt sich ein System abwechselnd heller und dunkler zum Spalt paralleler Streifen. Der hellste Streifen von der Intensität $J' = 1$ findet sich in der Mitte des Beugungsbildes ($\chi = 0$), zu beiden Seiten desselben folgen nahe äquidistant schwächere Lichtmaxima, deren Oerter sehr genähert durch die Gleichungen:

$$kd\sin\chi = \pi(2n+1) \qquad n = 1, 2, \cdots$$

gegeben werden. Die Helligkeiten dieser Maxima sind bestimmt durch den Ausdruck:

$$J' = \frac{1}{\left(\frac{kd}{2}\sin\chi\right)^2}.$$

Sie nehmen bei breitem Spalt mit wachsendem Beugungswinkel rasch an Kraft ab. Zwischen den Maximis finden sich stets Stellen völliger Dunkelheit eingeschaltet.

Aus Formel (138) erkennt man leicht, was sich hieran ändert, wenn man den neuen Intensitätsausdruck J einführt. Zunächst ist die Helligkeit überall mit dem Factor $\cos\chi$ zu multipliciren, die Intensität der seitlichen Lichtstreifen nimmt also mit wachsendem Beugungswinkel rascher ab, als nach der älteren Formel, und ausserdem lagert sich über das ganze Beugungsbild eine ziemlich gleichförmige, mit wachsendem Beugungswinkel wenig ansteigende (bei breitem Spalt schwache) Helligkeit, welche durch das zweite Glied der Formel (138) dargestellt wird. Es sind also die

Minima zwischen den Streifen nicht mehr völlig dunkel und für grössere Beugungswinkel, wo auch die Maxima schwach sind, tritt allmählich eine Verwischung der Streifen ein. Der Ort der seitlichen Maxima bleibt übrigens unverändert nahe den Stellen:

$$kd \sin \chi = \pi(2n + 1) \qquad n = 1, 2, \cdots$$

während ihre Intensität durch die veränderte Formel

$$J' = \left(\frac{1}{kd \sin \frac{\chi}{2}} \right)^2$$

gegeben wird.

Fragen wir jetzt nach dem Gültigkeitsbereich des Ausdrucks J in Rücksicht auf die vernachlässigten Theile ζ' und ν'. Es werden nach (D) auch im besten Falle, für $\chi = 0$, die Reste ζ' und ν' numerisch klein nur dann, wenn kd gross, ϑ klein wird, also bei gegen die Wellenlänge breitem Spalt. Demnach kann die Formel J nur bei breitem Spalt eine Näherung darstellen. Da aber die Reste ζ' und ν' oder wenigstens die für sie abgeleiteten Grenzen mit wachsendem Beugungswinkel wachsen, so fragt sich weiter, bis zu welchen Beugungswinkeln die Anwendbarkeit der Formel J bestehn bleibt. Es wird genügen, wenn ζ' und ν' in den Helligkeits*maximis* klein gegen ζ und ν bleibt, wenn also in denselben:

$$\sqrt{J} > 4\pi g \frac{\vartheta^3}{1 - \vartheta} \frac{\cos \frac{\chi}{2}}{\cos \chi} \quad \text{und} \quad \sqrt{J} > \frac{\pi}{2} B g \frac{\vartheta^3}{(1 - \vartheta)^2} \frac{1}{\cos^2 \chi}$$

ist, wobei g eine grosse Zahl ist. Führt man hier für $\sqrt{J}$ seinen Werth in den Maximis $\dfrac{1}{kd \sin \frac{\chi}{2}}$ ein, so folgt:

$$\operatorname{cotg} \chi > 4g \cdot \frac{\vartheta}{1 - \vartheta}, \qquad \frac{\cos^2 \chi}{\sin \frac{\chi}{2}} > g B \frac{\vartheta}{(1 - \vartheta)^2}.$$

Diese Ungleichungen gelten für um so grössere, um so näher an einen Rechten heranreichende Beugungswinkel, je kleiner ϑ, je grösser die Spaltbreite ist.

Demnach gilt die Formel J mit um so grösserer Genauigkeit bis zu um so grösseren Beugungswinkeln, je breiter der Spalt im Verhältniss zur Wellenlänge ist. Dass für ganz grosse Beugungswinkel nahe einem Rechten nicht etwa nur die obige Grenzbestimmung ungenügend wird, sondern thatsächlich J aufhört, eine Näherung zu sein, erkennt man schon daraus, dass für $\chi = \frac{\pi}{2}$ strenge $\zeta = 0$ werden müsste, während es in

Wirklichkeit von der Ordnung $\frac{1}{kd}$ wird. Für $\chi = \frac{\pi}{2}$ ist also ζ und damit auch J um seinen eigenen Betrag falsch.

Beachtet man noch, dass für breiten Spalt und kleine Beugungswinkel J und J' nahezu identisch werden, so ist folgendes Resultat erreicht:

Wir sehen erstens, dass die ältere Formel:

$$J' = \left[\frac{\sin\left(\frac{kd}{2}\sin\chi\right)}{\frac{kd}{2}\sin\chi}\right]^2$$

der strengen Theorie um so näher entspricht, je breiter der Spalt und je kleiner der Beugungswinkel ist, und wir finden zweitens eine neue Formel:

$$J = \left[\frac{\sin\left(\frac{kd}{2}\sin\chi\right)}{kd\sin\frac{\chi}{2}}\right]^2 + \left[\frac{\cos\left(\frac{kd}{2}\sin\chi\right)}{kd\cos\frac{\chi}{2}}\right]^2,$$

welche sich bei wachsender Spaltbreite auch für grössere und grössere Beugungswinkel der strengen Theorie anschliesst.

Noch weitere optische Folgerungen ergeben sich aus der Vergleichung der vertikalen und der horizontalen Schwingungscomponente. Die Amplitude beider Componenten ist nach (C) überall gleich. Daraus folgt, *dass natürliches einfallendes Licht durch die Beugung an einem Spalt — innerhalb des Gültigkeitsbereichs des Ausdrucks J — nicht polarisirt wird*)*.

Indessen tritt eine *Phasendifferenz zwischen der vertikalen und der horizontalen Componente* ein, welche durch $\frac{\delta\lambda}{\pi}$ gegeben wird und nach Formel (B) in den Maximis verschwindet, während sie in den Minimis bis auf eine halbe Wellenlänge ansteigt.

Das Gültigkeitsbereich der Formel J ist in Praxis ein recht ausgedehntes. Wir haben bei ihrer Ableitung vorausgesetzt, dass die Entfernung ϱ des Standpunktes des Beobachters vom Spalt sehr gross ist. Die hieraus entspringenden Vernachlässigungen verschwinden aber völlig, wenn man in der üblichen Weise mit Hülfe eines auf unendlich eingestellten Fernrohrs die sogenannte Fraunhofer'sche Beugungserscheinung beobachtet, wie sie in unendlicher Entfernung vom Spalt zu Stande kommen würde. Unsre zweite Gruppe von Vernachlässigungen, die in der Weglassung der höheren Glieder des Näherungsverfahrens bestand, führt

*) Für ganz grosse Beugungswinkel nahe einem Rechten muss natürlich vertikale Polarisation eintreten, weil die horizontale Schwingungscomponente ζ nach der Randbedingung am Schirm gleich 0 werden muss.

wenigstens in dem mittleren Theile des Beugungsbildes auch nur bei sehr schmalen Spalten zu praktisch merklichen Fehlern. Wenn die Spaltbreite zehn Wellenlängen beträgt, erhält man aus Formel (D): Mod. $\xi' < 0.014 \frac{\cos \frac{\chi}{2}}{\cos \chi}$, während ξ in der Mitte des Beugungsbildes nahe 1 ist. Man sieht daraus, dass selbst für einen Spalt von nur zehn Wellenlängen Breite bei mässigen Beugungswinkeln χ der Fehler der Formel J und auch der älteren Formel J' nicht über ein paar Procent der in der Mitte des Beugungsbildes herrschenden Lichtintensität ansteigt.

Einen Abschluss in gewissem Sinne liefern die vorstehenden Untersuchungen für die *Theorie der Beugung der Röntgenstrahlen.* Fasst man einen Röntgenstrahl als einen Impuls auf, als eine Stosswelle, welche sich von einem Punkt im Aether, der einer kurzen Erschütterung ausgesetzt gewesen ist, fortpflanzt, so kann man sich diesen Impuls mit Hülfe des Fourier'schen Integrals in lauter homogene Schwingungen aller möglichen Schwingungsperioden oder Wellenlängen zerlegt denken. Man überzeugt sich leicht, dass hierbei fast die ganze Schwingungsenergie auf diejenigen homogenen Schwingungen fällt, deren Periode zwischen Null und Werthen von der Grössenordnung der Stossdauer liegt, während Schwingungen längerer Periode nur mit verschwindend kleiner Amplitude auftreten. Berechnete man nun die Beugung jeder einzelnen homogenen Welle durch einen Spalt unter alleiniger Berücksichtigung der ersten Glieder $w(r_0, \varphi_0) + w(r_0', \varphi_0')$ (Gl. 104) unsres Näherungsverfahrens, und superponirte dann die Amplituden des gebeugten Lichts für alle vorkommenden Wellen, so würde man auf einem anderen Wege zu genau den Resultaten über die Beugung von Impulsen gelangen, welche kürzlich Herr Sommerfeld (Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 46, 1901) abgeleitet hat. Ich hebe hervor, dass man hierbei nicht von den obigen einfachen Formeln für J Gebrauch machen kann, weil deren Ableitung voraussetzt, dass $\frac{\varrho \cdot \lambda}{d^2}$ numerisch gross ist, während bei der Zerlegung des Impulses in homogene Schwingungen Wellenlängen bis zur Null herunter und daher auch kleine Werthe des Products $\frac{\varrho \cdot \lambda}{d^2}$ auftreten. In der That hat Herr Sommerfeld den Ausdruck $w(r_0, \varphi_0) + w(r_0', \varphi_0')$, übertragen auf den Fall des Impulses, a. a. O. pag. 76—86, ohne die obigen Vernachlässigungen ausgewerthet. Dass dieser Ausdruck an sich eine Näherung für die Lösung des Problems sei, hat Herr Sommerfeld durch verschiedene Betrachtungen wahrscheinlich gemacht. Auf Grund unsrer Restformeln (D) lässt sich aber jetzt ohne Schwierigkeit eine numerische Grenze berechnen, um die das Sommerfeld'sche Resultat in dem concreten Falle des von den Herren

Haga und Wind*) ausgeführten Experimentes über Beugung von Röntgenstrahlen durch die Weglassung der weiteren Glieder des Näherungsverfahrens *höchstens* verfälscht sein kann. Indem ich für die Spaltbreite den ungünstigsten, kleinsten bei dem Experimente der Herren Haga und Wind vorkommenden Werth 0.002 mm ansetze, finde ich, dass der Fehler der Intensität bei den allein in Betracht kommenden kleinen Beugungswinkeln unter ein 10000-stel der in der Mitte des Beugungsbildes herrschenden Intensität bleibt.**) Man kommt damit zu dem Schluss, dass *Herrn Sommerfeld's angenäherte Theorie der Beugung von Röntgenstrahlen im concreten Fall des Experimentes der Herren Haga uud Wind bis auf practisch Unmerkliches mit einer strengen Theorie übereinstimmt.*

*) Wiedemann's Annalen der Physik. Bd. 68. 1899.

**) Es gilt dies unmittelbar nur für den Fall horizontal polarisirten Lichtes, für welches oben allein eine numerische Restgrenze aufgestellt wurde. Indessen ist klar, dass für vertikal polarisirtes Licht der Fehler von derselben Grössenordnung werden muss.

Ueber partielle Integration.

Von

MARTIN BRENDEL in Göttingen.

1. Man pflegt unter partieller Integration (intégration par parties) das bekannte Integrationsverfahren zu verstehen, das durch die Formel

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

definirt ist. Es lässt sich aber zeigen, dass diese Formel nur ein specieller Fall eines allgemeinern Verfahrens ist, welches mit mehr Recht als partielle Integration bezeichnet zu werden verdient, und welches auch wirklich das Analogon oder vielmehr die Umkehrung der partiellen Differentiation ist.

Es sei nämlich die Integration

$$y = \int f(u, v)\,dx$$

auszuführen, wo u und v Functionen von x darstellen. Lässt sich diese Integration ausführen, indem man v als constant ansieht, und sei dieses *partielle Integral*

$$y_0 = \int' f(u, v)\,dx,$$

wo der Accent am Integralzeichen bedeuten soll, dass bei der Integration v als Constante angesehen werden soll, so wird im allgemeinen y_0 eine Function von x und v sein, da man behufs der Integration u durch x ersetzen wird. Offenbar ist dann:

$$y = y_0 - \int \frac{\partial y_0}{\partial v}\,dv$$

und das durch diese Formel definirte Integrationsverfahren sollte eigentlich als *partielle Integration* bezeichnet werden.

Die obigen Gleichungen behalten ihre Allgemeinheit, wenn wir x statt u schreiben, und unser Verfahren ist dann durch folgende Formeln charakterisirt:*)

*) Von Herrn Zermelo wurde ich darauf aufmerksam gemacht, wie man leicht

$$(1)\qquad \begin{aligned} y &= \int f(x,v)\,dx = y_0 + y_1, \\ y_0 &= \int' f(x,v)\,dx, \qquad y_1 = -\int \frac{\partial y_0}{\partial v}\,dv = -\int \frac{\partial y_0}{\partial v}\frac{dv}{dx}\,dx, \end{aligned}$$

wo die beiden Ausdrücke für y_1 ausdrücklich hingeschrieben sind, weil je nach der Beschaffenheit der Function f entweder der Gebrauch von v oder der von x als Integrationsvariabler vortheilhafter sein kann.

2. Setzen wir in dem Formelsystem (1) $f(x,v) = v$, so erhalten wir den speciellen Fall unsers Verfahrens, den man gewöhnlich als partielle Integration bezeichnet, und den man vielmehr, wie Herr Hilbert vorschlägt, *Integration eines Products* nennen sollte.

3. Wenn es auch von vornherein klar ist, dass die Integrationen, welche sich nach unserm Verfahren durch bekannte Functionen ausführen lassen, auch durch die eine oder andre der sonst üblichen Methoden ausführbar sein müssen, so scheint jenes doch häufig schneller zum Ziele zu führen als diese und namentlich zur Ableitung einer grossen Menge von Transformationen von Integralen scheint es sehr fruchtbar zu sein. Es mögen einige Beispiele gegeben werden, welche das Verfahren ein wenig illustriren sollen, auf deren Zusammenstellung ich aber leider nur beschränkte Zeit verwenden konnte, so dass ihre Wahl gewiss nicht so zweckmässig getroffen worden ist, wie es hätte der Fall sein können; auch eine generelle Untersuchung der Fälle, die sich nach unserm Verfahren behandeln lassen, wäre am Platze, ist aber von mir nicht ausgeführt worden.

Sei z. B. das Integral

$$y = \int \frac{x\,dx}{1 + ax + bx^2}$$

---

zeigen kann, dass diese Formeln wirklich die Umkehrung der partiellen Differentiation darstellen; es ist nämlich:

$$df(u,v) = \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv,$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}du = df(u,v) - \frac{\partial f}{\partial v}dv.$$

Wenn man also setzt:

$$y = \int \frac{\partial f}{\partial u}du, \qquad y_0 = f(u,v), \qquad y_1 = -\int \frac{\partial f}{\partial v}dv,$$

so ist

$$y = y_0 + y_1, \qquad \frac{dy_1}{dv} = -\frac{\partial y_0}{\partial v}, \qquad \frac{dy}{du} = \frac{\partial y_0}{\partial u},$$

aus welch letzterm folgt:

$$y_0 = \int' dy.$$

auszuführen; setzt man $v = 1 + ax$, so wird

$$y_0 = \int^{v} \frac{x\,dx}{v + bx^2} = \frac{1}{2b} \lg (v + bx^2),$$

$$dy_1 = -\frac{1}{2b} \frac{dv}{v + bx^2} = -\frac{a}{2b} \frac{dx}{v + bx^2}$$

also:

$$\int \frac{x\,dx}{1 + ax + bx^2} = \frac{1}{2b} \lg (1 + ax + bx^2) - \frac{a}{2b} \int \frac{dx}{1 + ax + bx^2},$$

womit eine bekannte Transformationsformel abgeleitet ist.

Hat man allgemeiner:

$$y = \int x f(a + bx + cx^2)\,dx$$

und setzt man $v = a + bx$, so ist, wenn man mit F diejenige Function bezeichnet, deren Ableitung f ist:

$$y_0 = \frac{1}{2c} F(v + cx^2), \quad dy_1 = -\frac{1}{2c} f(v + cx^2)\,dv = -\frac{b}{2c} f(v + cx^2)\,dx$$

und hiermit die allgemeine Transformationsformel:

$$\int x f(a + bx + cx^2)\,dx = \frac{1}{2c} F(a + bx + cx^2) - \frac{b}{2c} \int f(a + bx + cx^2)\,dx,$$

wonach man durch Specialisirung ausser vielen andern die folgenden sofort hinschreiben kann:

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}} = \frac{1}{c} \sqrt{a + bx + cx^2} - \frac{b}{2c} \int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}},$$

$$\int x \sin(a + bx + cx^2)\,dx = -\frac{1}{2c} \cos(a + bx + cx^2) - \frac{b}{2c} \int \sin(a + bx + cx^2)\,dx.$$

Die vorstehenden Formeln lassen sich natürlich auch ableiten durch die Substitution $a + bx + cx^2 = z$, wobei $x\,dx$ durch den Werth

$$\frac{1}{2c}\,dz - \frac{b}{2c}\,dx$$

zu ersetzen ist.

4. Sei ferner das Integral

$$y = \int \frac{dx}{\sqrt{1 + ax + \sqrt{b + cx}}}$$

gegeben; setzt man $v = \sqrt{b + cx}$, so wird $y_0 = \frac{2}{a} \sqrt{v + 1 + ax}$, und hiermit $dy_1 = -\frac{1}{a} \frac{dv}{\sqrt{v + 1 + ax}}$, also:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 + ax + \sqrt{b + cx}}} = \frac{2}{a} \sqrt{1 + ax + \sqrt{b + cx}} - \frac{1}{a} \int \frac{dv}{\sqrt{1 - \frac{ab}{c} + v + \frac{a}{c} v^2}},$$

wo die Integration rechter Hand mit v als Integrationsvariabler ausgeführt werden kann, worauf dann v durch x zu ersetzen ist.

Ebenso erhält man, wenn man $v=\sqrt[3]{b+cx}$ setzt:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+ax+\sqrt[3]{b+cx}}}=\frac{2}{a}\sqrt{1+ax+\sqrt[3]{b+cx}}-\frac{1}{a}\int\frac{dv}{\sqrt{1-\frac{ab}{c}+v+\frac{a}{c}v^3}},$$

wo man das elliptische Integral gleich in der für die weitere Transformation bequemen Form erhält.

5. Die Methode ist auch namentlich da anwendbar, wo eine Integration $\int f(x)\,dx$ auszuführen ist, indem $f(x)$ nicht explicit als Function von x, oder doch nur in complicirterer Form als solche gegeben ist. Sei z. B. die Integration $\int\frac{dx}{\sqrt{x+v}}$ auszuführen und dabei v als Function von x durch die Gleichung

$$x=av^4+bv^3+cv^2+ev+g$$

gegeben, so erhält man ohne weiteres nach unsrer Formel:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x+v}}=2\sqrt{x+v}-\int\frac{dv}{\sqrt{av^4+bv^3+cv^2+(e+1)v+g}}.$$

Diese, sowie einige der vorher gegebenen Formeln kann man auch ableiten nach der Formel

$$\int f(x+v)\,dx=F(x+v)-\int f(x+v)\,dv,$$

wo F wieder diejenige Function bezeichnet, deren Ableitung f ist und welche ebenfalls einen Specialfall unsers Verfahrens darstellt.

6. Es sei besonders auf den Fall aufmerksam gemacht, wo die Integration $\int f(x,v)\,dx$ auszuführen ist, während v nur durch eine Differentialgleichung von der Form $\frac{dv}{dx}=\varphi(x,v)$ gegeben ist. Lässt sich dann die Integration $y_0=\int^x f(x,v)\,dx$ ausführen, so kann es vorkommen, dass der Ausdruck $dy_1=-\frac{\partial y_0}{\partial v}\frac{dv}{dx}dx$ von v frei ist, womit das Integral y als Function von x und v dargestellt ist, ohne dass sich im allgemeinen v durch bekannte Functionen von x darstellen lässt. Erhält man aber auf diese Weise, was gewöhnlich der Fall sein wird, dy_1 als Function von x und v, so kann man das partielle Integrationsverfahren erneut anwenden und so auf die Darstellung des Integrals durch eine Reihe geführt werden; die Differentialgleichung $\frac{dv}{dx}=\varphi(x,v)$ braucht man nicht erst zu lösen.

Unten soll noch ein Beispiel hierfür gegeben werden. Hier wollen wir nur ein Beispiel anführen für den Fall, dass $\frac{dy_1}{dx}$ von v frei ist, welches auch zeigen soll, dass man aus einer so hergestellten Grundformel eine Reihe anderer herleiten kann.

Sei $y = \int \frac{dx}{\sqrt{1+vx}}$, wo wir v zunächst unbestimmt lassen wollen, so haben wir

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+vx}} = \frac{2}{v}\sqrt{1+vx} + \int \frac{2+vx}{v^2\sqrt{1+vx}} \frac{dv}{dx} dx.$$

Tritt nun der Fall ein, dass die Grösse rechter Hand unter dem Integralzeichen von v frei ist, d. h. kann v durch die Gleichung

$$\frac{dv}{dx} = \frac{v^2\sqrt{1+vx}}{2+vx} X$$

dargestellt werden, wo X eine, im übrigen beliebige, Function von x allein ist, so wird:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+vx}} = \frac{2}{v}\sqrt{1+vx} + \int X\,dx.$$

Aus dieser Relation kann man unter andern eine Reihe von Transformationsformeln ableiten. Setzt man z. B. $v = x$, so wird

$$X = \frac{2+x^2}{x^2\sqrt{1+x^2}}$$

also:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{2}{x}\sqrt{1+x^2} + \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} + 2\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$$

woraus die Integralformel:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} = -\frac{1}{x}\sqrt{1+x^2}$$

folgt. Setzt man aber $v = x^{n-1}$, so erhält man in ähnlicher Weise:

$$\int \frac{dx}{x^n\sqrt{1+x^n}} = -\frac{\sqrt{1+x^n}}{(n-1)\,x^{n-1}} - \frac{n-2}{2(n-1)}\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^n}}.$$

7. Unsere Methode ist noch einer Erweiterung fähig, indem man nämlich der Grösse y_0 noch eine willkürliche Function von v hinzufügen kann, was natürlich auch in dem unter Nr. 2 genannten Specialfall möglich ist.

Das Formelsystem (1) sieht dann folgendermassen aus:

$$(2) \qquad \begin{aligned} y &= \int f(x,v)\,dx = y_0 + y_1, \\ y_0 &= \int' f(x,v)\,dx + W(v), \qquad \frac{dy_1}{dx} = -\frac{\partial y_0}{\partial v}\frac{dv}{dx}, \end{aligned}$$

oder

$$(3)\qquad y = \int^{\prime} f(x,v)\,dx + W(v) - \int \left\{ \frac{\partial}{\partial v} \int^{\prime} f(x,v)\,dv + W'(v) \right\} dv.$$

Da sich die Function $W(v)$ in der letztern Gleichung identisch heraushebt, so wird der Fall, wo ihre Einführung von Nutzen ist, nicht gerade sehr häufig eintreten. Ich kann aber ein einfaches Beispiel beibringen, wo sie wesentliche Dienste leistet.

Ist nämlich die Integration $y = \int v\,dx$ auszuführen, wo v durch die Gleichung $\frac{dv}{dx} = \frac{X}{x}$ definirt und X eine Function von x allein ist, so giebt unsere Methode ebenso wie die gewöhnliche Formel der partiellen Integration:

$$\int v\,dx = vx - \int X\,dx.$$

Ist aber v durch die Gleichung $\frac{dv}{dx} = \frac{X}{x+v}$ definirt, so giebt die gewöhnliche Methode, ebenso wie unser Formelsystem (1):

$$\int v\,dx = vx - \int \frac{xX}{x+v}\,dx,$$

wodurch nichts gewonnen ist. Führt man aber nach den Formeln (2) eine willkürliche Function $W(v)$ ein, so wird:

$$y_0 = vx + W(v)$$

und:

$$\int v\,dx = vx + W(v) - \int \frac{x + W'(v)}{x+v}\,X\,dx.$$

Man braucht nur $W'(v) = v$, also $W(v) = \frac{v^2}{2}$, zu wählen und erhält:

$$\int v\,dx = vx + \frac{v^2}{2} - \int X\,dx.$$

8. Es soll nun noch ein Beispiel gegeben werden für den in Nr. 6 erwähnten Fall, dass die Integration auf eine Reihe führt. Sei nämlich der Ausdruck

$$\frac{dy}{dx} = a\cos(\beta x + V)$$

auszuführen, wo $\frac{dV}{dx} = b\cos\varepsilon x$, und wo a, β, b, ε Constanten und zwar b und ε kleine Grössen sind. Setzen wir $y = y_0 + y_1$, so giebt unsere Methode:

$$y_0 = \frac{a}{\beta}\sin(\beta x + V),$$

$$\frac{dy_1}{dv} = -\frac{ab}{2\beta}\cos[(\beta+\varepsilon)x + V] - \frac{ab}{2\beta}\cos[(\beta-\varepsilon)x + V].$$

Wird der letztere Ausdruck wieder nach unsrer Methode integrirt und $y_1 = y_0' + y_1'$ gesetzt, so wird:

$$y_0' = -\frac{ab}{2\beta(\beta+\varepsilon)} \sin[(\beta+\varepsilon)x + V) - \frac{ab}{2\beta(\beta-\varepsilon)} \sin[\beta-\varepsilon)x + V],$$

$$\frac{dy_1'}{dx} = \frac{ab^2}{4\beta(\beta+\varepsilon)} \cos[(\beta+2\varepsilon)x + V] + \frac{ab^2}{4\beta}\left(\frac{1}{\beta+\varepsilon} + \frac{1}{\beta-\varepsilon}\right)\cos(\beta x + V)$$
$$+ \frac{ab^2}{4\beta(\beta-\varepsilon)} \cos[(\beta-2\varepsilon)x + V].$$

Die weitere Anwendung des Verfahrens giebt:

$$y_0'' = \frac{ab^2}{4\beta(\beta+\varepsilon)(\beta+2\varepsilon)} \sin[(\beta+2\varepsilon)x + V] + \frac{ab^2}{4\beta^2}\left(\frac{1}{\beta+\varepsilon} + \frac{1}{\beta-\varepsilon}\right)\sin(\beta x + V)$$
$$+ \frac{ab^2}{4\beta(\beta-\varepsilon)(\beta-2\varepsilon)} \sin[(\beta-2\varepsilon)x + V]$$

u. s. w. Der Ausdruck $y = y_0 + y_0' + y_0'' + \cdots$ ist ohne weiteres aufzustellen.

In diesem Beispiel tritt der Vortheil des Verfahrens besonders hervor; unsere Reihe schreitet nämlich im wesentlichen nach Potenzen von $\frac{b}{\beta}$ fort, wenigstens die ersten Glieder, solange der im Divisor vorkommende Factor $\beta - n\varepsilon$ (ε können wir stets als positiv annehmen) noch als von der Ordnung β anzusehen ist. Würde man aber behufs der Integration die Grösse $\cos(\beta x + V)$ nach Potenzen von $V = \frac{b}{\varepsilon}\sin\varepsilon x$ entwickeln, so würde diese Entwicklung zwar convergiren, aber im Falle ε erheblich kleiner als b ist, zur Anwendung unbrauchbar sein. Namentlich im Falle, wo ε sich der Grenze Null nähert, ist nur unser Verfahren anwendbar.

Die obige Reihe $y = y_0 + y_0' + y_0'' + \cdots$ ist convergent, wenn wir den Fall, wo β durch ε theilbar ist, hier ausschliessen. Es könnte zwar scheinen, als ob auch sie zur Anwendung ungeeignet wäre, weil man immer zu einem Gliede gelangen muss, wo der im Divisor auftretende Factor $\beta - n\varepsilon$ ausserordentlich klein wird. Man hat hier aber ein gewisses Analogon zu Herrn Poincaré's asymptotischen Reihen: bricht man die Reihe rechtzeitig vor dem Gliede ab, für welches $|\beta - n\varepsilon|$ sein Minimum erreicht, so erhält man einen sehr genäherten Werth der Function; setzt man sie aber weiter fort, so entfernt man sich wieder von dem wahren Werthe ihrer Summe; setzt man sie aber überhaupt weit genug fort, so nähert man sich wieder gleichmässig ihrem wahren Werthe. Nur im letzten Punkte liegt der wesentliche Unterschied gegen die asymptotischen Reihen, welche eben divergent sind.

9. Das durch das vorstehende Beispiel erläuterte specielle Verfahren der partiellen Integration stammt von Gyldén und bildet den wesent-

lichsten Vorzug seiner Störungstheorie; ich selbst habe es bei der Theorie der kleinen Planeten schon seit 15 Jahren angewandt, und es hat auch den eigentlichen Anlass zu den ganzen vorstehenden Betrachtungen gegeben. In der Störungstheorie tritt gerade der Fall ein, dass $\frac{b}{\varepsilon}$ sehr gross und $\frac{b}{\beta}$ sehr klein wird, also ε sehr klein im Verhältniss zu b und b sehr klein im Verhältniss zu β ist; man braucht dort von der Reihe $y = y_0 + y_0' + y_0'' + \cdots$ im allgemeinen nur zwei oder drei Glieder zu berücksichtigen.

Nichts hindert übrigens, die Reihe für y so anzusetzen:

$$y = y_0 + y_0' + y_0'' + \cdots + y_0^{(n)} + y_1^{(n)},$$

so dass sie endlich bleibt; das letzte Glied würde dann unausgeführte Integrale enthalten, von denen nur nachzuweisen ist, dass sie klein genug sind, um vernachlässigt werden zu können.

Bei dieser Gelegenheit möchte ich schliesslich noch auf eine Bezeichnung des partiellen Differentialquotienten hinweisen, die ich beim formalen analytischen Rechnen seit längerer Zeit mit Vortheil anwende.

Ist nämlich z. B. u eine Function von drei Variabeln

$$u = f(x, y, z)$$

so bezeichne ich die Ableitungen folgendermassen

$$\frac{\partial u}{dx}, \quad \frac{\partial u}{dy}, \quad \frac{\partial u}{dz},$$

da offenbar nur die in den Zählern stehenden Differentiale ∂u partielle, die in den Nennern stehenden dx, dy, dz aber totale sind. Der Vollständigkeit halber sollte man schreiben

$$\frac{\partial_x u}{dx}, \quad \frac{\partial_y u}{dy}, \quad \frac{\partial_z u}{dz},$$

aber beim Schreiben der Differential*quotienten* kann man natürlich, wie üblich, die Indices an den Zeichen ∂ fortlassen.

Selbstverständlich sollen sich diese Ausführungen nur auf das formale Rechnen mit den Differentialen beziehen, da man wohl mit Recht im allgemeinen nur die Ableitungen einer Function, nicht aber die Differentiale, als wohldefinirte Grössen ansieht. Man wird doch wohl aber sehr

häufig der Bequemlichkeit halber beim formalen Rechnen mit Differentialen operiren und dann kann man nach obigem z. B. in

$$du = \frac{\partial u}{dx}\,dx + \frac{\partial u}{dy}\,dy + \frac{\partial u}{dz}\,dz = \partial_x u + \partial_y u + \partial_z u$$

die dx, dy, dz fortheben.

Ist nun in unserm Beispiel z wieder eine Function von x und y, also

$$dz = \frac{\partial z}{dx}\,dx + \frac{\partial z}{dy}\,dy = \partial_x z + \partial_y z,$$

so kann man mit den so bezeichneten Differentialen formal rechnen und dabei sicher vor Rechenfehlern sein. In unserm Beispiel kann man so die folgenden Ausdrücke einfach in einander transformiren:

$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{dx}\,dx + \frac{\partial u}{dy}\,dy + \frac{\partial u}{dz}\,\frac{\partial z}{dx}\,dx + \frac{\partial u}{dz}\,\frac{\partial z}{dy}\,dy \\ &= \frac{\partial u}{dx}\,dx + \frac{\partial u}{dy}\,dy + \frac{\partial u}{dz}\,\partial_x z + \frac{\partial u}{dz}\,\partial_y z \\ &= \frac{\partial u}{dx}\,dx + \frac{\partial u}{dy}\,dy + \frac{\partial u}{dz}\,dz = \partial_x u + \partial_y u + \partial_z u, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} du &= \left(\frac{\partial u}{dx} + \frac{\partial u}{dz}\,\frac{\partial z}{dx}\right) dx + \left(\frac{\partial u}{dy} + \frac{\partial u}{dz}\,\frac{\partial z}{dy}\right) dy \\ &= \partial_x u + \partial_y u + \frac{\partial_z u(\partial_x z + \partial_y z)}{dz} = \partial_x u + \partial_y u + \partial_z u. \end{aligned}$$

Bei complicirteren Abhängigkeitsverhältnissen mehrerer Variabler unter einander hat mir diese Bezeichnungsweise für das formale Rechnen sehr grosse Dienste geleistet. — Dagegen ist im vorstehenden Aufsatz die sonst übliche Bezeichnungsweise angewandt worden, um die Darstellung nicht durch ungewohnte Bezeichnungen unübersichtlich zu machen.

Göttingen, 1901 Januar.

Beziehungen der allgemeinen Fläche dritter Ordnung zu einer covarianten Fläche dritter Classe.

Von

TH. REYE in Strassburg i./Els.

Von der allgemeinen Fläche dritter Ordnung oder dritter Classe gelten die folgenden, wohl grösstentheils neuen Sätze:

1. Zwei cubische Raumcurven k^3, k_1^3, die einen und nur einen Punkt gemein haben, bestimmen nicht nur eine Fläche dritter Ordnung F^3, auf der sie liegen, sondern auch eine Fläche dritter Classe Φ^3, den Ort einer Ebene, die mit den beiden Curven sechs Punkte eines Kegelschnitts gemein hat. Die cubischen Flächen F^3, Φ^3 sind reciproke Polaren bezüglich einer durch k^3, k_1^3 und F^3 bestimmten Fläche zweiten Grades, der „Hauptfläche" H^2. Sie schneiden sich in einer Schläfli'schen Doppelsechs, deren zwölf Geraden aber paarweise imaginär sein können.

2. Der Fläche dritter Ordnung F^3 sind auf besondere Art vierfach unendlich viele „Polfünfecke" der Hauptfläche H^2 eingeschrieben, d. h. vollständige räumliche Fünfecke, deren Ebenen den gegenüberliegenden Kanten conjugirt sind nach H^2. Durch zwei beliebig auf F^3 angenommene Eckpunkte ist eines dieser Polfünfecke eindeutig bestimmt. Seine zehn Ebenen berühren die Fläche dritter Classe Φ^3, und in seinen fünf Eckpunkten wird die Fläche F^3 von einer Fläche zweiter Ordnung tangirt, die mit F^3 zwei cubische Raumcurven gemein hat. Auf F^3 giebt es ∞^2 cubische Raumcurven, welche Polfünfecken von H^2 umschrieben sind, und die ich deshalb „cubische Polcurven" der Hauptfläche H^2 nenne*); sie bilden auf F^2 zwei conjugirte Curvennetze. Die beiden Raumcurven k^3, k_1^3 sind in einem der beiden Netze enthalten, können aber durch zwei beliebige Curven dieses oder des anderen Netzes ersetzt werden. Jede Curve k^3 des einen

*) Vgl. Crelle's Journal f. d. r. u. a. Math. Bd. 82, S. 67 und Reye, Geometrie der Lage, 3. Aufl., II, S. 226.

Netzes kann mit jeder Curve l^3 des anderen durch eine „zu H^2 apolare" Fläche zweiter Ordnung verbunden werden, und sie schneidet l^3 in den Eckpunkten eines Polfünfecks der Hauptfläche H^2.

3. Jeder Eckpunkt E eines solchen Polfünfecks hat bezüglich der Hauptfläche H^2 eine Polarebene, welche die Verbindungslinien der übrigen vier Eckpunkte in sechs Punkten der cubischen Fläche F^3 schneidet. Die Polarebenen der fünf Eckpunkte bilden ein „Polfünfflach" der Fläche zweiten Grades H^2, d. h. ein Pentaeder, dessen zehn Eckpunkte den gegenüberliegenden Kanten conjugirt sind nach H^2. Das Polfünfflach ist der Fläche dritter Classe Φ^3 umschrieben (1., 2.), und seine zehn Eckpunkte liegen auf der cubischen Fläche F^3.*) Durch seine fünf Ebenen gehen zwei, der Fläche Φ^3 und einer Fläche zweiter Classe Φ^2 umschriebene, cubische Ebenenbüschel (2.), die Flächen Φ^3 und Φ^2 aber berühren einander und die fünf Ebenen in fünf Punkten.

Das Polfünfeck und das zu ihm polare Polfünfflach bilden zusammen die bekannte Configuration $(15_6, 20_3)$, welche 15 Paare perspectiver Tetraeder enthält. Die Configuration ist zu sich selbst polar nach H^2, ihre 15 Punkte liegen auf F^3, und ihre 15 Ebenen berühren Φ^3. Sie enthält sechs der Fläche F^3 eingeschriebene Polfünfecke und sechs der Φ^3 umschriebene Polfünfflache von H^2. Es giebt ∞^4 Configurationen $(15_6, 20_3)$, die der Fläche F^3 eingeschrieben und zugleich der Fläche Φ^3 umschrieben sind.**)

4. Diese und andere Sätze lassen sich wie folgt begründen. Wenn die beiden cubischen Raumcurven k^3, k_1^3 einen und nur einen Punkt P gemein haben, so liegen sie auf einer Fläche dritter Ordnung F^3, die P mit je neun anderen Punkten der beiden Curven verbindet. Jede durch P gelegte Gerade g kann mit k^3 und k_1^3 durch zwei Flächen zweiter Ordnung F^2 und F_1^2 verbunden werden, diese aber schneiden sich in g und einer cubischen Raumcurve l^3, die mit k^3 und k_1^3 je fünf, also mit F^3 zehn Punkte gemein hat, und deshalb auf F^3 liegt. Die Raumcurve l^3 hat g zur Bisecante oder Sehne; jede durch g gelegte Ebene η schneidet F^2 und F_1^2 in zwei Sehnen von k^3 und k_1^3, die sich in einem Punkte E von l^3 treffen. Die Punkte der Raumcurve l^3 und der cubischen Fläche F^3

*) Herr Fr. Schur hat zuerst 1881 in diesen Annalen Bd. 18, S. 26 dreifach unendlich viele der F^3 so eingeschriebene Pentaeder nachgewiesen. Dass es deren ∞^5 giebt, lehrten 1884 die Untersuchungen der Herren Le Paige und Zeuthen in den Acta Math. V, p. 199 und 203.

**) Herr Le Paige hat diese der F^3 eingeschriebenen Configurationen zuerst a. a. O. p. 201 aus den Schnittpunkten von je zwei cubischen Raumcurven conjugirter Netze abgeleitet. Dass sie alle einer Φ^3 umschrieben sind, ist ihm entgangen.

lassen sich hiernach mit Hülfe der durch P gelegten Ebenen construiren;*) jede dieser Ebenen projicirt zwei Sehnen von k^3 und k_1^3, die sich in einem Punkte von F^3 schneiden. Die cubische Fläche ist auf den Ebenenbündel P projectiv bezogen, sodass jeder Ebene η von P ein in ihr liegender Punkt E von F^3 entspricht, und jedem Ebenenbüschel g von P eine cubische Raumcurve l^3 der Fläche.

5. Die Raumcurve l^3 beschreibt auf der cubischen Fläche F^3 ein „Netz" von ∞^2 cubischen Raumcurven, wenn ihre Sehne g den Strahlenbündel P beschreibt. Dreht sich g um P in einer Ebene η, so beschreibt die Raumcurve l^3 einen „Curvenbüschel", der die ganze Fläche F^3 überdeckt, und dessen Curven alle durch einen Punkt E der Ebene gehen (4.). Zwei beliebige Punkte E, E' der Fläche F^3 können durch eine cubische Raumcurve des Netzes verbunden werden, und zwei Curven des Netzes haben allemal einen Punkt gemein.

6. Die Fläche dritter Ordnung F^3 ist ganz ebenso durch zwei beliebige cubische Raumcurven l^3, l_1^3 dieses Netzes bestimmt, wie durch die Curven k^3, k_1^3. Die ∞^2 durch l^3 oder l_1^3 gehenden Flächen zweiter Ordnung schneiden demnach die Fläche F^3 in den cubischen Raumcurven eines zweiten Netzes, welchem k^3 und k_1^3 angehören, und das dieselben Eigenschaften hat wie das erste. Die beiden Curvennetze heissen bekanntlich „conjugirt". Jede Curve des einen hat mit jeder Curve des anderen Netzes fünf Punkte gemein (4.) und liegt mit ihr auf einer Fläche zweiter Ordnung, welche die cubische Fläche F^3 in den fünf Punkten berührt. Es giebt also ∞^4 Flächen zweiter Ordnung, welche die Fläche F^3 in je zwei cubischen Raumcurven k^3, l^3 der conjugirten Netze schneiden und in je fünf Punkten berühren; in zwei beliebigen Punkten wird F^3 von je einer dieser Flächen tangirt (vgl. 5.). Zwei beliebige Curven desselben Netzes haben allemal einen Punkt E gemein und bilden mit den übrigen durch E gehenden Raumcurven des Netzes einen die Fläche F^3 überdeckenden Curvenbüschel (5.). Die ∞^1 Sehnen dieser Curven, die durch irgend einen Punkt P der Fläche F^3 gehen, liegen mit E in einer Ebene (5.).

7. Wir können jetzt beweisen, dass die ∞^2 cubischen Raumcurven der beiden conjugirten Netze cubische Polcurven einer durch sie bestimmten Fläche zweiten Grades sind, schicken jedoch einige Bemerkungen über apolare Flächen zweiter Ordnung oder Classe voraus.

Bekanntlich sind die ∞^8 Flächen F^2 zweiter Ordnung, die den Poltetraedern und den Polfünfecken einer Fläche Φ^2 zweiter Classe umschrieben

*) Vgl. Reye, Geometrie der Lage, 3. Aufl., III, S. 60.

werden können, in einem *linearen* F^2-Systeme achter Stufe enthalten*). Die Flächen dieses Systemes nenne ich „apolar" zu der Fläche Φ^2 und sage, sie „stützen" oder „tragen" Φ^2, und die Fläche Φ^2 „ruht" auf ihnen**). Die Ebenenpaare des Systemes bestehen aus je zwei nach Φ^2 conjugirten Ebenen, und seine zweifachen Ebenen umhüllen Φ^2. In dem linearen F^2-Systeme sind alle F^2-Büschel, F^2-Bündel und linearen F^2-Systeme p^{ter} Stufe enthalten, die durch je zwei, drei resp. $p+1$ seiner Flächen bestimmt sind. Wenn also drei seiner Flächen, die in keinem F^2-Büschel liegen, durch eine cubische Raumcurve k^3 gehen, so stützen alle durch k^3 gehenden Flächen zweiter Ordnung die Fläche Φ^2, und k^3 ist eine cubische Polcurve von Φ^2***). Wenn von den ∞^4 einem räumlichen Fünfeck umschriebenen Flächen zweiter Ordnung fünf linear unabhängige die Fläche Φ^2 stützen, so gilt dasselbe von allen übrigen, und das Fünfeck ist ein Polfünfeck von Φ^2, d. h. seine zehn Ebenen sind den gegenüber liegenden Kanten conjugirt nach Φ^2. Durch neun linear unabhängige Flächen zweiter Ordnung ist ein lineares F^2-System achter Stufe nebst der auf ihm ruhenden Fläche Φ^2 eindeutig bestimmt. Gehen die neun Flächen zu dreien durch drei cubische Raumcurven, so folgt hieraus: Durch drei cubische Polcurven ist eine Fläche zweiter Classe i. A. eindeutig bestimmt.

8. Auf unserer Fläche dritter Ordnung F^3 greifen wir nun aus einem der conjugirten Curvennetze drei cubische Raumcurven k^3, k_1^3, k_2^3 heraus, die nicht in einem Curvenbüschel liegen. Diese bestimmen als cubische Polcurven eine Fläche zweiter Classe H^2, die auf allen durch k^3, k_1^3 oder k_2^3 gehenden Flächen zweiter Ordnung ruht. Die Raumcurven l^3 des anderen Netzes liegen auf je dreien dieser Flächen (6.), sind also gleichfalls cubische Polcurven der Fläche H^2 (7.); ebenso aber sind alle Curven des ersteren Netzes cubische Polcurven von H^2. Legen wir durch irgend zwei Curven k^3, l^3 der beiden Netze je zwei Flächen zweiter Ordnung beliebig, und verbinden wir sie durch eine fünfte Fläche 2. O., so sind diese fünf Flächen linear unabhängig, und sie stützen die Fläche H^2. Die fünf Schnittpunkte von k^3 und l^3 bilden also ein Polfünfeck von H^2 (7.); in ihnen wird die cubische Fläche F^3 von der fünften Fläche zweiter Ordnung berührt. Da zwei beliebige Punkte der Fläche F^3 durch je eine

---

*) Vgl. Crelle's Journal 78, S. 345 und 82, S. 64 und diese Annalen 49, S. 589.

**) Werden die Flächen F^2 und Φ^2 auf dasselbe Fundamentaltetraeder bezogen, und sind $\Sigma \alpha_{ik} x_i x_k = 0$ und $\Sigma a_{ik} \xi_i \xi_k = 0$ $(i, k = 1, 2, 3, 4)$ ihre Gleichungen in Punkt- resp. Ebenencoordinaten, so ist die bilineare Gleichung:

$$a_{11}\alpha_{11} + 2a_{12}\alpha_{12} + \cdots + a_{33}\alpha_{33} + 2a_{34}\alpha_{34} + a_{44}\alpha_{44} = 0$$

die Bedingung dafür, dass F^2 die Fläche Φ^2 stützt.

***) Vgl. Crelle's Journal 82, S. 66.

Curve k^3 oder l^3 der conjugirten Netze verbunden werden können (5.), so sind sie die Eckpunkte eines durch sie bestimmten Polfünfecks k^3l^3 der Fläche H^2. Der cubischen Fläche F^3 sind also wirklich ∞^4 Polfünfecke von H^2 eingeschrieben; H^2 ist die vorhin als „Hauptfläche" bezeichnete Fläche zweiten Grades.*)

9. Von zwei beliebigen dieser Polfünfecke, k^3l^3 und $k_1^3l_1^3$, liegen die zehn Eckpunkte auf den beiden Flächen zweiter Ordnung, welche k^3 und l^3 mit resp. l_1^3 und k_1^3 verbinden; sie liegen also auf der biquadratischen Schnittcurve $C^{2\cdot 2}$ dieser Flächen. Mit der cubischen Fläche F^3 hat $C^{2\cdot 2}$ ausser den zehn Eckpunkten noch den Schnittpunkt E von l^3 und l_1^3, sowie den Schnittpunkt E' von k^3 und k_1^3 gemein.

Legen wir nun zwei Kanten g, g_1 der beiden Polfünfecke beliebig durch einen Punkt P von F^3, so bestimmen ihre übrigen Schnittpunkte mit F^3 die Polfünfecke, ihre Ebene aber verbindet vier der zehn Eckpunkte mit den beiden Punkten E, E' (5., 6.). Die biquadratische Raumcurve $C^{2\cdot 2}$ zerfällt deshalb in zwei Kegelschnitte, von denen der eine diese sechs Punkte, der andere die übrigen sechs Eckpunkte der beiden Polfünfecke verbindet. Die Ebene der sechs Eckpunkte liegt den Kanten g, g_1 in den beiden Polfünfecken gegenüber, sie ist ihnen conjugirt (7.), und ihr Pol bezüglich der Fläche H^2 ist folglich der Schnittpunkt P von g, g_1 und F^3. Sie hat mit zwei beliebigen Raumcurven k^3, k_1^3 oder l^3, l_1^3 des einen oder des anderen Curvennetzes sechs Punkte eines Kegelschnittes gemein; denn durch P gehen zwei Sehnen g, g_1 dieser Curven.

10. Jede Kante eines beliebigen der ∞^4 Polfünfecke schneidet also die cubische Fläche F^3 in zwei Eckpunkten und in dem Pole der gegenüberliegenden Fünfeckebene bezüglich der Hauptfläche H^2. Die Ebenen der Polfünfecke umhüllen folglich eine Fläche dritter Classe Φ^3, die Polare von F^3 nach H^2. Jede von ihnen hat mit zwei beliebigen cubischen

---

*) Bekanntlich lässt sich die cubische Fläche F darstellen durch eine Gleichung von der Form:

$$\sum \pm u_{11}\, u_{22}\, u_{33} = 0,$$

wenn die neun Elemente u_{ik} der Determinante lineare Functionen der Punktcoordinaten bezeichnen. Die Doppelgleichungen:

$$\frac{u_{i1}}{u_{k1}} = \frac{u_{i2}}{u_{k2}} = \frac{u_{i3}}{u_{k3}} \quad \text{und} \quad \frac{u_{1i}}{u_{1k}} = \frac{u_{2i}}{u_{2k}} = \frac{u_{3i}}{u_{3k}}$$

repräsentiren für $i, k = 1, 2, 3$ je drei cubische Raumcurven conjugirter Netze von F^3. Werden die neun ersten Minoren der Determinante gleich Null gesetzt, so erhält man die Gleichungen von neun Flächen zweiter Ordnung, welche mit F^3 je zwei dieser cubischen Raumcurven gemein haben, also die zugehörige Hauptfläche H^2 stützen und sie bestimmen.

Raumcurven des einen oder des anderen Netzes sechs Punkte eines Kegelschnittes gemein (9.). Die Verbindungskanten von vier Eckpunkten eines Polfünfecks schneiden die Fläche F^3 in sechs Punkten, die dem fünften Eckpunkte conjugirt sind, also in dessen Polarebene nach H^2 liegen. Hieraus ergeben sich ohne Schwierigkeit alle übrigen in Nr. 3 aufgestellten Sätze. Von unseren sonstigen Behauptungen (1., 2.) aber bleibt noch die eine zu beweisen übrig, dass die reciprok polaren Flächen F^3 und Φ^3 zwölf Gerade einer Doppelsechs mit einander gemein haben.

11. Die beiden cubischen Raumcurven k^3, k_1^3, von denen wir ausgingen, haben zehn gemeinschaftliche Sehnen, nämlich vier durch P gehende und sechs windschiefe. Die sechs windschiefen Sehnen s liegen auf der Fläche dritter Ordnung F^3, weil sie mit ihr je vier Punkte von k^3 und k_1^3 gemein haben; sie liegen auch auf der Fläche dritter Classe Φ^3, weil jede ihrer Ebenen mit k^3 und k_1^3 sechs Punkte eines in zwei Gerade zerfallenden Kegelschnittes gemein hat und somit Φ^3 berührt. Bekanntlich bilden die sechs Sehnen s die eine Hälfte einer Schläfli'schen Doppelsechs; die sechs Geraden t der anderen Hälfte sind mit je fünf der Sehnen s incident und liegen deshalb gleichfalls sowohl auf F^3 wie auf Φ^3. Jede der Geraden s ist zu einer der Geraden t windschief; sie bildet mit den Kegelschnitten von F^3, deren Ebenen durch t gehen, je eine cubische Raumcurve l^3 des zu k^3 und k_1^3 conjugirten Netzes. Die beiden Geraden s, t liegen demnach in ∞^2 zu H^2 apolaren Ebenenpaaren und sind folglich (7.) reciproke Polaren bezüglich der Hauptfläche H^2*).

12. Die Fläche dritter Ordnung F^3 wird von ∞^3 Kegeln zweiter Ordnung in je zwei cubischen Raumcurven k^3, l^3 der conjugirten Netze geschnitten und in je vier Punkten Q berührt; diese vier Punkte bilden mit dem Mittelpunkte des zugehörigen Kegels ein Polfünfeck $k^3 l^3$, mit einander aber, wie wir gleich beweisen werden, ein Poltetraeder der Hauptfläche H^2. Jede cubische Raumcurve c^3, die die vier Berührungspunkte Q des Kegels enthält und einen seiner Strahlen s zur Sehne hat, schneidet die Fläche F^3 noch in den fünf Eckpunkten eines Polfünfecks $k_1^3 l_1^3$ und ist deshalb eine cubische Polcurve von H^2.

Die aus c^3 und s bestehende biquadratische Raumcurve $C^{2\cdot 2}$ hat nämlich mit den cubischen Raumcurven k^3 und l^3, in denen der Kegel die Fläche F^3 schneidet, je sechs Punkte gemein, kann also mit k^3 und l^3 durch Flächen zweiter Ordnung verbunden werden. Diese schneiden F^3 in

*) Bekanntlich hat Herr F. Schur (in diesen Annalen Bd. 18, S. 12) zuerst bewiesen, dass eine reelle Doppelsechs aus reciproken Polaren bezüglich einer Fläche zweiten Grades besteht. Hier ist diese Fläche H^2 unabhängig von der Doppelsechs, die ja auch imaginär sein kann, abgeleitet (vgl. 8.).

zwei anderen cubischen Raumcurven l_1^3 und k_1^3, deren fünf Schnittpunkte auf c^3 liegen und ein Polfünfeck $k_1^3 l_1^3$ der Hauptfläche H^2 bilden. Die vier Berührungspunkte Q des Kegels liegen demnach auf ∞^3 cubischen Polcurven c^3 von H^2; sie bilden ein Poltetraeder von H^2, weil von den ∞^5 durch sie gehenden Flächen zweiter Ordnung sechs linear unabhängige und dann auch alle übrigen die Fläche H^2 stützen.

Es giebt ∞^6 cubische Raumcurven c^3, welche die Fläche F^3 in den Eckpunkten je eines Polfünfecks und eines Poltetraeders von H^2 schneiden; jedem Polfünfeck $k_1^3 l_1^3$ können ∞^2 von ihnen umschrieben werden.

13. Dreifach unendlich viele Poltetraeder der Hauptfläche H^2 sind der Fläche dritter Ordnung F^3 eingeschrieben und der Fläche dritter Classe Φ^3 umschrieben. In den vier Eckpunkten eines jeden dieser Tetraeder wird F^3 von einem Kegel zweiter Ordnung berührt, dessen Mittelpunkt auf F^3 liegt (13.); die vier Tetraederebenen aber berühren Φ^3 und einen Kegelschnitt, dessen Ebene Φ^3 tangirt, in gewissen vier Punkten. Ein beliebiger Punkt Q von Φ^3 ist Eckpunkt von ∞^1 dieser Tetraeder; jede durch Q gehende Raumcurve k^3 oder l^3 der conjugirten Curvennetze schneidet die Polarebene von Q nach H^2 in den übrigen drei Eckpunkten eines dieser Tetraeder und trifft die Berührungsebene von Q an F^3 in dem Mittelpunkte des zugehörigen Kegels zweiter Ordnung.

14. Eine Fläche zweiter Classe Φ^2 hat neunfach unendlich viele cubische Polcurven; von diesen gehen ∞^7 durch einen beliebigen Punkt, und jedem Poltetraeder von Φ^2 sind ihrer ∞^4 umschrieben*). Einem beliebigen Tetraeder sind ∞^1 cubische Polcurven von Φ^2 umschrieben; sie liegen auf einem einschaligen Hyperboloid und schneiden jeden Strahl seiner einen Regelschaar in Punktepaaren einer Involution**). Sonst ist über die gegenseitige Lage der ∞^9 Polcurven bisher nichts bekannt, und der folgende Satz dürfte deshalb nicht ohne Interesse sein.

15. Zwei cubische Polcurven k^3, k_1^3 einer Fläche zweiter Classe Φ^2, die einen Punkt P gemein haben, bestimmen auf der sie verbindenden cubischen Fläche F^3 einen Curvenbüschel, der aus ∞^1 cubischen Polcurven der Fläche Φ^2 besteht. — Nämlich zwei Flächen zweiter Ordnung, welche k^3 und k_1^3 mit einer durch P gelegten Geraden g verbinden, liegen in einem F^2-Büschel, dessen Flächen alle zu Φ^2 apolar sind (7.). Die Grundcurve dieses Büschels besteht aus g und einer auf F^3 liegenden cubischen Raumcurve l^3 des zu k^3 und k_1^3 conjugirten Netzes (4.). Die

*) In Crelle's Journal 82, S. 67 habe ich die Mächtigkeiten dieser Mannigfaltigkeiten zu niedrig angegeben. Meinem Freunde R. Sturm verdanke ich diese Berichtigung.

**) Vgl. Crelle's Journal Bd. 77, S. 283.

∞^1 Flächen des F^2-Büschels aber schneiden F^3 in l^3 und je einer cubischen Raumcurve k_i^3 des durch k^3 und $k_1{}^3$ bestimmten Curvenbüschels. Da nun ∞^2 solche F^2-Büschel existiren, so gehen ∞^2 zu Φ^2 apolare Flächen zweiter Ordnung durch k_i^3, und k_i^3 ist somit (7.) eine cubische Polcurve der Fläche Φ^2. Uebrigens sind k^3, $k_1{}^3$ und $k_i{}^3$ cubische Polcurven von ∞^3 Flächen zweiter Classe.

Wenn zwei cubische Polcurven von Φ^2 zwei Punkte gemein haben, so lassen sich aus ihnen ∞^2 cubische Polcurven von Φ^2 ableiten, die alle durch die beiden Punkte gehen.

Strassburg, 28. März 1901.

Ueber die Grundlagen der Geometrie.

Von

Friedrich Schur in Karlsruhe.

In meinem letzten Artikel „Ueber den Fundamentalsatz der projectiven Geometrie"*) habe ich mich darauf beschränkt, in möglichst knapper Weise den elementaren Beweis zu erbringen, dass der Aufbau der projectiven Geometrie unter Zuhülfenahme der Congruenzaxiome ohne das Archimedische Postulat oder sonst ein Stetigkeitsaxiom möglich sei. Da einerseits die v. Staudt'sche Wurfrechnung**), die Richtigkeit des Fundamentalsatzes einmal zugegeben, ebenfalls von jedem Stetigkeitsaxiome absieht, und andrerseits in der Einleitung zu meinem Lehrbuche der analytischen Geometrie***) alle Elemente dazu gegeben waren, so hielt ich auch den Nachweis dafür erbracht†), dass die elementare Proportionslehre der euklidischen Geometrie ohne ein solches Postulat entwickelt werden könne. Nachdem aber inzwischen Hilbert in seinen Grundlagen der Geometrie††) diese Idee in glänzender Weise ausgeführt hat, ist diese Proportionslehre und die damit zusammenhängende rein geometrische Streckenrechnung von verschiedenen Autoren†††) ausschliesslich Hilbert zugeschrieben worden.

---

*) Schur, über den Fundamentalsatz der projectiven Geometrie, diese Ann. Bd. 51, p. 401 ff.

**) v. Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage, 2. Heft, Nürnberg, 1856. Lüroth, Das Imaginäre in der Geometrie und das Rechnen mit Würfen, diese Ann. Bd. *8*, p. 145 ff. und Bd. 11, p. 84 ff. u. s. w.

***) Schur, Lehrbuch der analytischen Geometrie, Leipzig, 1898.

†) a. a. O., pag. VI und diese Ann. Bd. 51, p. 403.

††) Hilbert, Grundlagen der Geometrie, Leipzig 1899, Kap. III. Hilbert beschränkt sich ausserdem unter Voraussetzung des Parallelenaxioms auf die Axiome der Ebene, was aus meinen Entwickelungen nicht folgte; auf die Benutzung des Pascal'schen Satzes zum Beweise des commutativen Gesetzes der Multiplication, worin die Hauptschwierigkeit lag, wurde schon in meiner analyt. Geometrie hingewiesen. Vergl. hierzu auch H. Wiener, Ueber Grundlagen und Aufbau der Geometrie, Ber. d. deutschen Math. Ver. I, p. 45 ff. und III, p. 70 ff.

†††) Hölder, Anschauung und Denken in der Geometrie, Leipzig, 1900, p. 17 unten, Sommer, Hilberts Foundations of Geometry, Bull. of the American math. Soc. vol. VI, p. 288 und 289.

Dem gegenüber will ich in diesem Artikel durch Wiedergabe der v. Staudt'-schen Wurfrechnung in derjenigen Form, in der ich sie in meinen Vorlesungen an der Universität Leipzig schon im Jahre 1884 entwickelte, die Berechtigung meiner obigen Behauptungen näher begründen und zugleich ebenfalls nach meinem alten Hefte zeigen, wie diese Principien durch ihre Unabhängigkeit vom Parallelenaxiom viel weiter führen, indem sie mit einem Schlage in die Metrik der nichteuklidischen Geometrie einführen und den Umfang ihrer Unabhängigkeit vom Archimedischen Postulate an fertigen Formeln unmittelbar erkennen lassen, sodass es hierzu des von Dehn construirten Begriffes der Pseudocongruenz*) nicht bedarf.

In den ersten beiden Paragraphen gehe ich auf die Axiomensysteme ein, die, vor Hilbert von italienischen Geometern aufgestellt, sich zum Theil mit jenen decken, zum Theil erkennen lassen, dass das Hilbert'sche System doch nicht ganz logisch unabhängig ist, wie Hilbert und nach ihm die o. a. Autoren**) behaupteten. Ich hoffe hierdurch zugleich eine den Geometern willkommene Ergänzung der etwas knappen Litteraturangaben in der Hilbert'schen Schrift zu geben. Ich möchte hier auch auf Pieri***) verweisen, bemerke aber, dass der Umstand, dass Pieri die projectiven Postulate von denen der Bewegung nicht trennt, deren Unabhängigkeit nicht klar genug hervortreten lässt. Denn wenn auch zwischen beiden Gruppen von Postulaten innige Beziehungen bestehen, so sind dieselben einerseits infinitesimaler Natur†), und ist es andrerseits, wie gerade die sorgfältig durchgeführten Entwickelungen††) von Pieri zeigen, bisher nicht möglich gewesen, durch ihre Zusammenfassung irgend eines der Postulate (ausser dem Archimedischen) als überflüssig nachzuweisen. Bei Pieri findet man auch weitere Litteraturnachweise.

*) Dehn, die Legendre'schen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck, In. Diss., Göttingen, 1900, p. 12.

**) Hilbert, a. a. O. pag. 21; Hölder, a. a. O. p. 35; Sommer, a. a. O. p. 292.

***) Pieri, Della geometria elementare come sistema ipotetico deduttivo, Mem. della Acc. di Torino, 1899.

†) S. z. B. Schur, Ueber den Zusammenhang der Räume constanten Riemann'schen Krümmungsmaasses mit den projectiven Räumen, diese Ann. Bd. 27, p. 537 ff. und Lie, Theorie der Transformationsgruppen, Leipzig, 1893, 3. Abschn. V. Abth.

††) Ich erwähne hier auch die vortrefflichen Elementi di Geometria von Veronese, Padova, 1897, in denen der Verfasser der Fondamenti zum ersten Male ein Elementarbuch der Geometrie geschaffen hat, das in Beziehung auf Strenge über Euklid hinausgeht.

§ 1.

Ueber die projectiven Axiome und die idealen Elemente.

Wir verstehen unter projectiven Axiomen diejenigen, welche Hilbert Axiome der Verknüpfung und Anordnung nennt, halten aber diese Trennung insofern nicht für ganz glücklich, weil sie sich einerseits wohl für die Gerade, aber nicht mehr für die Ebene*) vollständig durchführen lässt, und sich andrerseits bei dieser Trennung eine gänzliche Unabhängigkeit kaum erreichen lässt. Eine andere Gruppirung dieser Axiome, die, nachdem Pasch**) das erste *vollständige* System geometrischer Axiome aufgestellt hatte, zuerst von Peano***) gegeben und dann von Ingrami†) vereinfacht wurde, gestattet eine wesentliche Reduction des Hilbert'schen Systems. Diese Axiome oder Postulate sind nach Ingrami die folgenden:

1. Postulat. *Es giebt unbegrenzt viele Elemente, die wir Punkte nennen.*

2. Postulat. *Irgend zwei von einander verschiedene Punkte bestimmen eindeutig eine Classe von unbegrenzt vielen Punkten, der sie selbst angehören, und die Strecke genannt wird. Irgend zwei Punkte einer Strecke bestimmen eine andere Strecke, deren Punkte der ersten angehören*††).

3. Postulat. *Jede Strecke AB bestimmt zwei andere Classen von Punkten, ihre Verlängerungen über B resp. A hinaus derart, dass jeder Punkt der ersten resp. zweiten mit A resp. B eine Strecke bestimmt, der B resp. A angehört. Ist C ein Punkt der Strecke AB, so fällt die Verlängerung von CB über B hinaus mit derjenigen von AB über B hinaus zusammen, und die Verlängerung von AC über C hinaus besteht aus der Strecke CB und ihrer Verlängerung über B hinaus.*

4. Postulat. *Es giebt keinen Punkt, der beiden Verlängerungen einer Strecke gleichzeitig angehört*††).

---

*) Das Axiom II, 5 auf S. 7 von Hilbert's Grundlagen kann nicht als ein reines Axiom der Anordnung betrachtet werden, da es erstens aussagt, dass die Gerade a mit einer von zwei Geraden überhaupt einen Punkt gemein hat, und zweitens, dass dieser Punkt zwischen zwei Ecken des Dreiecks liegt.

**) Pasch, Vorlesungen über neuere Geometrie, Leipzig, 1882.

***) Peano, Sui fondamenti della Geometria, Rivista di Matematica, vol. IV, p. 55ff., 1894.

†) Ingrami, Elementi di Geometria per le scuole secondarie superiori, Bologna, 1899, p. 1—50.

††) Diese beiden Postulate gelten für die elliptische Geometrie nur dann, wenn man sich, wie es der Entstehung der geometrischen Axiome entspricht, auf einen begrenzten Theil des Raumes, die sogenannten erreichbaren Punkte beschränkt. Vergl. auch die Anmerkung zu den Postulaten der Bewegung auf S. 274.

1. Definition: *Eine Gerade besteht aus den Punkten einer Strecke und ihren beiden Verlängerungen.*

5. Postulat. *Ausserhalb jeder Geraden giebt es Punkte.*

6. Postulat. *Wenn A, B, C drei nicht in einer Geraden gelegene Punkte sind und D ein Punkt der Strecke BC, ferner E ein Punkt der Strecke AD, dann existirt ein der Strecke AB angehöriger Punkt F derart, dass E auf der Strecke CF liegt.*

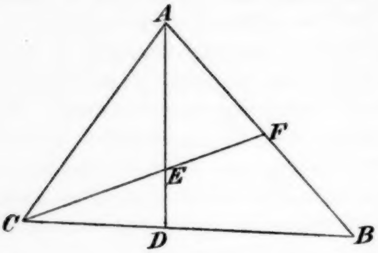


Fig. 1.

7. Postulat. *Wenn A, B, C drei nicht in gerader Linie gelegene Punkte sind, D ein Punkt der Strecke BC und F ein Punkt der Strecke AB, dann existirt ein Punkt, welcher den Strecken AD und CF gemeinsam ist*).* (Fig. 1.)

2. Definition: *Die Classe der Punkte derjenigen Strecken resp. Geraden, welche drei nicht in einer Geraden liegende Punkte mit den Punkten der durch die beiden andern bestimmten Strecke verbinden, heisst Dreieck resp. Ebene.*

8. Postulat. *Ausserhalb jeder Ebene giebt es Punkte.*

3. Definition: *Die Classe der Punkte derjenigen Geraden, welche erstens jeden von vier nicht in einer Ebene gelegenen Punkten mit den Punkten des durch die andern bestimmten Dreiecks und zweitens die Punkte der Strecke durch je zwei derselben mit denjenigen der Strecke durch die beiden andern verbinden, heisst Raum.*

Hieraus ergeben sich dann die Sätze:

1. Satz. *Eine Gerade ist durch irgend zwei ihrer Punkte eindeutig bestimmt.*

2. Satz. *Eine Ebene ist durch irgend drei ihrer Punkte, die nicht in einer Geraden liegen, eindeutig bestimmt.*

3. Satz. *Eine Ebene wird durch jede Gerade so in zwei Theile getheilt, dass die Strecke von einem Punkte des einen Theiles nach einem Punkte des andern stets einen Punkt der Geraden enthält, diejenige von einem Punkte des einen Theiles nach einem Punkte desselben aber keinen.*

4. Satz. *Ein Raum ist durch irgend vier seiner Punkte, die nicht derselben Ebene angehören, vollkommen bestimmt.*

5. Satz. *Ein Raum wird durch jede Ebene desselben so in zwei Theile getheilt, dass die Strecke von einem Punkte des einen Theiles nach*

*) Die Zurückführung des Begriffes der Ebene auf diese beiden Postulate über Punkte und Geraden verdankt man Peano l. c. p. 65.

einem Punkte des andern stets einen Punkt der Ebene enthält, diejenige von einem Punkte des einen Theiles nach einem Punkte desselben aber keinen.

6. Satz. *Zwei Ebenen desselben Raumes, die einen Punkt gemein haben, haben auch eine Gerade gemein.*

Bezüglich der Beweise dieser Sätze wollen wir uns unter Hinweis auf die Ausführungen von Peano und Ingrami auf die folgenden Bemerkungen beschränken. Sind A, B, C die eine Ebene bestimmenden Punkte, so folgt zunächst aus dem 6. Postulate, dass jeder Punkt einer Strecke von einer Ecke des Dreiecks nach einem Punkte der gegenüberliegenden Seite auch auf solchen Strecken durch die beiden andern Ecken liegt. Weiter folgt, dass jede Gerade durch eine Ecke A und einen Punkt D der Verlängerung der gegenüberliegenden Seite BC über C hinaus der Ebene angehört. Je nachdem nämlich der Punkt P dieser Geraden auf der Strecke AD selbst oder auf einer ihrer Verlängerungen über D oder über A hinaus liegt, ergiebt sich dies durch Betrachtung des Dreiecks ABD aus dem 7. Postulate oder des Dreiecks ABP aus dem 6. Postulate (CP schneidet AB) oder endlich des Dreiecks BDP aus dem 7. Postulate.

Nunmehr ist weiter leicht zu sehen, dass jede Gerade, die zwei Seiten des Dreiecks trifft, ganz in der Ebene enthalten ist. Für die Punkte dieser Strecke DE selbst (D auf AB und E auf AC) folgt dies wieder durch Betrachtung des Dreiecks ABE aus dem 6. Postulate. Ebenso folgt es für die über D resp. E hinaus liegenden Punkte der Verlängerungen durch Anwendung desselben Postulates auf die Dreiecke ACP resp. ABP in Rücksicht auf das oben Bewiesene.

Jetzt ist leicht zu beweisen, dass die Ebene ABC mit ACD zusammenfällt, wenn D ein Punkt der Geraden BC ist. Denn nach dem Vorigen gehört jede Gerade, die die Ecke des einen Dreiecks mit einem Punkte der gegenüberliegenden Seite verbindet der durch das andere bestimmten Ebene an. Da ebenso die Ebene ACD mit der Ebene ACE identisch ist, falls E irgend ein Punkt der Geraden CD ist, so sieht man, dass man eine Ecke des bestimmenden Dreiecks durch irgend einen andern Punkt der Ebene ersetzen kann, und durch wiederholte Anwendung dieses Schlusses ergiebt sich der 2. Satz.

Um hieraus den 3. Satz zu beweisen, bemerke man, dass die Ebene ABC ihrer Entstehung gemäss in sieben Theile zerfällt, in das Dreieck (ABC) selbst, die drei Theile (BC), (CA), (AB), die aus den Verlängerungen der Transversalen über die Seiten, und die drei Theile (A), (B), (C), die aus den Verlängerungen der Transversalen über die Ecken hinaus bestehen. Nun ist klar, dass jede Strecke, die C mit einem

Punkte P der Theile (AB), (A) oder (B) verbindet, die Gerade AB schneiden muss. Für den Theil (AB) ist dies evident. Für den Theil (A) folgt es aus dem 6. Postulate durch Betrachtung des Dreiecks BCP und entsprechend für (B). Enthält umgekehrt die Strecke CP einen Punkt E der Geraden AB, so folgt leicht, dass P einem dieser drei Theile angehört, nämlich dem Theile (AB), falls E auf der Seite AB selbst liegt, und dem Theile (A) oder (B), falls E auf der Verlängerung von AB über A oder B hinaus liegt. Liegt daher P in einem der andern vier Theile, so kann die Strecke CP keinen Punkt der Geraden AB enthalten. Da nach dem 2. Satze A, B, C irgend drei Punkte der Ebene sein können, so ist hiermit der 3. Satz bewiesen.

Wir haben uns bei den Beweisen dieser Sätze etwas länger aufgehalten, um bei denjenigen des 5. und 6. Satzes kürzer sein zu können. Denn man hat hier ganz analog zu verfahren, indem man von einem Tetraeder $ABCD$ ausgeht. Man beweist hier zuerst, dass jeder Punkt der Verbindungsstrecke einer Tetraederecke mit einem Punkte des gegenüberliegenden Dreiecks auch auf einer ebensolchen für die drei andern Ecken liegt, und dass ebenso jeder Punkt der Verbindungsstrecke von Punkten zweier gegenüberliegender Kanten des Tetraeders auf den Verbindungsstrecken der Ecken mit Punkten der gegenüberliegenden Dreiecke liegt, und umgekehrt. Dann beweist man der Reihe nach, dass alle Geraden dem Raume angehören, die 1) eine Ecke mit *irgend* einem Punkte der gegenüberliegenden Fläche verbinden, die 2) einen Punkt einer Kante selbst mit *irgend* einem Punkte der gegenüberliegenden Kante, die 3) irgend zwei Punkte zweier gegenüberliegender Kanten und die 4) irgend einen Punkt einer Kante mit irgend einem Punkte einer Seitenfläche verbinden. Hieraus folgt dann wie oben, dass das Tetraeder $ABCE$ dieselben Punkte liefert wie $ABCD$, sobald E auf einer der Kanten durch D liegt, sodass auch irgend vier Punkte eines Raumes, die nicht in einer Ebene liegen, diesen bestimmen.

Um hieraus den 5. Satz zu beweisen, bemerke man wieder, dass ein Tetraeder den Raum in $1 + 4 + 4 + 6 = 15$ Theile zerlegt, und dass jeder Punkt der Theile (ABC), (A), (B), (C), (AB), (BC) oder (CA) mit dem Punkte D eine Strecke bestimmt, auf der ein Punkt der Ebene ABC liegt.

Nunmehr kann man den 6. Satz leicht in bekannter Art*) *beweisen*, und wir wollen nur nicht unterlassen, auf die Fassung des Satzes hinzuweisen. In der gewöhnlichen Fassung: Zwei Ebenen *des* Raumes u. s. w.

---

*) Vergl. z. B. Schur, die idealen Elemente der projectiven Geometrie, diese Ann. 39, S. 115.

kann er natürlich nicht aus den bisherigen Postulaten erwiesen werden. Hierzu bedarf es vielmehr eines neuen Postulates:

9. Postulat. *Ausserhalb eines Raumes giebt es keine Punkte.*

Man sieht aber sehr wohl, dass dies Postulat einen andern Charakter hat wie die vorhergehenden. Rein begrifflich hindert natürlich nichts, das Gegentheil davon zu postuliren. Wir müssen daher dies Postulat entweder als eine reine Convention ansehen gerade so, wie wir uns zuweilen auf die Geometrie der Ebene beschränken, oder wir müssen es mit Veronese*) als ein *praktisches Postulat* bezeichnen, das aussagt, dass unser Erfahrungsraum ein solcher von drei Dimensionen sei. Statt dessen könnte man natürlich auch mit Hilbert den 5. Satz selbst als Axiom aufstellen, aber es will mir scheinen, als ob hierbei der wahre Charakter dieses Axioms nicht so deutlich hervortrete.

Bemerkt man nunmehr, dass unsre Postulate 6 und 7 mit dem Axiome II 5 von Hilbert äquivalent sind, so sieht man, dass die dortigen Axiome I 3—5 und in gewissem Sinne auch das Axiom I 6 überflüssig sind. In der That ist es ja leicht zu sehen, dass unsre übrigen Postulate eine Folge der Axiome I 1, 2, 7 und II 1—4 von Hilbert sind.

Der 5. Satz macht die Geometrie im Strahlen- oder Ebenenbündel zu einer vollkommen dualen; je zwei Strahlen bestimmen eine Ebene und je zwei Ebenen einen Strahl. Um eine entsprechende Dualität in der Ebene zu erreichen, beweisen wir zuerst nach Reyes y Prosper**) den Desargues'schen Satz im Bündel, um durch eine übersichtliche Figur diesem Beweise die Beachtung zu verschaffen, die ihm gebührt, aber nicht überall zu Theil geworden ist. Der Satz lautet bekanntlich:

6. Satz. *Gehen die Verbindungsebenen entsprechender Kanten zweier Dreikante abc und $a'b'c'$ mit derselben Spitze S durch eine Gerade g, so schneiden sich die entsprechenden Seitenflächen in derselben Ebene, und umgekehrt.* (Fig. 2, s. Seite 8.)

Zum Beweise nehmen wir auf a resp. a' die Punkte A resp. A' auf verschiedenen Seiten von g an, sodass AA' einen Punkt G von g enthält. Alsdann nehmen wir auf b' den Punkt B' so an, dass er auf der entgegengesetzten Seite von b liegt wie G, sodass die Strecke GB' einen Punkt B von b enthält. Hier können wir S ausserhalb der Ebene ABG annehmen, weil sonst die Seitenflächen SAB und $SA'B'$ zusammenfielen, in welchem Falle der Satz selbstverständlich ist. Da desshalb auch der Strahl c nicht in dieser Ebene liegt, so können wir endlich C ausserhalb dieser Ebene und auf der andern Seite von c' wie G auf c annehmen,

*) S. Veronese, Elementi di Geometria, Padova 1897, p. 112.

**) S. Reyes y Prosper, Sur les propriétés graphiques des figures centriques, diese Ann. Bd. 32, S. 157.

sodass die Strecke GC einen Punkt C' von c' enthält. Da nun AB und $A'B'$ in derselben Ebene liegen, so sind hiernach die Ebenen ABC und $A'B'C'$ von einander verschieden. Weiter aber lehrt die Betrachtung der Dreiecke GCB', ACA' und $AA'B'$, dass die Strecken BC und $B'C'$

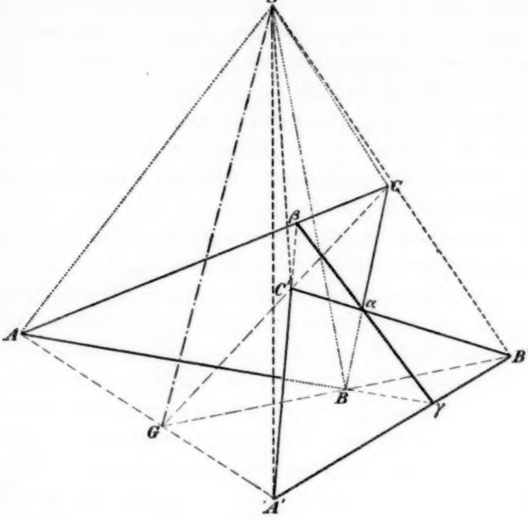


Fig. 2.

einen Punkt α gemein haben, die Gerade $A'C'$ einen Punkt β der Strecke AC enthält und die Gerade AB einen Punkt γ der Strecke $A'B'$. Da aber α, β, γ in den beiden Ebenen ABC und $A'B'C'$ liegen müssen, so liegen sie in deren Schnittgeraden, womit unser Satz bewiesen ist. Die Umkehrung beweist man indirect.

Hieraus können wir den folgenden Satz beweisen:

7. Satz. *Werden zwei Strahlenbündel S und S' so auf einander bezogen, dass jedem Strahle durch S, der eine Ebene ε trifft, der Verbindungsstrahl von S' mit diesem Schnittpunkte zugewiesen wird, so ist dadurch **jedem** Strahle von S ein Strahl von S' derart eindeutig zugewiesen und **umgekehrt**, dass je drei Strahlen einer Ebene wieder drei Strahlen einer Ebene entsprechen.*

Wir beweisen zuerst, dass allen Ebenen, die ε schneiden und denselben Strahl g durch S enthalten, Ebenen durch denselben Strahl g' von S' entsprechen, und zwar auch in dem Falle, dass g die ε nicht schneidet. Wenn nämlich drei solche Ebenen die ε in den Geraden $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ schneiden,

so mögen etwa die erreichbaren Punkte von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$ auf verschiedenen Seiten von $\mathfrak{b}$ liegen (Fig. 3). Nun wählen wir auf $\mathfrak{a}$ irgend zwei Punkte A und A_1 und verbinden sie mit irgend einem Punkte β von ε, der auf der andern Seite von $\mathfrak{c}$ liegt wie A und A_1, sodass die Strecken βA und βA_1 je einen Punkt C resp. C_1 von $\mathfrak{c}$ enthalten. Nach willkürlicher Wahl des Punktes B auf $\mathfrak{b}$ nehmen wir endlich den Punkt B_1 auf $\mathfrak{b}$ so an, dass B_1 und C_1 auf verschiedenen Seiten von BC liegen, sodass die Strecke B_1C_1 einen Punkt α der Geraden BC enthalten muss. Dann lehrt die Betrachtung des Dreiecks $A_1B_1\beta$, dass die Strecke A_1B_1 einen Punkt γ der Geraden $\alpha\beta$ enthalten muss. Da aber der Voraussetzung gemäss die Dreikante $S(ABC)$ und $S(A_1B_1C_1)$ in Beziehung auf g perspectiv liegen, so geht auch die Gerade AB durch γ.

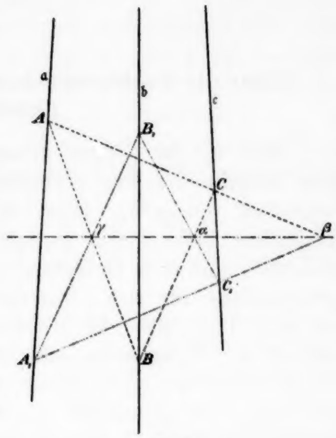


Fig. 3.

Nunmehr sind die Dreikante $S'(ABC)$ und $S'(A_1B_1C_1)$ so beschaffen, dass die Schnittlinien entsprechender Seitenflächen, nämlich $S'\alpha$, $S'\beta$, $S'\gamma$ in einer Ebene liegen, folglich gehen auch die Verbindungslinien entsprechender Kanten, nämlich $S'\mathfrak{a}$, $S'\mathfrak{b}$, $S'\mathfrak{c}$ durch denselben Strahl g'.

Die Beziehung der beiden Strahlenbündel ist also sicher eine solche, dass *jedem* Strahle von S eindeutig ein Strahl von S' entspricht, und umgekehrt, und drei Strahlen einer Ebene, die ε schneidet, wieder drei Strahlen einer Ebene entsprechen.

Handelt es sich aber um drei Strahlen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ einer Ebene, die ε nicht trifft, so wählen wir auf der Schnittlinie irgend einer Ebene durch $\mathfrak{c}$ mit ε irgend zwei Punkte A und B und setzen $SA = a$, $SB = b$ und $(\mathfrak{b}A, \mathfrak{a}B) = c$. Ebenso wählen wir auf der Schnittlinie irgend einer Ebene durch $\mathfrak{b}$ mit ε irgend zwei Punkte A_1 und C_1 und setzen $SA_1 = a_1$, $SC_1 = c_1$ und $(\mathfrak{a}C_1, \mathfrak{c}A_1) = b_1$. Alsdann schneiden sich die entsprechenden Seitenflächen der beiden Dreikante abc und $a_1b_1c_1$ in den Geraden $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ einer Ebene, sodass die Ebenen aa_1, bb_1, cc_1 durch denselben Strahl g laufen. Da aber diese drei Ebenen die ε schneiden, so liegen auch die entsprechenden Dreikante $a'b'c'$ und $a_1'b_1'c_1'$ in Beziehung auf den g entsprechenden Strahl g' perspectiv, es liegen daher, weil auch die Seitenflächen dieser Dreikante die ε schneiden, auch die $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ entsprechenden Strahlen $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ in einer Ebene.

Damit ist der 7. Satz vollständig bewiesen. Wie sich aus ihm die Theorie der idealen Elemente entwickeln und damit eine vollständige Dualität herstellen lässt, soll hier nicht von Neuem ausgeführt werden*).

§ 2.

Ueber die Congruenzaxiome und den Pascal'schen Satz für zwei Geraden.

Dass die im vorigen Paragraphen angeführten projectiven Axiome zum Beweise des Fundamentalsatzes nicht genügen, war schon früher vermuthet worden**). Dass das sogenannte Archimedische Postulat in projectiver Form hierzu genügt, hat wohl F. Klein***) zuerst scharf formulirt, und dem Verfasser†) ist es gelungen zu zeigen, dass die Congruenzaxiome für sich ohne das Postulat des Archimedes hierzu ausreichen. Dass aber die Hinzunahme entweder dieses Postulates oder sämmtlicher Congruenzaxiome auch nothwendig sei zum Beweise des Fundamentalsatzes, hat Hilbert in seinen Grundlagen††) der Geometrie bewiesen, und wir müssen dies Resultat als das wesentlichste dieser Abhandlung bezeichnen. Was die Formulirung der Congruenzaxiome betrifft, so möchten wir neben der Hilbert'schen, die im Wesentlichen mit derjenigen von Ingrami übereinstimmt, besonders auf diejenige hinweisen, die Peano in seinen Fondamenti di Geometria giebt. Sie ist besonders interessant durch die Bezugnahme auf die Gruppe der Bewegungen. Wir können die Peano'schen Postulate in freier Uebersetzung folgendermassen aussprechen:

1. *Eine Bewegung ordnet jeder Strecke und jedem Punkte in ihr eine Strecke und einen Punkt in dieser eindeutig zu*†††).

---

*) S. den Artikel des Verf. Ueber die Einführung der sogenannten idealen Elemente in die projective Geometrie, diese Ann. Bd. 36, S. 113—124, bei dessen Abfassung ihm die o. a. Note von Reyes y Prosper sowie diejenige von Pasch, Ueber die uneigentlichen Geraden und Ebenen, diese Ann. Bd. 32, S. 158 entgangen waren.

**) S. z. B. die Einl. d. ob. Artikels.

***) F. Klein, Zur ersten Vertheilung des Lobatschewskij-Preises, Kasan, 1897, S. 22.

†) F. Schur, Ueber den Fundamentalsatz der projectiven Geometrie, diese Annalen, Bd. 51, S. 401 ff.

††) Hilbert, Grundl. d. Geom., Kap. VI.

†††) Auch hier sind in der elliptischen Geometrie zunächst dieselben Einschränkungen zu machen wie auf S. 267 und die so eingeschränkten Resultate dann auf Grund der Formeln in § 4 auf den ganzen Raum zu übertragen. Wenigstens will es mir scheinen, als ob eine Formulirung der Axiome, die diese einstweilige Einschränkung vermeidet, die Axiome des ihrem Wesen entsprechenden ursprünglichen Charakters entkleiden würde. Vergl. hierzu Peano a. a. O. p. 75.

2. *Geht die Figur $ABCD\cdots$ durch eine Bewegung in $A'B'C'D'\cdots$ und eine andre in $A''B''C''D''\cdots$ über, so giebt es auch eine Bewegung, die $A'B'C'D'\cdots$ in $A''B''C''D''\cdots$ überführt.*

3. *Auch die Identität ist eine Bewegung.*

4. *Sind gegeben zwei Ebenen α und α', zwei Geraden a in α und a' in α' sowie zwei Punkte A in a und A' in a', so giebt es eine und nur eine Bewegung, die A in A', eine bestimmte Seite von a in eine solche von a' und eine bestimmte Seite von α in eine solche von α' überführt.*

5. *Die Bewegung, die den Punkt A stehen lässt, den Strahl AB in AC und die Halbebene $(AB)C$ in $(AC)B$ verwandelt, führt auch AC in AB über.*

6. *Jede Bewegung, die einen Punkt A in einen Punkt B und die Verlängerung von AB über A hinaus in diejenige über B hinaus verwandelt, führt auch B in A über.*

Indem wir im Uebrigen auf Peano verweisen, wollen wir hierzu die folgenden Bemerkungen machen. Die Postulate 2 und 3 ergeben die Sätze:

1. Satz. *Die Aufeinanderfolge zweier Bewegungen ist wieder eine Bewegung.*

2. Satz. *Die Umkehrung einer Bewegung ist wieder eine Bewegung.*

Wir betrachten weiter diejenige Bewegung $\mathfrak{U}$, welche den Punkt A und jede Seite der ihn enthaltenden Geraden a stehen lässt, dagegen die eine Seite der a enthaltenden Ebene α in die andre oder ihr Complement verwandelt, die wir *Umwendung um die Axe a* nennen. Diese Bezeichnung wird durch die folgenden Sätze gerechtfertigt:

3. Satz. *Bei der Umwendung $\mathfrak{U}$ um die Axe a bleibt jeder Punkt dieser Axe fest.*

4. Satz. *Die Umwendung um die Axe a verwandelt jede durch a begrenzte Halbebene in ihr Complement.*

Würde nämlich der einem Punkte B der Axe entsprechende Punkt $\mathfrak{U}B$ etwa ein Punkt B' der Strecke AB sein, so müsste nach dem ersten Postulate auch $\mathfrak{U}B'$ der Strecke AB' angehören. Nun ergiebt aber die zweimalige Anwendung der Umwendung $\mathfrak{U}$ nach den Postulaten 2, 3, 4 die Identität, sodass $\mathfrak{U}B' = \mathfrak{U}\mathfrak{U}B$ mit B zusammenfallen muss; folglich kann B' nicht von B verschieden sein.

Zum Beweise des 4. Satzes betrachten wir die Halbebene $(AB)D$ und den Punkt E auf der Strecke AD; dann liegt auch der Punkt $\mathfrak{U}E$ auf der Strecke $A\mathfrak{U}D$, sodass die einander entsprechenden Strecken $D\mathfrak{U}E$ und $E\mathfrak{U}D$ einen sich selbst entsprechenden Punkt F gemein haben, der nothwendig auf AB liegen muss, da $\mathfrak{U}$ nicht die Identität ist. Da F zwischen E und $\mathfrak{U}D$ liegt, so ist in der That die Halbebene $(AB)\mathfrak{U}D$ das Complement von $(AB)E$ oder $(AB)D$.

Die Umwendung $\mathfrak{U}$ wird folglich jede Gerade, die einen ausserhalb a gelegenen Punkt C mit dem entsprechenden $\mathfrak{U}C$ verbindet, umklappen. Denn ist A der Schnittpunkt von a mit $C\mathfrak{U}C$, so verwandelt $\mathfrak{U}$ die Strecke AC in $A\mathfrak{U}C$.

Wir betrachten weiter diejenige Bewegung $\mathfrak{W}$, welche den Punkt A stehen lässt, die eine Seite der Geraden a durch A in ihr Complement verwandelt und jede durch a begrenzte Seite der Ebene α ihr selbst zuordnet. Dann kann der einen Seite AD einer andern Geraden durch A jedenfalls nicht ihr Complement entsprechen. Es entspricht ihr also entweder die eine Seite einer andern Geraden oder sie selbst. Liegt daher E auf der Strecke AD, so beweist man im ersten Falle wie oben, dass die Strecken $D\mathfrak{W}E$ und $E\mathfrak{W}D$ einen sich selbst entsprechenden Punkt C gemein haben, dass also $\mathfrak{W}$ *eine Umwendung um die Axe AC ist*, was im zweiten Falle von selbst klar ist.

Diejenige Bewegung $\mathfrak{V}$ endlich, die A stehen lässt und den Strahl AB sowie die Halbebene $(AB)C$ in ihre Complemente verwandelt, führt *jeden Strahl AD der Ebene α in sein Complement über*. Da nämlich auch diese Bewegung zweimal hinter einander angewendet zur Identität führt, so entspricht die Strecke $D\mathfrak{V}D$ sich selbst, also auch ihr Schnittpunkt mit a, der aber nur A selbst sein kann, weil sonst die Seiten von a nicht vertauscht würden.

Aus der Definition der drei Bewegungen $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{W}$ ergeben sich nun unmittelbar die folgenden Gleichungen.

$$\mathfrak{U}\mathfrak{V} \equiv \mathfrak{W}, \quad \mathfrak{V}\mathfrak{W} \equiv \mathfrak{U}, \quad \mathfrak{W}\mathfrak{U} \equiv \mathfrak{V}\text{*)}.$$

Hieraus geht hervor, dass die Umwendung $\mathfrak{U}$ um die Axe $AB = a$ die Gerade AC oder die Axe der Umwendung $\mathfrak{W}$ um A umklappt und ebenso $\mathfrak{W}$ die Axe a. Stellen wir daher die Definition auf:

Definition: *AC heisst senkrecht auf AB oder $AC \perp AB$, wenn bei einer Umwendung um die Axe AB der Strahl AC in sein Complement übergeht,*

so ergiebt sich der Satz:

5. Satz. *Ist $AC \perp AB$, so ist auch $AB \perp AC$.*

Wir können daher von zwei *auf einander* senkrechten Geraden reden und den Satz aussprechen:

6. Satz. *Jede Bewegung $\mathfrak{B}$ verwandelt zwei auf einander senkrechte Geraden in ebensolche.*

Führt nämlich die Bewegung $\mathfrak{B}$ die Punkte ABC in $A'B'C'$ über, so lässt die Bewegung $\mathfrak{B}\mathfrak{U}\mathfrak{B}^{-1}$ den Strahl $A'B'$ stehen und verwandelt $A'C'$ in sein Complement.

---

*) Vergl. Peano, l. c. p. 81.

Die obigen Betrachtungen zeigen auch, dass in einem Punkte A einer Geraden innerhalb jeder a enthaltenden Ebene α eine und nur eine Senkrechte gezogen werden kann, die Axe der Umwendung $\mathfrak{W}$. Sind daher AC und $AD \perp AB$, so verwandelt die Umwendung $\mathfrak{U}$ sowohl AC als AD in ihre Complemente, folglich auch jeden Strahl durch A in der Ebene ACD vermöge einer Bewegung innerhalb dieser Ebene. Hieraus folgt der Satz:

7. Satz. *Steht AB senkrecht auf AC und AD, so steht AB auf jeder A enthaltenden Geraden der Ebene ACD senkrecht oder $AB \perp ACD$.*

Ist nunmehr auch $AC \perp AD$, so folgt aus $\mathfrak{V} \equiv \mathfrak{U}\mathfrak{W}$, dass $\mathfrak{V}$ eine Umwendung um die Axe AD ist, oder dass $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ Umwendungen um drei zu einander senkrechte Axen sind. Betrachten wir weiter diejenige Bewegung $\mathfrak{R}$, die AC in AD und die Halbebene $(AC)D$ in das Complement der Halbebene $(AD)C$ verwandelt, so führt dieselbe nach dem Obigen und nach dem 6. Satze zugleich AD in das Complement von AC über, während die Gerade AB stehen bleibt so zwar, dass der Strahl AB sich selbst entspricht. Würde nämlich AB in sein Complement verwandelt, so würde die Bewegung $\mathfrak{V}\mathfrak{R}$ die Strahlen AB, AC, AD in AB, AD, AC resp. überführen; eine solche Bewegung ist aber leicht als eine Umwendung um eine Axe in der Ebene ACD nachzuweisen, kann also den Strahl AB nicht stehen lassen. Da weiter $\mathfrak{R}\mathfrak{R} \equiv \mathfrak{U}$ ist, so folgt wie beim Beweise des 3. Satzes, dass $\mathfrak{R}$ jeden Punkt B von AB stehen lässt. Sind daher E und F in den Halbebenen $(AB)C$ und $(AB)D$ so gewählt, dass BE und $BF \perp AB$ sind, so gehen bei der Bewegung $\mathfrak{R}$ auch BE in BF und BF in das Complement von BE über. Nun giebt es nach dem 5. *Postulate* eine Bewegung $\mathfrak{M}$, die die Strahlen BE und BF sowie die Halbebenen $(BE)F$ und $(BF)E$ je in einander verwandelt, und es ist leicht zu sehen, dass $\mathfrak{M}$ eine Umwendung um eine Axe in der Ebene BEF ist. Die Bewegung $\mathfrak{M}\mathfrak{R}$ wird daher BE stehen lassen und BF in sein Complement verwandeln, woraus folgt, dass $BF \perp BE$ ist. Da hiernach sowohl AD als BF auf der Ebene ABC senkrecht stehen, so erhalten wir den wichtigen Satz:

8. Satz. *Zwei Geraden, die auf derselben Ebene senkrecht stehen, liegen in derselben Ebene.*

Hieraus folgt, dass alle Geraden, die auf derselben Ebene senkrecht stehen, durch denselben eigentlichen oder uneigentlichen Punkt, den *absoluten Pol der Ebene*, laufen. Ein specieller Fall hiervon ist der Satz der ebenen Geometrie, dass alle Geraden einer Ebene, die auf derselben Geraden senkrecht stehen, durch den absoluten Pol dieser Geraden laufen; dieser Satz ist aber eine unmittelbare Folge der Definition senkrechter Geraden und des Desargues'schen Satzes und ist vom 5. Postulate unabhängig. Hiernach entspricht bei der Umwendung einer Ebene um eine

Axe a jedem Punkte P der ihm zugeordnete vierte harmonische in Bezug auf a und den absoluten Pol von a. Da ferner nach dem 8. Satze allen Geraden b, die in einem Punkte A auf einer Geraden a senkrecht stehen, in der jedesmaligen Ebene $[b, a]$ derselbe absolute Pol B entspricht, so führt jede Umwendung um eine der Axen b einen Punkt P von a in denselben Punkt Q über, den vierten harmonischen von P in Bezug auf A uud B. Wir erhalten daher den Satz:

9. Satz. *Bei allen Umwendungen einer Geraden a um die Axen, die in einem Punkte A auf ihr senkrecht stehen, ist jedem Punkte von A derselbe Punkt zugeordnet.*

Erst dieser Satz ermöglicht den Beweis des folgenden von Peano nicht hervorgehobenen Satzes:

10. Satz. *Bei allen Bewegungen, die einen Punkt A und eine Seite einer ihn enthaltenden Geraden a festlassen, bleibt jeder Punkt dieser Geraden fest.*

Geht nämlich der auf a senkrechte Strahl AC bei einer solchen Bewegung $\mathfrak{R}$ in den ebenfalls auf a senkrechten Strahl AD über, so lässt sich $\mathfrak{R}$ zusammensetzen aus derjenigen Umwendung, welche nach dem 5. Postulate AC und AD vertauscht, und der Umwendung um die Axe AD, womit nach dem 9. Satze unsere Behauptung bewiesen ist.

Definirt man als congruent Strecken, die durch Bewegung in einander übergeführt werden können, so ist es nunmehr leicht, das Hilbert'sche Axiom IV, 1 zu beweisen, wonach jeder Strecke AB der Geraden a eine und nur eine congruente Strecke $A'B'$ auf einer bestimmten Seite *irgend* einer Geraden a' durch A', d. h. auch einer nicht mit a in derselben Ebene gelegenen entspricht. In Bezug hierauf mag bemerkt werden, dass es nicht ganz correct ist, was Hilbert a. a. O. S. 18 sagt: „Dieser Satz enthält das wichtige Resultat, dass die sämmtlichen räumlichen Thatsachen der Congruenz, d. h. der Bewegung — mit Hinzuziehung der Axiomgruppen I und II — lediglich Folgerungen aus den sechs oben aufgestellten linearen und ebenen Axiomen der Congruenz sind.“ Denn die Vergleichung zweier Strecken, die nicht in derselben Ebene liegen, ist ohne ein *räumliches* Congruenzaxiom nicht möglich. Diese Thatsache findet bei unserer Darstellung auch darin ihren Ausdruck, dass das Hilbert'sche Axiom IV, 1 innerhalb der Ebene aus den ersten vier Postulaten folgt, dass aber für seinen Beweis im Raume das 5. Postulat nöthig war.

Aus den bisherigen Postulaten ergiebt sich ohne das 6. Postulat derjenige Congruenzsatz, der meinem Beweise*) des Pascal'schen Satzes zu Grunde liegt, nämlich der Satz:

---

*) S. diese Ann. Bd. 51, S. 404. Es darf bei dieser Gelegenheit darauf hin-

11. **Satz.** *Beschränkt man sich auf die Umwendungen um die Axen a durch einen festen Punkt A innerhalb einer Ebene α, so ist die Aufeinanderfolge dreier solcher Umwendungen eine ebensolche.*

Definirt man nämlich den *Drehungssinn* im Strahlenbüschel (A) mit Hülfe der beiden Reihenfolgen von irgend drei seiner Strahlen, so folgt der Satz unmittelbar daraus, dass jede Umdrehung diesen Drehungssinn umkehrt. Hat man nun irgend eine Bewegung der Ebene α, die A stehen lässt und AB in AC verwandelt, so ist sie entweder die Umwendung, die nach dem 5. Postulate AB und AC vertauscht, oder sie setzt sich aus dieser Umwendung und einer zweiten um AC zusammen, sodass im zweiten Falle der Drehungssinn erhalten bleibt. Da nun die durch die Aufeinanderfolge von drei Umwendungen entstehende Bewegung jedenfalls den Drehungssinn umkehrt, so ist sie selbst eine Umwendung.

Es ist nun leicht auch ohne die räumlichen Congruenzaxiome hieraus eine Gruppe von räumlichen Collineationen abzuleiten, die dieselbe Eigenschaft besitzt. Wir beschränken uns hierbei auf diejenigen centralen Collineationen, die jedem Punkte P den ihm zugeordneten vierten harmonischen in Beziehung auf das Centrum und die Ebene der Collineation entsprechen lassen, die wir collineare Spiegelungen nennen können. Dann erhalten wir aus der obigen Gruppe von Umwendungen der Ebene α die gemeinte Gruppe von collinearen Spiegelungen, wenn wir die Ebenen durch eine A enthaltende und nicht in α gelegene Axe a als Collineationsebenen und den absoluten Pol ihrer Spur in α als das jedesmalige Centrum betrachten. Dann bilden die Geraden, die durch diese Spiegelungen aus einer a nicht schneidenden Geraden g und ihren Bildern in diesen Spiegelungen entstehen, die beiden Erzeugungen eines Hyperboloids, und hieraus kann wie a. a. O. der Pascal'sche Satz für zwei Geraden und aus ihm der Fundamentalsatz der projectiven Geometrie bewiesen werden

Wir heben einer Bemerkung in der Inauguraldissertation von Dehn*) gegenüber ausdrücklich hervor, dass hiernach dieser Beweis keine *räumlichen* Congruenzaxiome benutzt. Dagegen haben wir nicht das 6. Postulat, d. h. die *Umkehrbarkeit der Strecke* benutzt, sodass sich der Fundamentalsatz als von diesem Postulate unabhängig erweist. Dies Postulat kann nun allerdings auf das fünfte oder die Umkehrbarkeit des Winkels zurückgeführt werden, wenn man entweder annimmt, dass je zwei Geraden einen eigentlichen Punkt gemein haben, oder, dass das Parallelenaxiom gelte.

---

gewiesen werden, dass den Pascal'schen Satz für zwei Geraden bereits Pappus in seinen collectanea als Prop. 143 mittheilt; vergl. E. Kötter, Ueber die Entwickelung der synthetischen Geometrie, Ber. d. deutschen Math. Ver., Bd. 5, p. 14.

*) Dehn, Die Legendre'schen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck, In. diss. Göttingen 1900, S. 22.

Denn errichten wir die Senkrechten in den Endpunkten der Strecke AB auf dieser, so schneiden sich diese im ersten Falle in einem Punkte C, und diejenige Umwendung, die AC mit BC vertauscht, vertauscht auch A und B als Fusspunkte der Lothe von dem Schnittpunkte D der Umwendungsaxe mit AB auf AC und BC; da nämlich D nicht der absolute Pol einer der Geraden AC (oder BC) sein kann, weil sonst A (oder B) und folglich auch B (oder A) der absolute Pol von DC wäre, so muss dem einzigen Lothe von D auf AC auch das einzige Loth von D auf BC entsprechen. Gilt das Parallelenaxiom, so ist es leicht einen Punkt E zu finden, der von den beiden Lothen, die nach derselben Seite der Geraden AB gezogen sein mögen, gleichen Abstand hat, nämlich den Schnittpunkt der Halbirungslinien der beiden Winkel (Umwendungsaxen), die AB mit den beiden Lothen bildet. Denn nach dem Parallelenaxiom muss jede dieser Halbirungslinien das andre Loth schneiden, also auch diese sich unter einander und zwar in einem Punkte, der zwischen den beiden Lothen liegt. Sind EF und EG die beiden gleichen Abstände des Punktes E von den Lothen, so führt die Umwendung, die EF und EG vertauscht, auch A in B über.

Hieraus geht hervor, dass die Forderung der Umkehrbarkeit der Strecke schon in Rücksicht auf das Parallelenaxiom in dem Hilbert'schen Axiomensysteme überflüssig ist. Sie ist es aber auch zusammen mit der Forderung der Umkehrbarkeit des Winkels in Rücksicht auf das Archimedische Axiom, wie schon Peano a. a. O.*) gezeigt hat.

Ob einerseits das 6. Postulat auch ohne eine Hypothese über das Schneiden der Geraden aus den übrigen abgeleitet werden kann, oder andrerseits überhaupt die Postulate 5 und 6 von den übrigen unabhängig sind, ist noch unentschieden. Ebenso wenig scheint mir entschieden, ob der Pascal'sche Satz ohne das Parallelenaxiom aus ebenen Axiomen allein bewiesen werden kann. Indessen können wir hierzu die folgenden Bemerkungen machen. Nimmt man wieder an, dass je zwei Geraden der Ebene sich schneiden, so kann der erste Beweis von Hilbert auf Grund des Satzes vom Höhenschnittpunkt des Dreiecks so modificirt werden, dass er vom Parallelenaxiom unabhängig wird, wenn man unter parallelen Geraden solche versteht, die auf derselben den Schnittpunkt der beiden festen Geraden enthaltenden Geraden senkrecht stehen. Im Allgemeinen dürfte der Beweis kaum möglich sein ohne den Begriff der idealen Elemente, und ob dieser Begriff aus den ebenen Axiomen allein ohne das Parallelenaxiom entwickelt werden kann, scheint zweifelhaft.

Wir haben zwar gezeigt, dass das 6. Postulat oder die Umkehrbarkeit

*) a. a. O. p. 88 u. 90.

der Strecke für den Aufbau der projectiven Geometrie entbehrlich sei. Diese Umkehrbarkeit ist aber nicht entbehrlich für den Beweis des Satzes, dass *die Beziehung zwischen zwei congruenten Strecken eine projective* sei, ein Satz, der die Grundlage des Ueberganges von der reinen projectiven Geometrie zur Metrik bildet. Das 6. Postulat vorausgesetzt, folgt der Satz einfach daraus, dass man (innerhalb der Ebene) jede Strecke in jede ihr congruente durch die Aufeinanderfolge zweier Umwendungen überführen kann, von denen die erste die beiden Anfangspunkte zur Deckung bringt und die zweite auch die Endpunkte.

§ 3.

Ueber das Rechnen mit projectiven Strecken.

Wir denken uns auf Grund des Desargues'schen Satzes die Eigenschaften der harmonischen Elemente sowie mittelst des Fundamentalsatzes der projectiven Geometrie aus der Figur in bekannter Weise die Grundformel: (Fig. 4)

$$(ABCD) \barwedge (TUVD) \barwedge (SWVC) \barwedge (BADC)$$

und daraus den Hauptsatz der Lehre von den Involutionen entwickelt:

1. Satz. *Ist eine Gerade so projectiv auf sich selbst bezogen, dass dem Bilde eines Punktes umgekehrt das Original als Bild zugeordnet ist, so gilt dasselbe für jeden Punkt, oder die Projectivität ist involutorisch.*

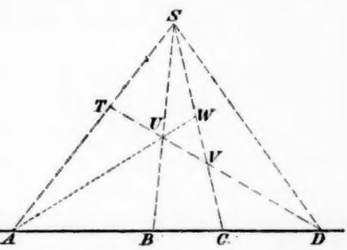


Fig. 4.

Nun definiren wir eine *projective Strecke* (OA) durch vier Punkte einer Geraden, den Unendlichkeitspunkt U, den Nullpunkt O, den Einheitspunkt E und den Endpunkt A oder symbolisch durch:

$$a = (OA) = (UOEA),$$

und die Bedeutung dieses Symbols wird durch Festsetzung der Rechnungsregeln, denen es unterworfen ist, zu erklären sein. Zunächst betrachten wir zwei projective Strecken (OA) und $(O'A')$ einer und derselben oder verschiedener Geraden als einander *gleich*, wenn diejenige Projectivität, welche U, O, E in U', O', E' überführt, dem Punkte A den Punkt A' zuordnet, oder symbolisch, wenn:

$$(UOEA) \barwedge (U'O'E'A').$$

Jede Gleichung unserer Streckenrechnung wird also der symbolische Ausdruck einer gewissen Projectivität sein. Hiernach sind jedenfalls *alle*

möglichen projectiven Strecken denjenigen einer festen Geraden in Bezug auf drei feste Punkte U, O, E derselben gleich.

Wollen wir nun die Summe zweier solcher Strecken definiren, so bemerken wir, dass in der Euklidischen Geometrie das Addiren oder Antragen von Strecken durch Verschieben der Geraden in sich oder eine Projectivität geschieht, bei der nur der Unendlichkeitspunkt sich selbst entspricht. Wir wollen uns daher zuerst mit solchen besonderen Projectivitäten beschäftigen, die wir *Prospectivitäten**) nennen wollen. *Eine*

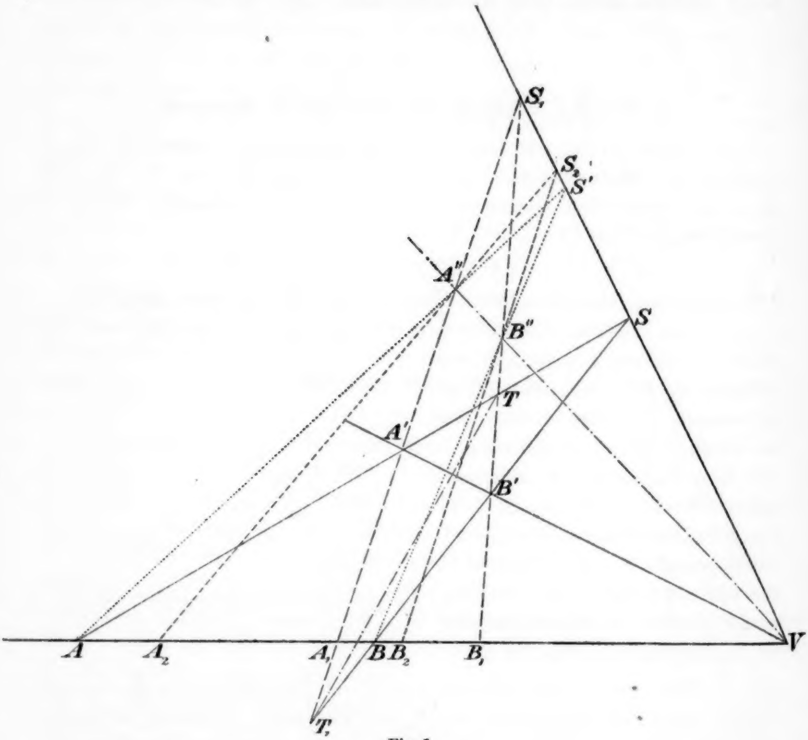


Fig. 5.

Prospectivität ist darnach eine Projectivität einer Geraden in sich, bei der es einen und nur einen sich selbst entsprechenden Punkt U giebt. Dann ist leicht zu beweisen:

2. Satz. *Eine Prospectivität ist vollkommen bestimmt durch das Doppelelement U und das Bild A_1 irgend eines Punktes A.* (Fig. 5.)

*) Von Pasch a. a. O. p. 121 Aequivalenz genannt.

Ist nämlich B_1 das Bild eines andern Punktes B, und projiciren wir A, B von irgend einem Punkte S aus auf eine U enthaltende Gerade nach A', B', so müssen sich A_1A' und B_1B' in einem Punkte S_1 auf US schneiden, weil sonst SS_1 die feste Gerade in einem von U verschiedenen Doppelelemente der Prospectivität schneiden würde.

Setzen wir

$$(AA', B'B_1) = T \quad \text{und} \quad (BB', A'A_1) = T_1,$$

so folgt aus

$$(UAA_1B) \barwedge (S_1A'A_1T_1) \barwedge (SB'BT_1) \barwedge (UB_1BA_1)$$

der folgende Satz:

3. Satz. *Entsprechen in einer Prospectivität mit dem Doppelelemente U den Punkten A, B die Punkte A_1, B_1, so sind U, U; A, B_1 und A_1, B Paare einer involutorischen Projectivität.*

Aus dem Umstande, dass A_1, B sowohl wie A, B_1 harmonisch getrennt sind durch U und den Schnittpunkt von TT_1 mit der festen Geraden, kann zugleich eine vom Fundamentalsatze unabhängige Definition der Prospectivität abgeleitet werden.

Aus der Figur folgt weiter der Satz:

4. Satz. *Die Aufeinanderfolge zweier Prospectivitäten mit dem Doppelelemente U ist eine ebensolche.*

Es sind nämlich die Dreiecke $A'A''A_2$ und $B'B''B_2$ perspectiv in Beziehung auf das Centrum U, sodass sich auch A_2A' und B_2B' in S' auf S_1S_2 schneiden.

Nunmehr werden wir zu der folgenden Definition der Addition zweier projectiver Strecken geführt:

Definition: *Eine Strecke (OC) heisst die Summe der Strecken (OA) und (OB) oder $(OC) = (OA) + (OB)$, wenn in einer Prospectivität mit dem Doppelelemente U den Punkten O, A die Punkte B, C entsprechen.*

Da nach dem 3. Satze U, U; O, C und A, B Punktepaare einer involutorischen Projectivität sind, so sind in der That A und B in der Definition vertauschbar, es ist:

$$(OC) = (OA) + (OB) = (OB) + (OC),$$

oder es gilt *das commutative Gesetz der Addition.*

Um auch das *associative Gesetz* als gültig nachzuweisen, setzen wir:

$$(OA) + (OB) = (OC_1) \quad \text{und} \quad (OB) + (OC) = (OA_1).$$

Dann ist der Definition gemäss UAC_1 prosp. UOB prosp. UCA_1, also auch nach dem 4. Satze UAC_1 prosp. UCA_1. Nach dem 3. Satze sind daher A, A_1; C, C_1 und U, U Punktepaare einer involutorischen Projectivität. Ist also in dieser dem Punkte O der Punkt S zugeordnet, so ist:

$$(OA) + (OA_1) = (OS) = (OC) + (OC_1), \text{ w. z. b. w.}$$

Aus der Definition ergiebt sich, dass:

$$(OO) = (UOEO)$$

eine Strecke ist, die zu jeder andern addirt diese nicht ändert, oder:

$$(OA) + (OO) = (OA);$$

wir werden desshalb $(UOEO)$ die *Nullstrecke* nennen und sie mit 0 bezeichnen. Zwei Strecken, deren Summe der Nullstrecke gleich ist, werden *entgegengesetzt gleich* genannt oder in Zeichen:

$$(UOEA) = -(UOEA_1),$$

wenn A und A_1 durch U und O harmonisch getrennt sind.

Wollen wir die Multiplication beliebiger Strecken definiren, so müssen wir wie in der Arithmetik von der Vervielfältigung einer Strecke oder der Addition gleicher Strecken ausgehen. Ist nun einerseits

$$(OA) + (OA) = (OA_2), \quad (OA_2) + (OA) = (OA_3) \text{ u. s. w.},$$

und andrerseits:

$$(OE) + (OE) = (OE_2), \quad (OE_2) + (OE) = (OE_3) \text{ u. s. w.},$$

so sind sowohl O und A_2 durch A und U, A und A_3 durch A_2 und U u. s. w. als auch O und E_2 durch E und U, E und E_3 durch E_2 und E u. s. w. harmonisch getrennt; denn es ist UOA prosp. UAA_2 prosp. UA_2A_3 u. s. w. Es ist daher für jede ganze Zahl n:*)

$$(UOEE_n) \barwedge (UOAA_n).$$

Betrachtet man daher die Strecke (OE_n) als Repräsentanten der Zahl n, so kann man $(OA_n) = (OA) \cdot (OE_n)$ setzen und wird nun auf folgende allgemeine Definition der Multiplication geführt:

Definition: *Eine Strecke (OC) heisst das Product der Strecke (OB) in die Strecke (OA) oder:*

$$(OA) \cdot (OB) = (OC)$$

wenn $(UOEB) \barwedge (UOAC)$, oder in Zeichen:

$$(UOEA) \cdot (UOAC) = (UOEC).$$

Aus $(UOEB) \barwedge (UOAC) \barwedge (OUCA)$ folgt auf Grund des 1. Satzes

$$(UOEA) \barwedge (OUCB) \barwedge (UOBC) \text{ oder } (OC) = (OB) \cdot (OA),$$

d. h. das *commutative Gesetz der Multiplication.*

Um das *associative Gesetz* zu beweisen, setzen wir:

$$(OA) \cdot (OB) = (OC_1) \quad \text{und} \quad (OB) \cdot (OC) = (OA_1),$$

sodass

$$(UOEB) = (UOAC_1) \quad \text{und} \quad (UOEC) = (UOBA_1)$$

---

*) Wir verzichten hier auf den leichten Beweis dieser Behauptung, da es sich an dieser Stelle nur um vorbereitende Betrachtungen handelt.

ist. Es ist daher:

$$\{(OA)\cdot(OB)\}\cdot(OC)=(OP),$$

wenn $(UOEC)=(UOC_1P)$ ist. Hieraus folgt:

$$(OA)\cdot\{(OB)\cdot(OC)\}=(UOEA)\cdot\{(UOAC_1)\cdot(UOC_1P)\}$$
$$=(UOEA)\cdot(UOAP)=(UOEP),\text{ w. z. b. w.}$$

Um endlich das *distributive Gesetz* nachzuweisen, setzen wir:

$$(OA)\cdot(OB)=(OB_1)\quad\text{und}\quad(OA)\cdot(OC)=(OC_1),$$

sodass

$$(UOEB)=(UOAB_1)\quad\text{und}\quad(UOEC)=(UOAC_1)$$

ist. Setzen wir daher:

$$(OA)\cdot(OB)+(OA)\cdot(OC)=(OB_1)+(OC_1)=(OS),$$

so ist auch

$$(UOAB_1)+(UOAC_1)=(UOAS);$$

denn die Bedingung für beide Gleichungen ist die, dass A_1, B_1; O, S und U, U Paare einer involutorischen Projectivität sind. Es ergiebt sich daher auf der andern Seite:

$$(OA)\cdot\{(OB)+(OC)\}=(OA)\cdot\{(UOAB_1)+(UOAC_1)\}$$
$$=(UOEA)\cdot(UOAS)=(UOES),\text{ w. z. b. w.*)}$$

Aus der Definition geht nun hervor, dass die Strecke (OE) der *Einheit* entspricht, weil:

$$(OA)\cdot(OE)=(OA)$$

ist. Ebenso folgt:

$$(OA)\cdot(OO)=(OO)=0.$$

Die Umkehrung der Multiplication oder die *Division* können wir in die Formel zusammenfassen:

(I) $$(UOEC):(UOEA)=(UOAC),$$

woraus hervorgeht, dass *eine Strecke den reciproken Werth annimmt, wenn*

*) Hier ist zu bemerken, dass beim Beweise des associativen und des distributiven Gesetzes neben Prospectivitäten nur Projectivitäten mit den sich selbst entsprechenden Elementen U und O benutzt wurden. Denkt man sich diese auf eine bestimmte Art hergestellt, also z. B. als Projectivitäten zweiter Stufe mit einer festen Projectionsgeraden durch O und je zwei Centren, die auf einer festen Geraden durch U liegen, so bedarf man des Fundamentalsatzes der projectiven Geometrie nicht. Man kann dann auch die zweite Form des distributiven Gesetzes:

$$\{(OA)+(OB)\}\cdot(OC)=(OA)\cdot(OC)+(OB)\cdot(OC)$$

durch den Satz des Desargues beweisen (s. Hilbert a. a. O. S. 62), während nach Hilbert das commutative Gesetz nicht ohne den Fundamentalsatz oder den Pascal'schen Satz bewiesen werden kann.

man die beiden letzten Elemente mit einander vertauscht. Da überhaupt die Endpunkte von je zwei Streken, deren Product einer Strecke (OC) gleich ist, einander in einer involutorischen Projectivität zugeordnet sind, die durch die Paare U, O und E, C bestimmt ist $((UOEB) \barwedge (OUCA))$, so sind auch (OO) und (OU) reciproke Strecken, oder *die Division durch* (OO) liefert das Resultat (OU).

Um irgend eine projective Strecke $(ABCD)$ unserer Geraden durch die Strecken $(OA) = (UOEA)$ u. s. w. auszudrücken, gehen wir von der involutorischen Projectivität aus, deren Paare U, U; O, C; A, A_1 und B, B_1 sind. Dann ist nach der Definition der Addition:

$$(OC) - (OA) = (UOEA_1), \quad (OC) - (OB) = (UOEB_1),$$

also:

$$\text{(II)} \qquad \frac{(OC)-(OB)}{(OC)-(OA)} = \frac{(UOEB_1)}{(UOEA_1)} = (UOA_1B_1) = (UCAB).$$

Nun ist doch:

$$(ABCD) = \frac{(ABUD)}{(ABUC)} = \frac{(UDAB)}{(UCAB)},$$

also:

$$\text{(III)} \qquad (ABCD) = \frac{(OD)-(OB)}{(OD)-(OA)} : \frac{(OC)-(OB)}{(OC)-(OA)}$$
$$= \frac{(OC)-(OA)}{(OD)-(OA)} : \frac{(OC)-(OB)}{(OD)-(OB)}.$$

§ 4.

Die Grundformeln der analytischen nichteuklidischen Geometrie.

Wir sahen in § 2 S. 277, dass in der Ebene jeder Geraden a ein *absoluter Pol* zukommt als Schnittpunkt aller auf a senkrechten Geraden der Ebene, gewissermassen das Centrum der Spiegelung an a. Weiter ergiebt sich, dass die absoluten Pole aller Geraden durch einen festen Punkt A auf einer Geraden liegen, der *absoluten Polare* von A, nämlich der Axe der Spiegelung an A (Bewegung $\mathfrak{B}$ auf S. 276). Da ferner diejenige Zuordnung, welche jeder Geraden durch A die auf ihr senkrechte Gerade durch A entsprechen lässt, als Drehung um einen rechten Winkel (Aufeinanderfolge zweier Umwendungen) eine Projectivität und zwar eine involutorische ist, so ist auch die Zuordnung zwischen den Geraden durch A und ihren absoluten Polen eine Projectivität. Dasselbe gilt desshalb auch von der Zuordnung zwischen den Punkten einer Geraden a und ihren absoluten Polaren. Denn diese entstehen auch als Verbindungslinien des absoluten Poles von a mit den absoluten Polen der Strahlen durch irgend einen Punkt S, die die Punkte der Geraden von a aus projiciren.

Ordnen wir also jedem Punkte A von a den Schnittpunkt A' von a mit der absoluten Polare von a zu, so ist diese Zuordnung jedenfalls eine Projectivität. Sie ist aber auch involutorisch; denn da A' als Schnittpunkt von a mit der absoluten Polare von A der absolute Pol der auf a in A senkrechten Geraden b ist, so steht auch SA' auf b senkrecht, die Verbindungslinie des absoluten Poles von SA' mit dem von a ist folglich b und geht durch a. Somit haben wir auf jeder Geraden eine *absolute Involution**). Je zwei *conjugirte Punkte* A und A' dieser Involution sind offenbar harmonisch getrennt durch je zwei Punkte, die Spiegelbilder von einander in Beziehung auf a sind. Geht daher durch eine Bewegung die Gerade a in b über, so geht der Entstehung gemäss auch die absolute Involution von a in die von b über.

Um nunmehr zu einer nichteuklidischen analytischen Geometrie zu gelangen, gehen wir von zwei zu einander senkrechten Axen OX und OY aus und nehmen auf diesen beiden die zu O conjugirten Punkte U und V als Unendlichkeitspunkte und als Einheitspunkte zwei solche Punkte E und F an, dass $\overline{OE} \cong \overline{OF}$. Dann ist, falls A und B je ein Punkt von OX resp. OY ist, jedesmal, wenn $(OA) = (OB)$ auch $\overline{OA} \cong \overline{OB}$; denn die Umwendung, die OE in OF überführt, verwandelt hiernach auch A in B.

Wir bemerken nun zuvörderst, dass, wenn Q und Q' sowohl als A und A' conjugirte Punkte von OX sind,

$$(UOAQ) = (OUAQ') = (UOQ'A')$$

sein muss, oder nach der Grundformel für die Division:

$$(OQ):(OA) = (OA'):(OQ'),$$

d. h.

$$\text{(I)} \qquad (OQ)\cdot(OQ') = (OA)\cdot(OA') = (UOEK) = \mathfrak{K},$$

wo $\mathfrak{K}$ eine constante projective Strecke ist, die nach unsern Festsetzungen denselben Werth für die Axe OY haben muss. Diese Strecke kann sowohl positiv als negativ sein; sie ist unendlich oder $(OQ)\cdot(OQ') = (UOEU)$ in der euklidischen Geometrie, falls jedem Punkte von OX der Punkt U conjugirt ist.

Sind nunmehr Q und R die Fusspunkte der Lothe von irgend einem Punkte P auf OX und OY, so heissen $x = (OQ)$ und $y = (OR)$ die Coordinaten des Punktes P. Wir fragen dann zuerst nach der Beziehung zwischen den Coordinaten x, y; x_1, y_1; x_2, y_2 dreier Punkte P, P_1, P_2 einer Geraden. Schneidet die Gerade UV unsre Gerade in W, so ist:

*) Vergl. F. Klein, Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie, diese Ann. Bd. 4, p. 573 ff. u. Pasch, a. a. O. p. 155 ff.

$$(WPP_2P_1) = (UQQ_2Q_1) = (VRR_2R_1) = \lambda$$

oder nach Formel (II) des vorigen Paragraphen:

$$\text{(II)} \qquad \lambda = \frac{x - x_1}{x - x_2} = \frac{y - y_1}{y - y_2},$$

d. h.

$$\text{(III)} \qquad x = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda}, \quad y = \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda}.$$

Wollen wir weiter die Bedingung dafür aufstellen, dass die beiden Punkte P_1 und P_2 conjugirt sind, so bemerken wir, dass die absolute Polare von P_1 oder $Q_1'R_1'$ durch P_2 laufen muss, woraus sich nach Formel (I) und (II) ergiebt:

$$\left(x_2 - \frac{\mathfrak{K}}{x_1}\right) : x_2 = y_2 : \left(y_2 - \frac{\mathfrak{K}}{y_1}\right)$$

oder:

$$\text{(IV)} \qquad x_1x_2 + y_1y_2 = \mathfrak{K};$$

dass diese Formel auch für die Punkte der beiden Axen richtig bleibt, ergiebt sich direct aus (I).

Wollen wir nun die projective Strecke $s = (P_1P_2)$ durch die Coordinaten ihrer Endpunkte ausdrücken, so ist dies natürlich ohne gewisse Festsetzungen nicht möglich. Wir müssen hierbei von dem Falle ausgehen, dass einer der beiden Punkte etwa P_1 ein *eigentlicher* Punkt sei. Dann denken wir uns P_1 als den Nullpunkt, den zu P_1 auf P_1P_2 conjugirten Punkt P_1' als den Unendlichkeitspunkt und einen Punkt T als Einheitspunkt, für den $\overline{P_1T} \cong \overline{OE}$, so zwar, dass P_2 und T auf derselben Seite von P_1 liegen, und setzen $s = (P_1P_2) = (P_1'P_1TP_2) = (UOES)$. Ist daher S' der zu S conjugirte Punkt auf OX, so ist $\overline{P_1P_2} \cong \overline{OS}$ und:

$$(SOUS') = (P_2P_1P_1'P_2') = \frac{(WP_2'P_2P_1)}{(WP_1'P_2P_1)} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1},$$

wo nach (IV):

$$x_1^2 + y_1^2 - \mathfrak{K} = \lambda_1(x_1x_2 + y_1y_2 - \mathfrak{K}),$$

$$x_1x_2 + y_1y_2 - \mathfrak{K} = \lambda_2(x_2^2 + y_2^2 - \mathfrak{K}).$$

Da nun:

$$(SOUS') = (US'SO) = \frac{(OS')}{(OS') - (OS)} = \frac{\mathfrak{K}}{\mathfrak{K} - s^2},$$

so folgt:

$$\frac{\mathfrak{K}}{\mathfrak{K} - s^2} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2 - \mathfrak{K})^2}{(x_1^2 + y_1^2 - \mathfrak{K})(x_2^2 + y_2^2 - \mathfrak{K})}$$

oder:

$$\text{(V)} \qquad (P_1P_2)^2 = \frac{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - \mathfrak{k}(x_1y_2 - x_2y_1)^2}{\{1 - \mathfrak{k}(x_1x_2 + y_1y_2)\}^2},$$

wo $1 : \mathfrak{K} = \mathfrak{k}$ gesetzt wurde. Man sieht, wie diese Formel für $\mathfrak{k} = 0$ in

die gewöhnliche übergeht, doch gilt die obige Ableitung nicht für diesen Fall. Dieser Ausdruck, der seiner Entstehung nach sich nicht ändern kann, wenn man P_1 und P_2 mit P_1' und P_2' vertauscht, ist hiernach stets positiv, wenn die Gerade P_1P_2 überhaupt eigentliche Punkte enthält; es ist für uns unwichtig, auf den directen Beweis dieser Behauptung einzugehen.

Aus Formel (V) ergeben sich die folgenden besonderen:

$$(1)\qquad (OP)^2 = x^2 + y^2,$$

$$(2)\qquad (QP)^2 = \frac{y^2}{1-\mathfrak{k}x^2},\quad (RP)^2 = \frac{x^2}{1-\mathfrak{k}y^2}.$$

Diese Formeln lehren zugleich, dass der Ausdruck $\sqrt{1-\mathfrak{k}x^2}$ stets als die projective Strecke $(OR):(QP)$ construirbar ist, sobald Q ein eigentlicher Punkt ist. Im Besonderen könnte auch die projective Strecke $\mathfrak{k}$ selbst mit Hülfe der Figur $OQPR$ construirt werden.

Wir stellen nunmehr die weitere Definition auf:

Unter dem Cosinus resp. Sinus eines Winkels $\varphi = \sphericalangle XOP$ versteht man die Abscisse resp. Ordinate des Punktes P mit dem Radiusvector $(OP) = 1$.

Dann besitzen die so definirten trigonometrischen Functionen genau die Eigenschaften derjenigen in der euklidischen Geometrie. Es wird nur darauf ankommen, dies von dem Additionstheorem zu beweisen. Wir betrachten (Fig. 6) hierzu die Winkel

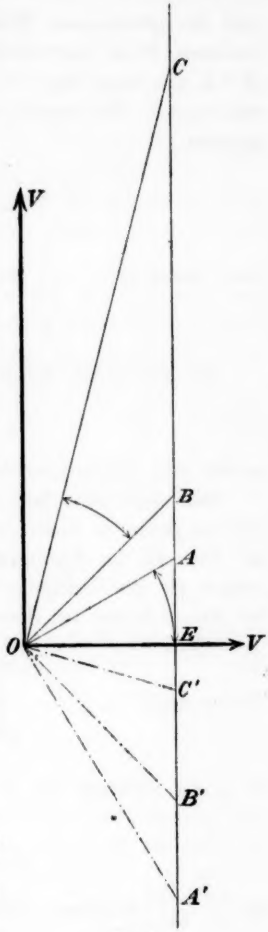


Fig. 6.

$$\alpha = \sphericalangle EOA,\quad \beta = \sphericalangle EOB$$

und

$$\gamma = \alpha + \beta = \sphericalangle EOC,$$

wo A, B, C auf dem Lothe in E auf OE liegen mögen. Sind dann A', B', C' die Schnittpunkte der Lothe in O auf OA, OB, OC mit EA, so findet die Bedingung $\gamma = \alpha + \beta$ offenbar ihren Ausdruck in der Gleichung:

$$(VEB'B) = (A'AC'C).$$

Bezeichnen wir nun die Ordinaten der Punkte A, B u. s. w. mit a, b u. s. w.,

so besteht zwischen ihnen, weil E, V; A, A'; u. s. w. Punktepaare einer involutorischen Projectivität sind, die Gleichung:

$$a \cdot a' = b \cdot b' = c \cdot c',$$

und der gemeinsame Werth dieser Producte ist -1, wie aus der besonderen Wahl hervorgeht, dass OA die Halbirungslinie des Winkels XOY ist; denn dann ist F der Fusspunkt des Lothes von A auf OY, also $a = 1$. Es ergiebt sich daher aus Formel (III) des vorigen Paragraphen:

$$-b^2 = \frac{-\frac{1}{c} + \frac{1}{a}}{c + \frac{1}{a}} : \frac{-\frac{1}{c} - a}{c - a} = -\left(\frac{c-a}{1+ac}\right)^2,$$

oder, damit für $a = 0$ auch $b = c$ resultire:

$$b = \frac{c-a}{1+ac} \quad \text{und} \quad c = \frac{a+b}{1-ab}.$$

Bezeichnen wir daher $\sin\varphi : \cos\varphi$ mit $\operatorname{tg}\varphi$, so folgt:

(VI) $$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta},$$

woraus sich die übrigen Additionstheoreme leicht ergeben.

Man sieht nun, dass die Formeln für die Drehung des Coordinatensystems genau so lauten wie in der gewöhnlichen Geometrie. Was aber die Formeln der *Coordinatenverschiebung* betrifft, so geben wir nur diejenigen für die Verlegung des Anfangspunktes nach einem Punkte O' auf der Axe OX mit der Abscisse a. Zunächst ergiebt sich aus (V):

(3) $$x' = (O'Q) = \frac{x-a}{1-\mathfrak{k}ax}.$$

Weiter folgt:

$$y' = (Q'R') = \frac{\eta}{\sqrt{1-\mathfrak{k}a^2}},$$

wo η, die Ordinate von R' im alten Systeme sich aus den Formeln:

$$\xi = \frac{x - \lambda\frac{\mathfrak{k}}{a}}{1-\lambda}, \quad \eta = \frac{y}{1-\lambda}$$

als $\frac{y(1-\mathfrak{k}a^2)}{1-\mathfrak{k}ax}$ bestimmt, woraus folgt:

(4) $$y' = \frac{y\sqrt{1-\mathfrak{k}a^2}}{1-\mathfrak{k}ax}.$$

Betrachten wir nunmehr das rechtwinklige Dreieck OQP, wo $(OP) = 1$ sein mag, so ist:

$$\operatorname{tg}\varphi = y : x = \eta\sqrt{1-\mathfrak{k}x^2} : x,$$

falls $(QP) = \eta$ gesetzt wird. Es ist daher:

$$\operatorname{tg}(QPO) = \operatorname{tg}\psi = \frac{x \cdot \sqrt{1 - \mathfrak{k}\eta^2}}{\eta} = \frac{x\sqrt{1-\mathfrak{k}}}{y}.$$

Hieraus folgt:

$$\operatorname{tg}(\varphi + \psi) = \frac{y^2 + x^2\sqrt{1-\mathfrak{k}}}{xy(1-\sqrt{1-\mathfrak{k}})}. \tag{5}$$

Diese Formel lehrt, dass $\operatorname{tg}(\varphi + \psi)$ für ein positives $\mathfrak{k}$ stets positiv, für ein negatives hingegen negativ ist, dass also $\varphi + \psi$ für ein positives $\mathfrak{k}$ stets $< R$ und für ein negatives $\mathfrak{k}$ stets $> R$ ist. Somit ist unabhängig vom Archimedischen Postulate der Legendre'sche Satz bewiesen:*)

Satz von Legendre. *Je nachdem die Summe der Winkel in irgend einem Dreiecke grösser, gleich oder kleiner als zwei Rechte ist, gilt dasselbe für jedes Dreieck.*

Die Formeln für die Drehung und Verschiebung gestatten nun auch leicht den Beweis der Dehn'schen Sätze, wobei die allgemeine Bemerkung gilt, dass laut der geometrischen Bedeutung unserer Streckenrechnung ein Punkt mit Coordinaten, die durch Functionen beliebig hohen Grades von t dargestellt sind, als Schnittpunkt eigentlicher Geraden dargestellt werden kann.

Unsre trigonometrischen Formeln gestatten auch leicht die *Grundformeln der Dreieckslehre* anzugeben, und zwar bei von selbst klarer Bezeichnung in der Form:

$$\frac{a}{\sqrt{1-\mathfrak{k}a^2}} \cdot \sin\beta = \frac{b}{\sqrt{1-\mathfrak{k}b^2}} \cdot \sin\alpha \tag{5}$$

und:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\mathfrak{k}c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\mathfrak{k}a^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\mathfrak{k}b^2}} - \frac{a}{\sqrt{1-\mathfrak{k}a^2}} \cdot \frac{b}{\sqrt{1-\mathfrak{k}b^2}} \cos\gamma. \tag{6}$$

Ist hier $\mathfrak{k}$ negativ, so kann man:

$$\frac{\sqrt{-\mathfrak{k}}\,a}{\sqrt{1-\mathfrak{k}a^2}} = \sin\mathfrak{a}, \qquad \frac{1}{\sqrt{1-\mathfrak{k}a^2}} = \cos\mathfrak{a}$$

setzen und findet rein formal, dass $\mathfrak{a}$ den Winkel der Lothe in den Endpunkten der Seite a auf dieser bedeutet. Ebenso kann man bei positivem $\mathfrak{k}$ rein formal:

$$\frac{1-\sqrt{\mathfrak{k}}\,a}{1+\sqrt{\mathfrak{k}}\,a} = \mathfrak{e}^{\overline{OA}}$$

setzen und findet dann, dass:

$$\mathfrak{e}^{\overline{OA} + \overline{OB}} = \mathfrak{e}^{\overline{OA}} \cdot \mathfrak{e}^{\overline{OB}}$$

ist, wenn die Addition der Strecken in gewöhnlichem Sinne verstanden wird.

*) S. Dehn, a. a. O. p. 29, auch Pasch a. a. O. p. 164.

Auch die *Lobatscheffskij'sche Construction der Parallelen**) lässt sich leicht als richtig nachweisen. Als Parallelen durch O zur Geraden RP betrachten wir in bekannter Weise die Verbindungslinien von O mit den Schnittpunkten von RP mit dem Fundamentalkreise $x^2 + y^2 = \mathfrak{K}$, sodass ihre Amplituden λ durch:

$$\operatorname{tg}^2 \lambda = \frac{\mathfrak{k} y^2}{1 - \mathfrak{k} y^2}$$

bestimmt sind. Eine solche Parallele schneidet daher QP in dem Punkte S mit den Coordinaten x, $xy\sqrt{\mathfrak{k}} : \sqrt{1 - \mathfrak{k} y^2}$, dessen Entfernung (OS) vom Anfangspunkte

$$(OS) = \frac{\sqrt{x^2(1-\mathfrak{k}y^2) + x^2 y^2 \mathfrak{k}}}{\sqrt{1-\mathfrak{k}y^2}} = \frac{x}{\sqrt{1-\mathfrak{k}y^2}} = (RP)$$

ist. Hiermit ist die Lobatscheffskij'sche Construction ohne das Archimedische Postulat bewiesen, aber man bedarf zu ihrer Ausführung eines anderen Postulats, nämlich des folgenden: Der Kreis schneidet jede Gerade, deren Abstand vom Mittelpunkte kleiner ist als der Radius**).

Karlsruhe, im November 1900.

---

*) S. z. B. Engel, Zur nichteuklidischen Geometrie, Leipz. Ber. 1898, p. 181 ff.

**) S. Veronese, a. a. O. p. 85 u. Ingrami, a. a. O. p. 128.

Ueber den Fundamentalsatz der projectiven Geometrie.

Von

L. Balser in Darmstadt.

I. Einleitung.

Herr Hilbert giebt in seiner Abhandlung: „Grundlagen der Geometrie“*) ein „einfaches und vollständiges System von einander unabhängiger Axiome“; er unterscheidet fünf Gruppen: die I^te derselben umfasst 7 Axiome der *Verknüpfung;* Nr. 1 und 2 sind ebene, 3—7 räumliche Axiome; die II^te Gruppe wird gebildet von vier linearen und einem ebenen Axiom, betreffend die *Anordnung.* Als III^te Gruppe erscheint das *Parallelenaxiom,* in der IV^ten sind sechs *Congruenzaxiome* vereinigt; in der V^ten Gruppe findet das Postulat der *Stetigkeit* in der Form des Archimedischen Axioms seinen Ausdruck.

Bei der Untersuchung des Einflusses, den der Verzicht auf einzelne Axiome oder Axiomgruppen ausübt, ergiebt sich u. a. folgender Satz [36]:

„Der Pascal'sche Satz ist nicht beweisbar auf Grund der Axiome I, II, III, d. h. *unter Ausschliessung der Congruenzaxiome sowie des Archimedischen Axioms*“.

Gemeint ist der auf das Geradenpaar bezogene Pascal'sche Satz, der bereits Pappus bekannt war. Nun hat Herr H. Wiener schon vor längerer Zeit**) darauf hingewiesen, dass dieser Satz, in Verbindung mit demjenigen des Desargues über perspective Dreiecke, ausreicht, „um ohne weitere Stetigkeitsbetrachtungen und unendliche Processe den Grundsatz der projectiven Geometrie zu beweisen, und damit die ganze lineare projective Geometrie der Ebene zu entwickeln.“ Der Beweis für die Richtigkeit dieser Aussage ist von Herrn Wiener***) aus der Beziehung von Affinität zu Aehnlichkeit andeutungsweise gegeben und von Herrn Schur projectiv

*) Festschrift zur Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmals, Leipzig 1899.

**) H. Wiener, über die Grundlagen und den Ausbau der Geometrie, Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung 1. Bd., p. 47 und 3. Bd., p. 70.

***) Vergl. die zweite Abh. p. 72, Fussnote.

ausgeführt worden*). Da nun auch umgekehrt aus dem Fundamentalsatz derjenige des Pappus ohne Benutzung von Stetigkeit und Congruenz zu folgern ist, so enthalten die angeführten Arbeiten den vollgültigen Beweis dafür, dass die projective Geometrie unter Verzicht auf jene beiden Beweismittel überhaupt nicht entwickelt werden kann.

Auf Grund der von Herrn Thomä**) gegebenen Definition der Projectivität mag der Fundamentalsatz die folgende Fassung erhalten:

„Ueberträgt man die Punkte einer Geraden g durch mehrfache Projection auf eine Gerade p derart, dass drei Punkte A, B, C von g durch drei bestimmte Punkte U, V, W von p abgebildet werden, so gelangt jeder Punkt G von g nach einem eindeutig bestimmten Punkt P von p, auf welchem Weg man auch immer die Uebertragung bewerkstelligen mag“.

Dass dieser Satz für alle Punkte N einer aus A, B, C als Fundamentalpunkten construirten harmonischen Reihe gültig ist, folgt aus den Eigenschaften harmonischer Gebilde und lässt sich also auf Grund der drei ersten Axiomgruppen zeigen, dass er auch für alle anderen Punkte zutrifft, kann, wie Herr Hilbert ebenfalls bewiesen hat, und wie dies schon von früher her bekannt war [Zeuthen-Lüroth]***) mit Hülfe eines Stetigkeitsaxioms und unter Vermeidung der Congruenzaxiome dargethan werden. Herr Pasch†) hat in seinen „Vorlesungen über neuere Geometrie“ die Congruenz benutzt, jedoch auch einen Beweis des Fundamentalsatzes gegeben, der an Stelle der Congruenz ein Stetigkeitsaxiom verwendet. Die in Rede stehende Ableitung ist jedoch mehr beiläufig behandelt, um dann, als den in jener Arbeit festgehaltenen Anschauungen widersprechend, verworfen zuwerden; es sei daher gestattet, von einem etwas anderen Standpunkte aus nochmals auf den Gegenstand zurückzukommen.

Ich möchte nämlich den Beweis des Fundamentalsatzes unter Benutzung eines Stetigkeitsaxioms in eine solche Form bringen, dass sowohl der *Massbegriff* als auch die von den Herren Lüroth und Zeuthen benutzte *geometrische Stetigkeit* [Bewegung zweier die Gerade durchlaufenden Punkte] möglichst *zurücktritt*. Angeregt wurde ich hierzu durch eine den Beweis des Fundamentalsatzes betreffende Bemerkung, die Herr H. Wiener seinem Colleg über synthetische Geometrie [W. S. 1899/1900] einflocht.

---

*) Schur, über den Fundamentalsatz der projectiven Geometrie, Math. Ann. Bd. 51, p. 401.

**) Thomä, Ebene geometrische Gebilde erster und zweiter Ordnung vom Standpunkte der Geometrie der Lage. Halle 1873. S. 11. [bzw. Die Kegelschnitte in rein projectiver Behandlung. Halle 1894.]

***) Annalen Bd. 7, p. 585 und Bd. 17, p. 52 und 55.

†) Pasch, Vorl. üb. neuere Geom. Leipzig 1882.

II. Stetigkeit.

Aus den Axiomen der Verknüpfung und Anordnung, sowie aus dem Parallelenaxiom — etwa in der von Herrn Hilbert unter *I, II, III* gegebenen Form — möge unter Vermeidung des Massbegriffs der Desargues'sche Satz sowie die Lehre von den *harmonischen Elementen* hergeleitet und dabei bewiesen sein, dass zwei beliebige Punktpaare, die sich gegenseitig trennen, durch Projection stets wieder in getrennte Punktpaare übergehen.

Das Stetigkeitsaxiom sei in der Dedekind'schen Fassung*) vorausgesetzt:

„*Zerfallen alle Punkte einer Geraden in zwei Classen von der Art, dass jeder Punkt der ersten Classe links von jedem Punkt der zweiten Classe liegt, so existirt ein und nur ein Punkt, welcher diese Eintheilung aller Punkte in zwei Classen*, diese Zerschneidung der Geraden in zwei Stücke *hervorbringt*, und welcher selbst der einen oder der anderen Classe zugerechnet werden kann".

Um das vorstehende Axiom anwenden zu können, muss man in der Geraden einen bestimmten *Richtungssinn* annehmen. Dies kann geschehen auf Grund des Begriffs „zwischen", wie derselbe in den linearen Axiomen der *Anordnung* seinen Ausdruck findet. Die Auffassung der Geraden als einer geschlossenen Linie giebt alsdann Veranlassung, den Begriff des Richtungssinns zu erweitern. Der Kürze halber geben wir die Definitionen sofort für die in sich geschlossene Gerade; wir benutzen dabei die bereits oben eingeführten Punkte A, B, C; X, Y, Z seien beliebige Punkte von g.

Definition 1. „Ein Punkt X liegt *in Bezug auf* A *rechts — relativ rechts — von* C, wenn X durch C und A von B getrennt wird; anderenfalls liegt X relativ links von C".

Definition 2. „Liegt X relativ links, Y aber relativ rechts von C, so liegt X *relativ links von* Y. Das Gleiche findet statt,
wenn entweder X und Y beide relativ links von C liegen, derart, dass die Paare AY und XC sich trennen,
oder wenn beide relativ rechts von C liegen, derart, dass die Paare AX und CY sich trennen".

Folgerung 1. „Liegt X relativ links von Y, Y aber relativ links von Z, so liegt X relativ links von Z".

Vermöge obiger Festsetzungen ist somit für die Punkte der Geraden g eine „*Rangordnung*" im Sinne der von Herrn G. Cantor aufgestellten Theorie**) geschaffen.

---

*) Dedekind, Stetigkeit und irrationale Zahlen, Braunschweig 1872.

**) G. Cantor, Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. Mathem. Annalen Bd. 46, p. 496.

Sollte einer der drei Fundamentalpunkte unendlich fern liegen, so würden wir diesen mit A bezeichnen, und könnten dann kurzweg von rechts und links reden, wie Dedekind; es ist deshalb erlaubt, alle drei Punkte als *endlich* vorauszusetzen und zwar so geordnet, dass B zwischen A und C liegt.

Ist nun für alle Punkte von g eine Classeneintheilung $(K_I K_{II})$ von der Art gegeben, dass jeder Punkt der K_I *relativ links* von jedem Punkt der K_{II} liegt, so kann man aus ihr unter Zuhülfenahme des *unendlich fernen Punktes*, der etwa der Classe K_{II} angehören möge, eine Eintheilung $(\mathfrak{K}_1 \mathfrak{K}_2)$ herstellen, indem man der $\mathfrak{K}_2$ diejenigen Punkte aus K_{II} zutheilt, die relativ links von dem unendlich fernen Punkte liegen, während alle anderen Punkte von g der $\mathfrak{K}_1$ zufallen. Auf $(\mathfrak{K}_1 \mathfrak{K}_2)$ lässt sich nun das Dedekind'sche Axiom anwenden, es ergiebt sich also schliesslich für $(K_I K_{II})$ die

Folgerung 2. „Zerfallen alle Punkte der Geraden g in zwei Classen $(K_I K_{II})$ von der Art, dass jeder Punkt der K_I in Bezug auf den willkürlichen, aber festen Punkt A links [relativ links] von jedem Punkt der K_{II} liegt, so giebt es einen und nur einen Punkt, der im Verein mit A die Punkte der K_I von denen der K_{II} trennt, und der ebenso wie A willkürlich einer der beiden Classen zugetheilt werden kann".

III. Satz von dem Fluchtpunkt der harmonischen Reihe.

Wir betrachten A als Anfangspunkt N_0, B als ersten Theilpunkt N_1 und C als Fluchtpunkt einer harmonischen Reihe*) N; die Theilpunkte $N_1, N_2, \cdots$ die relativ links von C liegen, nennen wir positive, die anderen $N_{-1}, N_{-2}, \cdots$ negative Theilpunkte. Um einen beliebigen [von C verschiedenen] Punkt G_n der Geraden g mit der Reihe N in Beziehung zu setzen, bestimmen wir den Punkt G_{n-1} so, dass A, B und G_{n-1}, G_n in Bezug auf C äquivalent**) sind, d. h. so, dass zu $BG_{n-1}C$ derselbe vierte C zugeordnete harmonische Punkt X gehört, wie zu AG_nC. [Fig. 1.] Dann sind dem Paar $G_{n-1}G_n$ auch je zwei auf einander folgende Theilpunkte N_n und N_{n+1} in Bezug auf C äquivalent, und wenn N_n von C durch G_{n-1} und G_n getrennt wird, so wird G_n von C durch N_n und N_{n+1} getrennt, und umgekehrt. [Beweis bei Pasch.]

Gründet man auf $G_{n-1}G_nC$ eine harmonische Reihe G, so würde unter einer jener beiden Voraussetzungen auf jeden Punkt der Reihe N ein solcher der Reihe G folgen.

---

*) Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie, Leipzig 1891, Bd. 2, p. 435.
**) Pasch a. a. o. p. 121 ff.

Vorstehende Ueberlegungen [sowie die in Figur 1 veranschaulichte Construction] setzen nur die Axiome der Anordnung und Verknüpfung voraus; das Stetigkeitsaxiom wird nothwendig, um folgenden Satz zu beweisen:

Satz von dem Fluchtpunkt: *„Der Fluchtpunkt C der harmonischen Reihe wird von jedem anderen Punkte der Geraden g durch Theilpunkte N_i und N_{-i} getrennt.*

Beweis:*) Wir theilen alle Punkte von g in zwei Classen $K_I K_{II}$ ein: in K_I nehmen wir alle diejenigen Punkte auf, die in Bezug auf A relativ links von positiven Theilpunkten liegen; auch A zählen wir dieser

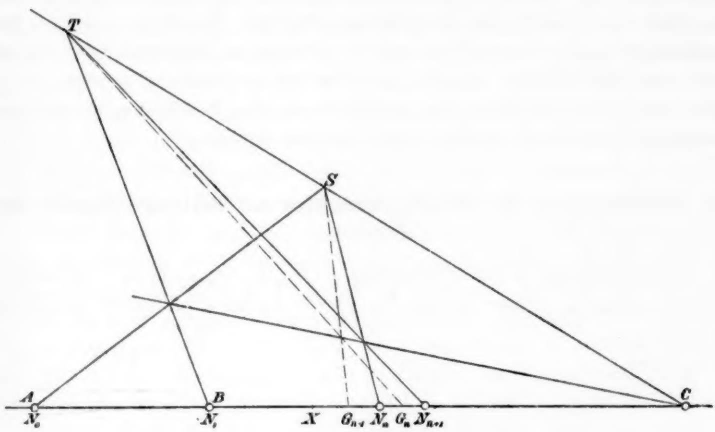


Fig. 1.

Classe bei, alle anderen Punkte fallen der Classe K_{II} zu. Die positiven Theilpunkte gehören demnach alle der K_I, die negativen sowie der Punkt C der K_{II} an. Da jeder Punkt der K_I relativ links von positiven Theilpunkten, jeder positive Theilpunkt aber relativ links von jedem Punkt der K_{II} liegt, so liegt wirklich jeder Punkt der K_I relativ links von jedem Punkt der K_{II}, so dass durch Anwendung der Folgerung (2) das Vorhandensein eines Punktes bewiesen wird, der im Verein mit A die Punkte der K_I und K_{II} von einander trennt.

Dass dieser Punkt der K_I nicht angehören kann, leuchtet ein; er muss also der K_{II} zugerechnet werden. Relativ rechts von C kann der gesuchte Punkt nicht liegen, weil C der K_{II} angehört; fiele er aber mit einem relativ links von C gelegenen Punkte G_n zusammen, so würde ein

*) Vergl. Pasch a. a. o. p. 125.

positiver Theilpunkt N_n von C durch G_{n-1} und G_n getrennt, folglich würde auch G_n von C durch N_n und N_{n+1} getrennt. Der gesuchte Punkt liegt also in C und wird, wie leicht ersichtlich ist, auch von jedem Punkt der K_{II} durch negative Theilpunkte getrennt.

Hiermit ist der Satz von dem Fluchtpunkt bewiesen; er bildet die Grundlage der nachfolgenden Deduction, und es wird *nicht nöthig* sein, *nochmals auf das Dedekind'sche Axiom zurückzugehen.* Das Stetigkeitsaxiom wird durch den Satz von dem Fluchtpunkt vertreten.

An Stelle der Dedekind'schen Fassung des Stetigkeitspostulats kann auch das sogenannte *Archimedische Axiom* benutzt werden. Man wird in diesem Fall die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{N_n N_{n+1}}$ als „gleich" bezeichnen und den Satz vom Fluchtpunkt als Axiom aufstellen. Hierdurch wird die Betrachtung wesentlich *vereinfacht*, und sie gewinnt an Anschaulichkeit, zumal stets nur eine *endliche Anzahl von Punkten* in Betracht gezogen wird. Aber man muss sich dann dazu entschliessen, *das Stetigkeitsaxiom auf eine uneigentliche und doch specielle Massdefinition aufzubauen.*

IV. Uebertragung des Fluchtpunktsatzes auf beliebige Punkte der Geraden.

Bildet man auf g eine Punktfolge $\cdots L_{-2} L_{-1} L_0 L_1 L_2 L_3 \cdots L_c$ derart, dass $L_{-1} L_c L_1 L_0$, ebenso $L_0 L_1 E_2 L_c$, ebenso $L_0 L_2 L_3 L_c$, ebenso $L_0 L_3 L_4 L_c$

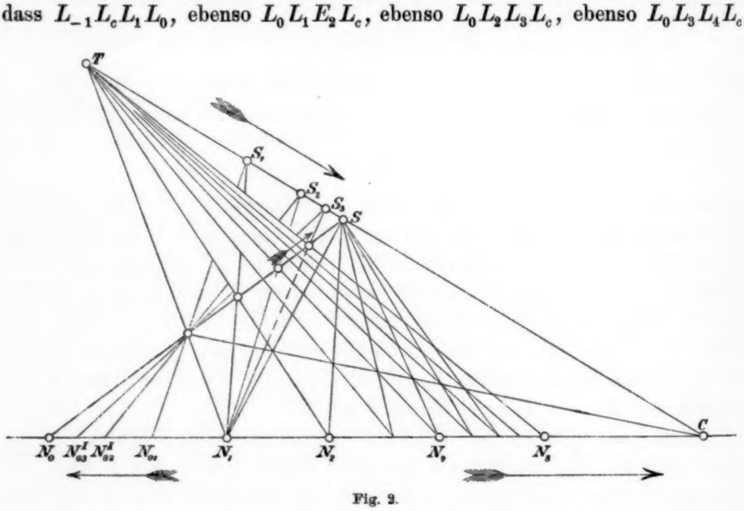


Fig. 2.

u. s. w., ferner $L_0 L_{-1} L_{-2} L_c$ u. s. w. harmonische Punkte sind, so wird L_c von jedem Punkt der Geraden g durch Punkte L_n getrennt, denn die

Punkte $L_2 L_3 L_4 \cdots L_n \cdots$ sind identisch mit beziehungsweise dem 2^{ten}, 4^{ten}, $8^{\text{ten}} \ldots 2^{n-1\,\text{ten}}$ Theilpunkt einer „harmonischen Reihe" im Sinne des vorigen Paragraphen und L_c ist der Fluchtpunkt dieser Reihe. Wenn man nun die ursprüngliche harmonische Reihe $ABN_2 \cdots C$ nochmals projectiv halbirt, so bilden die jedesmal *unmittelbar hinter* [relativ rechts von] N_n eingeschalteten Theilpunkte $N_{n1} N^I_{n2} N^I_{n3} \cdots$ eine Punktfolge der oben beschriebenen Art: ihr Anfangspunkt ist C, der erste Theilpunkt N_{n+1} und der Fluchtpunkt N_n. In der That können die „Halbirungspunkte" aus den ursprünglichen Theilpunkten durch Projection erzeugt werden, wie Fig. 2 veranschaulicht.

Entsprechendes gilt von den jedesmal unmittelbar vor [relativ links von] N_n eingeschalteten Halbirungspunkten. Es wird also jeder Theilpunkt N_n von jedem anderen Punkt der Geraden g durch „Halbirungspunkte" getrennt. Da aber jeder dieser Halbirungspunkte selbst als Element einer harmonischen Reihe angesehen werden kann, der auch die Elemente der ursprünglichen Reihe angehören, so darf der unter (III) bewiesene Satz auf alle Punkte N angewandt werden, die sich durch fortgesetzte Halbirung der ursprünglichen Reihe nach einander ergeben.

Jeder beliebige von C verschiedene Punkt G_n endlich stellt sich nach (III) als Element einer harmonischen Reihe $G_{n-1} G_n \cdots C$ dar und wird durch „Halbirungspunkte" dieser Reihe von allen anderen Punkten derselben Geraden getrennt. Da aber die Halbirungspunkte der Reihe G durch diejenigen der Reihe $N_0 N_1 \cdots C$ von einander getrennt werden, so gilt der für den Punkt C ausgesprochene Satz für *jeden Punkt* der Geraden g:

Jeder Punkt G_n von g wird von jedem anderen Punkt derselben Geraden durch Theilpunkte N getrennt.

Ueberträgt man die durch A und G_n bewirkte Theilung der Geraden g in zwei Ergänzungsstrecken auf die *Gesammtheit aller Theilpunkte N*, und unterscheidet die Gruppen $[N_I N_{II}]$, so sagt der Satz aus, dass auch eine solche Theilung, [die sich nicht auf alle Punkte von g bezieht, sondern nur auf die Punkte N], *nur durch einen Punkt* hervorgerufen wird.

V. Projective Abbildung.

Wir übertragen nun die Punkte von g durch mehrfache Projection derart auf die Gerade p, dass die Punkte A, B, C von g durch die Punkte U, V, W von p abgebildet werden. Der auf g beliebig gewählte Punkt G_n möge bei der von uns gewählten Abbildung Δ nach P_n auf p projicirt sein. Wir unterscheiden in der Geraden g wieder die Punkte N, welche bei fortgesetzter Halbirung der auf A, B, C gegründeten harmonischen

Reihe sich als Glieder einer ganz bestimmten Punktmenge ausweisen von solchen Punkten G, von denen dies nicht vorausgesetzt wird.

G_n theilt im Verein mit C die Punkte N in zwei Gruppen $[N_I, N_{II}]$ und nach IV. ist G_n der einzige Punkt, der durch ein beliebig aus beiden Gruppen ausgewähltes Punktpaar (N', N'') von C getrennt wird. Die Abbildung Δ möge nun die Punktgruppen $[N_I, N_{II}]$ in $[R_I, R_{II}]$ überführen. Alsdann wird P_n durch ein willkürlich aus diesen beiden letzteren Gruppen herausgehobenes Punktpaar (R', R'') von W getrennt, und zwar ist P_n der einzige Punkt, dem diese Eigenschaft zukommt. Denn jeder von P_n verschiedene Punkt P_n' der Geraden p kann auf Grund der Abbildung Δ als Bild eines von G_n verschiedenen Punktes G_n' der Geraden g aufgefasst werden, und weil nach (IV.) G_n' von G_n durch C und Punkte N getrennt wird, so wird auch P_n' von P_n durch W und Punkte R getrennt.

Verwendet man an Stelle von Δ eine andere projective Abbildung Δ', welche ebenfalls die Punkte A, B, C von g in die Punkte U, V, W von p überführt, so werden alle Punkte R ihre Plätze behalten. Da nun das Bild von G_n wiederum durch jedes Paar (R', R'') von W getrennt sein muss, so wird auch die Abbildung Δ' den Punkt G_n nach P_n übertragen müssen, denn P_n ist der einzige Punkt von p, der diese Eigenschaft hat.

Ueber die Entwickelung der algebraischen Zahlen in Potenzreihen.

Von

Kurt Hensel in Berlin.

---

§ 1.

Es sei $K(\omega)$ ein beliebiger Körper algebraischer Zahlen, n sein Grad; es sei ferner P ein Primdivisor einer beliebigen Primzahl p innerhalb $K(\omega)$, und es mögen k die Ordnung, d der Grad von P sein, so dass: $N(P)=p^k$, und p genau durch die Potenz P^d von P theilbar ist. Dann ist jede ganze Grösse ω von $K(\omega)$ modulo P einer einzigen von den p^k Zahlen:

$$A = u_0 + u_1\alpha + \cdots + u_{k-1}\alpha^{k-1} \tag{1}$$

congruent, wenn die Coefficienten u_i auf die Reihe $0, 1, \cdots p-1$ beschränkt werden, und wenn α eine Zahl von $K(\omega)$ ist, welche modulo P einer *irreductiblen* Congruenz k^{ten} Grades

$$\varphi(t) = t^k + a_1 t^{k-1} + \cdots + a_\varkappa \equiv 0 \pmod{P} \tag{2}$$

mit modulo p reducirten ganzzahligen Coefficienten a_i genügt.

Ist dann π irgend eine Zahl des Körpers, welche durch P, aber nicht durch P^2 theilbar ist, so kann jede Zahl ω von $K(\omega)$, mag sie nun ganz oder gebrochen sein, für eine beliebig hohe Potenz P^M von P als Modul auf eine einzige Art in eine Reihe entwickelt werden

$$\omega \equiv A_r\pi^r + A_{r+1}\pi^{r+1} + \cdots + A_{M-1}\pi^{M-1} \pmod{P^M}; \tag{3}$$

hier bedeuten die Coefficienten $A_r, A_{r+1}, \cdots$ ganze Functionen der Form (1) von α mit modulo p reducirten Coefficienten, und r ist offenbar gleich der Potenz von P, welche in ω enthalten ist, d. h. gleich der Ordnungszahl von ω in Bezug auf P. Der Beweis dieser Behauptung kann sehr einfach entweder durch den Schluss von m auf $m+1$, oder durch die Betrachtung der Anzahl p^{kM} der Modulo P^M incongruenten Zahlen von $K(\omega)$ geführt werden. Wenn eine solche Congruenz (3) wie dies im Folgenden häufig vorkommt, für jede noch so hohe Potenz des Moduls gilt, falls

man die Coefficienten $A_r, A_{r+1}, \cdots$ nur weit genug berechnet, soll das letzte Glied und der Modul mitunter fortgelassen und diese Beziehung so geschrieben werden:

$$(3a) \qquad \omega \equiv A_r \pi^r + A_{r+1}\pi^{r+1} + A_{r+2}\pi^{r+2} + \cdots,$$

ebenso, wie dies bei der Entwickelung einer analytischen Function in eine Potenzreihe geschieht.

Ohne diese Darstellung (3) der Zahlen ω in irgend einem wesentlichen Punkte zu ändern, kann man nun die beiden algebraischen Zahlen α und π durch andere geeignet gewählte ersetzen, und zwar kann man für α irgend eine Zahl:

$$(4) \qquad \bar{\alpha} = \alpha + A_1\pi + A_2\pi^2 + \cdots$$

wählen, welche zu α modulo P congruent ist, und für π irgend eine Zahl:

$$(4a) \qquad \bar{\pi} = B_1\pi + B_2\pi^2 + \cdots,$$

wo $B_1 \gtrless 0$ ist, welche also P ebenfalls einmal und nur einmal enthält. Aus der grossen Menge der so sich ergebenden gleichwerthigen Grundzahlen $\bar{\alpha}$ und $\bar{\pi}$ für die Entwicklungen (3) will ich nun die einfachsten und brauchbarsten auswählen.

Zuerst will ich die Zahlen $A_1, A_2, \cdots$ in (4) so bestimmen, dass die neue Zahl $\bar{\alpha}$ der Congruenz (2) nicht bloss für die erste Potenz des Moduls P, sondern für eine beliebig hohe Potenz P^M desselben genügt. Diese Forderung kann man stets erfüllen. Ist nämlich die linke Seite von (2) für $t = \alpha$ genau durch P^l theilbar, wo $l \geqq 1$ ist, so besteht für die algebraische Zahl $\varphi(\alpha)$ eine Entwickelung:

$$\varphi(\alpha) = C_l\pi^l + C_{l+1}\pi^{l+1} + \cdots,$$

wo $l \geqq 1$ und $C_l > 0$ ist. Ersetzt man dann α durch:

$$\bar{\alpha} = \alpha + A_l\pi^l,$$

so wird:

$$\begin{aligned}\varphi(\bar{\alpha}) &\equiv \varphi(\alpha + A_l\pi^l) = \varphi(\alpha) + A_l\pi^l\varphi'(\alpha) + \cdots \\ &\equiv \pi^l(C_l + A_l\varphi'(\alpha)) + \cdots;\end{aligned}$$

Ist also $\varphi'(\alpha)$ durch P nicht theilbar, so verschwindet für

$$A_l \equiv -\frac{C_l}{\varphi'(\alpha)} \quad (\text{mod. } P)$$

in der Entwickelung von $\varphi(\bar{\alpha})$ auch das Glied l^{ter} Ordnung, und durch Fortsetzung jenes Verfahrens kann man erreichen, dass die Zahl $\bar{\alpha}$ der Congruenz:

$$\varphi(\bar{\alpha}) \equiv 0 \quad (\text{mod. } P^M)$$

für jede noch so hohe Potenz von P als Modul genügt, ohne dass die ganzzahligen Coefficienten $a_1 \cdots a_k$ der Function φ in (2) sich geändert haben.

Man zeigt aber sehr leicht, dass die Ableitung:

$$\varphi'(\alpha) = k\alpha^{k-1} + (k-1)a_1\alpha^{k-2} + \cdots + a_{k-1}$$

der modulo p irreductiblen Function $\varphi(\alpha)$ niemals durch P theilbar sein kann; alsdann müssten ja alle Zahlencoefficienten $h a_{k-h}$ die Primzahl p enthalten, oder alle diejenigen Coefficienten a_{k-h} durch p theilbar, also gleich Null sein, für welche der zugehörige Exponent h nicht p enthält. Dann enthielte aber $\varphi(t)$ nur t^p, es wäre also:

$$\varphi(t) = \psi(t^p) \equiv (\psi(t))^p \pmod{p},$$

d. h. es wäre $\varphi(t)$ modulo p reducibel q. e. p.

Man kann also a priori die Zahl α innerhalb K stets so gewählt voraussetzen, dass die Congruenz (2) für eine beliebig hohe Potenz von P besteht, und dies soll im Folgenden bereits angenommen werden.

Etwas weniger einfach gestaltet sich die entsprechende Ueberlegung für die zweite Zahl π. Da n. d. V. P den Grad d hat, so ist der Quotient $\frac{\pi^d}{p}$ genau von der nullten Ordnung; man kann also d Zahlen $B_0, B_1, \cdots B_{d-1}$ des Körpers $K(\alpha)$ so bestimmen, dass die Summe:

$$\frac{\pi^d}{p} + B_{d-1}\pi^{d-1} + B_{d-2}\pi^{d-2} + \cdots + B_0 = B'$$

mindestens durch P^d theilbar ist; hierzu muss man nämlich für $B_{d-1}, \cdots B_0$ die negativ genommenen Coefficienten in der Entwickelung der Zahl $\frac{\pi^d}{p}$ nach Potenzen von π wählen; speciell ist dabei B_0 sicher von Null verschieden. Da ferner B' mindestens von der Ordnung d ist, so ist ganz ebenso:

$$\frac{B'}{p} + B'_{d-1}\pi^{d-1} + B'_{d-2}\pi^{d-2} + \cdots + B'_0 = B'',$$

wo B'' wieder mindestens durch P^d theilbar ist; ebenso ist:

$$\frac{B''}{p} + B''_{d-1}\pi^{d-1} + B''_{d-2}\pi^{d-2} + \cdots + B''_0 = B''',$$

. . . .

Setzt man also jeden dieser Werthe in die vorhergehende Gleichung ein, und schafft die Nenner fort, so erhält man die folgende Congruenz d^{ten} Grades für π, welche für eine beliebig hohe Potenz P^M gilt:

(5) $\psi(\pi) = \pi^d + pC_{d-1}\pi^{d-1} + pC_{d-2}\pi^{d-2} + \cdots + pC_0 \equiv 0 \pmod{P^M}$.

Die Zahl π ist also eine Wurzel der Congruenz:

$$\psi(\tau) \equiv 0 \pmod{P^M},$$

deren Coefficienten C_i durch die Gleichungen:

(5a) $$C_i = B_i + pB'_i + p^2 B''_i + \cdots$$

bestimmt sind; es sind also alle Coefficienten C_i durch p theilbare Zahlen

des Körpers $K(\alpha)$, von denen die letzte $pC_0 = p(B_0 + \cdots)$ sicher keine höhere Potenz von p als die erste enthält. Jedoch sind hier die Coefficienten C_i im allgemeinen nicht modulo p reducirte ganzzahlige Functionen von α; je höher man vielmehr die Potenz P^M wählt, desto grösser werden auch jene Coefficienten C_i in (5a).

Ich will aber jetzt zeigen, dass man die Zahl π stets durch eine äquivalente $\bar{\pi}$ ersetzen kann, für welche die entsprechenden Coefficienten $\bar{C}_i$ genau wie vorher bei der Function $\varphi(t)$ ein für alle Mal dieselben Werthe haben, wie hoch auch die Potenz P^M angenommen werde. Hierzu führt die folgende Ueberlegung:

Betrachtet man in der Function $\psi(\pi)$ in (5) die einzelnen Summanden $p^h B_i^{(h)} \pi^i$, aus denen sie wegen (5a) besteht, so sind sie in Bezug auf den Divisor P alle von verschiedener Ordnung nämlich von den Ordnungen $hd + i$, nur die beiden äussersten Glieder π^d und pB_0' besitzen die gleiche Ordnungszahl d. Wir theilen nun jene Function $\psi(\pi)$ in zwei Theile $\psi_0(\pi)$ und $\psi_1(\pi)$, von denen der erste alle und nur die Glieder enthalten soll, deren Ordnungszahl $\leqq \varkappa$ ist, wo $\varkappa$ eine beliebige erst später zu bestimmende Zahl bedeutet, und wo $\psi_1(\pi)$ aus allen übrigen Gliedern besteht. Schaffen wir dann in (5) $\psi_1(\pi)$ auf die rechte Seite und entwickeln diese Zahl wieder wie in (2) nach Potenzen von π, so ergiebt sich die Congruenz:

$$(6) \qquad \psi_0(\pi) \equiv D_l \pi^l + D_{l+1} \pi^{l+1} + \cdots$$

wo dann $l > \varkappa$ ist und $D_l \gtrless 0$ sein soll. Es ist also $\psi_0(\pi)$ in Bezug auf P genau von der l^{ten} Ordnung.

Ich zeige nun, dass man für ein genügend gross gewähltes $\varkappa$ die Zahl π durch eine äquivalente $\bar{\pi} = \pi + \lambda\pi^r$ ersetzen kann, für welche $\psi_0(\bar{\pi})$ in Bezug auf P nicht von der l^{ten} sondern mindestens von der $(l+1)^{\text{ten}}$ Ordnung ist. Durch Fortsetzung desselben Verfahrens erhält man dann zuletzt eine äquivalente Zahl π_0 für welche $\psi_0(\pi_0)$ von beliebig hoher Ordnung ist, d. h. π_0 genügt dann der Congruenz:

$$\psi_0(\pi_0) \equiv 0 \quad (\text{mod. } P^M)$$

während $\psi_0(\pi_0)$ nur aus einer endlichen Anzahl a priori bestimmter Glieder nämlich denjenigen besteht, deren Ordnung $\leqq \varkappa$ ist und das ist es, was bewiesen werden sollte.

Ersetzt man nun in $\psi_0(\pi)$ π durch $\bar{\pi} = \pi + \lambda\pi^r$, so folgt wegen (6):

$$(7) \quad \psi_0(\bar{\pi}) = \psi_0(\pi + \lambda\pi^r) = \psi_0(\pi) + \lambda\pi^r \cdot \psi_0'(\pi) + \lambda^2\pi^{2r} \frac{\psi_0''(\pi)}{2!} + \cdots$$
$$\equiv (D_l\pi^l + D_{l+1}\pi^{l+1} + \cdots) + \lambda\pi^r\psi_0'(\pi) + \cdots$$

Die Zahlen:

(7a) $$\psi_0'(\pi),\ \frac{\psi_0''(\pi)}{2!},\ \frac{\psi_0'''(\pi)}{3!},\cdots\frac{\psi_0^{(d)}(\pi)}{d!}$$

auf der rechten Seite sind nun alle so beschaffen, dass keine zwei Elemente einer und derselben Zahl $\frac{\psi^{(i)}(\pi)}{i!}$ dieselbe Ordnungszahl haben, da alle diese Ableitungen ganze Functionen von π von niedrigerem als dem d^{ten} Grade sind, deren Coefficienten nur ganzzahlige Potenzen von p enthalten. Jede dieser d Zahlen (7a) besitzt also die Ordnungszahl ihres niedrigsten Gliedes, welches leicht festzustellen ist. Es seien

(7b) $$\varrho_1, \varrho_2, \cdots \varrho_d$$

die Ordnungszahlen der d Zahlen (7a); offenbar bleiben dieselben einmal ungeändert, wenn π durch eine äquivalente Zahl $\bar{\pi}$ ersetzt wird, dann aber auch, wenn $\psi_0(\pi)$ durch die vollständige Function $\psi(\pi)$ ersetzt wird, da beide Male nur Glieder höherer Ordnung hinzutreten, welche jene Anfangsglieder nicht beseitigen können. Auf der rechten Seite von (7) besitzen dann die einzelnen Producte $\lambda\pi^r\psi_0'(\pi)$, $\lambda^2\pi^{2r}\frac{\psi_0''(\pi)}{2!},\cdots$ bezw. die Ordnungszahlen:

$$\varrho_1 + r,\ \varrho_2 + 2r,\cdots \varrho_d + dr.$$

Es sei nun r_0 die kleinste Zahl, für welche das erste Glied $\lambda\pi^r\psi_0'(\pi)$ von niedrigerer Ordnung ist, als alle folgenden Glieder, für welche also:

$$\varrho_1 + r_0 < \varrho_i + ir_0 \qquad (i = 2, 3, \cdots d)$$

ist; dies ergiebt für r_0 die Bedingung:

(7d) $$r_0 > -\frac{\varrho_i - \varrho_1}{i-1} \qquad (i = 2, 3, \cdots d),$$

also eine untere Grenze. Ist dann r eine beliebige Zahl $\geqq r_0$, so sind in der Entwickelung:

(7e) $$\psi_0(\pi_0 + \lambda\pi^r) = \psi(\pi) + \lambda\pi^r\psi_0'(\pi) + \lambda^2\pi^{2r}\frac{\psi_0''(\pi)}{2!} + \cdots$$

alle folgenden Summanden von höherer Ordnung als das Anfangsglied $C\lambda\pi^{r+\varrho_1}$ von $\lambda\pi^r\psi_0'(\pi)$, es ist also wegen (7e) und (6):

(8) $$\begin{aligned}\psi_0(\bar{\pi}) &= \psi_0(\pi) + C\lambda\pi^{r+\varrho_1} + \cdots\\ &\equiv (D_l\pi^l + \cdots) + (C\lambda\pi^{r+\varrho_1} + \cdots).\end{aligned}$$

Wir verfügen jetzt über die noch willkürlich gelassene Zerlegung von $\psi(\tau)$ in $\psi_0(\tau)$ und $\psi_1(\tau)$ so, dass wir in $\psi_0(\pi)$ alle diejenigen Glieder aufnehmen, deren Ordnungszahlen gleich oder kleiner als $r_0 + \varrho_1$ sind. Dann ist in (8) $D_l\pi^l$ sicher von höherer als der $(r_0 + \varrho_1)^{\text{ten}}$ Ordnung; wählt man dann r so, dass $r + \varrho_1 = l$, also $r = l - \varrho_1$ ist, so ist $r \geqq r_0$,

die Entwickelung in der zweiten Klammer von (8) beginnt also sicher mit dem *niedrigsten* Gliede $C\lambda\pi^l$, d. h. es wird:

(8a) $$\psi_0(\bar{\pi}) = \psi_0(\pi + \lambda\pi^r) \equiv (D_l + C\lambda)\pi^l + \cdots,$$

und durch geeignete Wahl von λ $\left(\text{nämlich durch } \lambda \equiv -\frac{D_l}{C} \;(\text{mod. } P)\right)$ kann man dieses Anfangsglied, und durch analoges Weiterschliessen beliebig viele weitere Glieder zum Verschwinden bringen. Fasst man also dieses letzte und das vorher gefundene Resultat zusammen, so ergiebt sich der Satz:

Jede Zahl ω des Körpers K kann für jede noch so hohe Potenz von P eindeutig in die Reihe:

$$\omega \equiv A_r\pi^r + A_{r+1}\pi^{r+1} + \cdots \quad (\text{mod. } P^M)$$

entwickelt werden. Die beiden Entwickelungszahlen α und π können innerhalb des Körpers $K(\omega)$ so ausgewählt werden, dass α für jede noch so hohe Potenz von P der Congruenz:

(9) $$\varphi(t) = t^k + a_{k-1}t^{k-1} + \cdots + a_0 \equiv 0 \quad (\text{mod. } P^M)$$

mit modulo p reducirten ganzzahligen Coefficienten genügt. Ebenso kann man die Zahl π innerhalb K so wählen, dass sie für jede noch so hohe Potenz von P einer Congruenz:

(10) $$\psi(\tau) = \tau^d + pC_{d-1}\tau^{d-1} + pC_{d-2}\tau^{d-2} + \cdots + pC_0 \equiv 0 \quad (\text{mod. } P^M)$$

genügt, deren Coefficienten alle durch p theilbar sind, und deren letzter pC_0 p nur einmal enthält. Die Coefficienten C_i dieser Congruenz sind ganze ganzzahlige Functionen von α, deren Zahlencoefficienten nicht nothwendig modulo p reducirt zu sein brauchen, aber sicher für jede noch so hohe Potenz von P^M, als Modul unterhalb einer bestimmten Grenze liegen.

§ 2.

Im Allgemeinen wird die Congruenz (10) deren Wurzel die Entwickelungszahl π ist, ganz ausserordentlich einfach, sie reducirt sich nämlich auf eine reine Congruenz:

(1) $$\psi(\tau) = \tau^d - Cp \equiv 0 \quad (\text{mod. } P^M)$$

in welcher $C = a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_{k-2}\alpha^{k-1}$ eine ganze Function von α mit modulo p reducirten Coefficienten ist; und zwar ist diese Wahl von $\psi(\tau)$ nur in dem ganz singulären Falle nicht möglich, wenn der Grad d des Divisors durch die Primzahl p theilbar ist, ein Fall, der offenbar nur für *gewisse* Theiler p der Köper-Discriminante vorkommen kann, welche selbst höchstens gleich dem Grade n des betrachteten Körpers sein können; aber gerade diese ganz singulären Fälle zeigten bisher bei der Untersuchung Anomalien, welche nicht zu beseitigen waren, während bei dem

hier befolgten Verfahren niemals eine Ausnahme für die später abzuleitenden Resultate vorkommt.

Ist nämlich zunächst:

$$\psi(\tau) = \tau^d + pC_{d-1}\tau^{d-1} + \cdots + pC_0$$

und d durch p nicht theilbar, so ist die Ordnungszahl ϱ_1 von

$$\psi'(\pi) = d\pi^{d-1} + p(d-1)C_{d-1}\pi^{d-2} + \cdots + pC_1$$

genau gleich $d-1$, da das erste Glied diese Ordnung besitzt, und alle folgenden durch p, also mindestens durch P^d theilbar sind. Genau ebenso folgt für alle höheren Ableitungen $\frac{\psi^{(i)}(\pi)}{i!}$ dass ihre Ordnungszahlen:

$$\varrho_i \geqq d - i$$

sind. Also sind in diesem Falle die in (7d) des vorigen Abschnittes auftretenden Zahlen:

$$\frac{\varrho_1 - \varrho_i}{i-1} \leqq \frac{(d-1)-(d-i)}{i-1} = 1,$$

man kann also in diesem Falle $r_0 = 2$ wählen, und ist dann sicher, dass in der Entwickelung von $\psi(\pi + \lambda\pi^2) = \psi(\pi) + \lambda\pi^2\psi'(\pi) + \cdots$ alle folgenden Glieder von höherer Ordnung sind als das Anfangsglied von $\lambda\pi^2\psi'(\pi)$, welches die Ordnungszahl $d+1 = 2+(d-1)$ besitzt. Man kann demnach in diesem Falle durch das im vorigen Abschnitte auseinandergesetzte Verfahren aus $\psi(\pi)$ alle Glieder von höherer als der d^{ten} Ordnung herausschaffen d. h. alle ausser den beiden in (1) auftretenden Summanden, man kann also in diesem Falle die Function $\psi(\tau)$ von vorn herein in der Form (1) gegeben annehmen.

Es sei jetzt d durch p theilbar, also:

$$d = p^s e,$$

wo $s > 0$ ist und e die Primzahl p nicht mehr enthält. Dann ist die Ordnungszahl ϱ_1 von

$$\psi'(\pi) = d\pi^{d-1} + p(d-1)C_{d-1}\pi^{d-2} + \cdots + pC_1$$

höchstens gleich der des Anfangsgliedes $d\pi^{d-1}$, da dieses sicher in $\psi'(\pi)$ auftritt und sich niemals fortheben kann, d. h. es ist:

$$\varrho_1 \leqq sd + d - 1,$$

während für alle folgenden Ordnungszahlen:

$$\varrho_i \geqq d$$

ist, da alle Ableitungen $\frac{\psi^{(i)}(\pi)}{i!}$ mindestens durch $p \sim P^d$ theilbar sind. Also ist in diesem Falle:

$$\frac{\varrho_1 - \varrho_i}{i-1} \leqq sd + d - 1 - d = sd - 1.$$

Wählt man also hier:

$$r_0 = sd,$$

so ist auch $r_0 > 1$, und man ist sicher, dass in der Entwickelung von:

$$\psi(\pi + \lambda\pi^{sd}) = \psi(\pi) + \lambda\pi^{sd}\psi'(\pi) + \lambda^2\pi^{2sd}\frac{\psi''(\pi)}{2!} + \cdots$$

alle folgenden Summanden von höherer Ordnung sind, als das Anfangsglied von $\lambda\pi^{sd}\psi'(\pi)$, welches seinerseits höchstens die Ordnung:

$$2sd + d - 1$$

besitzt. Man kann also dadurch, dass man die Entwickelungszahl π durch Hinzufügung von Gliedern $\lambda\pi^{sd} + \mu\pi^{sd+1} + \cdots$ ändert, (d. h. von Gliedern von gleicher oder höherer Ordnung als p^s) alle diejenigen Summanden aus $\psi(\pi)$ fortschaffen, deren Ordnungszahl die Grenze $2sd + d - 1$ übersteigt. Da aber das Product $p^{2s}\pi^{d-1}$ ebenfalls diese Ordnungszahl besitzt, so ergiebt sich leicht die Richtigkeit des in diesem allgemeinsten Falle geltenden Satzes:

> Ist die Ordnungszahl $d = p^s e$ des Primtheilers P durch p theilbar, so kann man die Entwickelungszahl π innerhalb des Körpers K stets so auswählen, dass π für jede noch so hohe Potenz des Moduls P einer Congruenz:
>
> $$\psi(\tau) = \tau^d + pC_{d-1}\tau^{d-1} + \cdots + pC_0 \equiv 0 \pmod{p^M}$$
>
> genügt, deren Coefficienten:
>
> $$C_i = c_0 + c_1\alpha + \cdots + c_{k-1}\alpha^{k-1}$$
>
> ganze Functionen von α mit modulo p^{2s-1} reducirten Zahlencoefficienten c_k sind.

Ist z. B. d nur durch die erste Potenz von p theilbar, so sind in der Function $\psi(\tau)$ die Coefficienten c_k modulo p reducirt.

In besonderen Fällen kann die Function $\psi(\tau)$ auch noch weiter reducirt werden, jedoch bieten diese Specialfälle zunächst kein besonderes Interesse, ich werde aber auf sie in einem andern Zusammenhange genauer eingehen müssen, da sich aus ihnen gerade die bisher noch nicht betrachteten wahren Invarianten der einzelnen Körper $K(\omega)$ ergeben; für die hier durchgeführte Untersuchung ist es allein wesentlich, dass eine bestimmt angebbare obere Grenze für die Grösse der Coefficienten C_i immer existirt.

§ 3.

Wir hatten bis jetzt den Körper $K(\omega)$ für sich allein betrachtet und von seinen $n-1$ conjugirten Körpern ganz abgesehen. Alle bis jetzt hergeleiteten Resultate bleiben aber bestehen, wenn man die algebraischen Zahlen ω für einen Primdivisor innerhalb irgend eines Galois'schen Körpers $\mathfrak{K}$

betrachtet, unter welchem alle n zu $K(\omega)$ conjugirten Körper enthalten sind. Ist nämlich $\mathfrak{p}$ einer *der* Primtheiler von p für diesen Körper $\mathfrak{K}$, welcher in P aufgeht, so gilt ja jede Congruenz für eine beliebig hohe Potenz von P auch für eine jede Potenz $\mathfrak{p}^M$ von $\mathfrak{p}$.

Ich verändere jetzt die bisher angewandte Bezeichnung in der Weise, dass ich die algebraischen Zahlen ω durch ω_1 bezeichne und es seien jedesmal $\omega_2, \omega_3, \cdots \omega_n$ die $n-1$ zu ω_1 conjugirten Zahlen.

Für eine Potenz $\mathfrak{p}^M$ des soeben eingeführten Galois'schen Primtheilers sind nun auch alle $(n-1)$ zu ω_1 conjugirten Zahlen $\omega_2, \cdots \omega_n$ in ganz gleicher Weise in Reihen entwickelbar, wie vorher ω_1, und ihre Entwickelungszahlen $(\alpha', \pi'), (\alpha'', \pi''), \cdots$ bestimmen sich ganz entsprechend mit Hülfe derjenigen Primtheiler $P', P'', \cdots$ innerhalb $K(\omega_2), K(\omega_3), \cdots$ welche durch denselben Galois'schen Divisor $\mathfrak{p}$ ebenfalls theilbar sind und durch ihre Ordnungs- und Gradzahlen $(k', d'), (k'', d''), \cdots$.

Ich kehre jetzt zu den für $K(\omega_1)$ gültigen Reihenentwickelungen zurück und betrachte neben diesem Zahlkörper noch die Körper algebraischer Zahlen, welche durch die beiden *Gleichungen:*

$$(1)\qquad \begin{aligned} \varphi(t) &= t^k + a_{k-1} t^{k-1} + \cdots + a_0 = 0, \\ \psi(\tau) &= \tau^d + pC_{d-1}\tau^{d-1} + \cdots + pC_0 = 0 \end{aligned}$$

definirt sind, wenn $\varphi(t)$ und $\psi(\tau)$ die linken Seiten derjenigen *Congruenzen* (9) und (10) des § 1 bedeuten, deren Wurzeln modulo $\mathfrak{p}^M$ die Entwickelungszahlen α und π von $K(\omega)$ waren. Es seien

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_k$$

die k conjugirten Wurzeln der ersten Gleichung, so dass:

$$(1\text{a})\qquad \varphi(t) = (t-\alpha_1)(t-\alpha_2)\cdots(t-\alpha_k)$$

ist, und ebenso mögen:

$$\pi_1^{(1)}, \pi_2^{(1)}, \cdots \pi_d^{(1)}$$

die Wurzeln der zweiten Gleichung

$$(1\text{b})\qquad \psi_1(\tau) = \tau^d + pC_{d-1}^{(1)}\tau^{d-1} + \cdots + pC_0^{(1)} = \left(\tau - \pi_1^{(1)}\right)\cdots\left(\tau - \pi_d^{(1)}\right)$$

sein, wenn in den Coefficienten $C_{d-1}, \cdots C_0$ α durch die erste Wurzel α_1 von $\varphi(\alpha) = 0$, ersetzt wird. In gleicher Weise seien allgemein:

$$\pi_1^{(i)}, \pi_2^{(i)}, \cdots \pi_d^{(i)} \qquad (i = 1, \cdots k)$$

die Wurzeln der conjugirten Gleichung:

$$(1\text{c})\qquad \psi_i(\tau) = \tau^d + pC_{d-1}^{(i)}\tau^{d-1} + \cdots + pC_0^{(i)} = \left(\tau - \pi_1^{(i)}\right)\cdots\left(\tau - \pi_d^{(i)}\right),$$

wenn in den Gleichungscoefficienten α durch α_i ersetzt wird.

Da die erste Gleichung sogar modulo p also sicher auch absolut irreductibel ist, und da ferner die zweite Gleichung (1b) nach dem bekannten Eisenstein'schen Theorem innerhalb des Körpers $K(\alpha_1)$ irreductibel ist, so wird durch die Gesammtheit aller rationalen Functionen von α_1 und $\pi_1^{(1)}$ ein Körper $K\left(\alpha_1, \pi_1^{(1)}\right)$ des Grades

$$\nu = kd$$

constituirt, dessen ν Conjugirten die Körper $K\left(\alpha_i, \pi_g^{(i)}\right)$ sind.

Wir legen nun den weiteren Untersuchungen einen derjenigen Galois'schen Körper zu Grunde, unter dem sowohl die n conjugirten Körper $K(\omega_h)$ als auch die ν soeben betrachteten Körper $K\left(\alpha_i, \pi_g^{(i)}\right)$ enthalten sind, und es sei $\mathfrak{p}$ wieder ein in P enthaltener Primtheiler jenes Körpers.

Dann besteht der folgende Satz:

Die Entwickelungszahlen α und π für den Körper $K(\omega_1)$ sind für eine beliebig hohe Potenz von $\mathfrak{p}$ je einer Wurzel der beiden Gleichungen $\varphi(\alpha) = 0$ und $\psi(\pi) = 0$ congruent, d. h. es ist:

$$\alpha \equiv \alpha_1, \quad \pi \equiv \pi_1^{(1)} \quad \left(\text{mod. } \mathfrak{p}^M\right)$$

wenn α_1 und $\pi_1^{(1)}$ unter den conjugirten Wurzeln jener Gleichungen geeignet ausgewählt werden.

Ist nämlich α die erste der beiden im § 1 bestimmten Entwickelungszahlen für $K(\omega_1)$, so war ja nach (1a)

$$\varphi(\alpha) = (\alpha - \alpha_1)(\alpha - \alpha_2) \cdots (\alpha - \alpha_k) \equiv 0 \quad (\text{mod. } \mathfrak{p}^M);$$

es muss daher einer oder mehrere von den rechts stehenden Factoren durch $\mathfrak{p}$ theilbar sein; die zweite Möglichkeit kann aber nicht eintreten, denn enthielten z. B. $(\alpha - \alpha_1)$ und $(\alpha - \alpha_2)$ diesen Theiler, so müsste auch ihre Differenz $\alpha_1 - \alpha_2$ und demnach auch das Differenzenproduct $\prod(\alpha_i - \alpha_k)$ d. h. die Discriminante $D(\varphi)$ von $\varphi(\alpha)$ durch $\mathfrak{p}$ theilbar sein, d. h. $D(\varphi)$ wäre durch die Primzahl p theilbar, und dies ist wegen der Irreductibilität von $\varphi(t)$ modulo p ausgeschlossen. Also ist ein einziger von den k Linearfactoren etwa $(\alpha - \alpha_1)$ durch $\mathfrak{p}^M$ theilbar, d. h. es ist in der That

$$\alpha \equiv \alpha_1 \quad (\text{mod. } \mathfrak{p}^M). \tag{2}$$

Ist ferner π die zweite Entwickelungszahl für $K(\omega_1)$, so ist wegen (2)

$$\psi(\pi, \alpha) \equiv \psi(\pi, \alpha_1) \equiv \psi_1(\pi) \quad (\text{mod. } \mathfrak{p}^M),$$

also ist

$$\psi(\pi) \equiv \psi_1(\pi) = \left(\pi - \pi_1^{(1)}\right)\left(\pi - \pi_2^{(1)}\right) \cdots \left(\pi - \pi_d^{(1)}\right) \equiv 0 \quad \left(\text{mod. } \mathfrak{p}^M\right),$$

und man zeigt wiederum leicht, dass einer, aber auch nur einer jener d Linearfactoren, für sich durch eine beliebig hohe Potenz von $\mathfrak{p}$ theilbar

ist, während die Ordnungszahlen aller übrigen Factoren unterhalb einer a priori angebbaren Grenze liegen müssen, wenn M grösser und grösser angenommen wird.

In der That, enthielten zwei jener Factoren etwa $\left(\pi - \pi_1^{(1)}\right)$ und $\left(\pi - \pi_2^{(1)}\right)$ beide eine beliebig hoch angenommene Potenz $\mathfrak{p}^{\mathfrak{M}}$ von $\mathfrak{p}$, so wäre auch ihre Differenz $\pi_1^{(1)} - \pi_2^{(1)}$, also auch die Discriminante der Gleichung $\psi_1(\pi) = 0$

$$D(\psi) = \prod_{g \gtrless h} \left(\pi_g^{(1)} - \pi_h^{(1)}\right)$$

mindestens durch $\mathfrak{p}^{\mathfrak{M}}$ theilbar, und dies ist nicht der Fall, sobald nur $\mathfrak{M}$ grösser als die Ordnungszahl jener Gleichungsdiscriminante in Bezug auf $\mathfrak{p}$ angenommen wird. Also ist in der That einer und nur einer jener d Factoren etwa $\pi - \pi_1^{(1)}$ durch $\mathfrak{p}^M$ theilbar, d. h. es ist für jede noch so hohe Potenz von $\mathfrak{p}$

$$\pi \equiv \pi_1^{(1)} \quad \left(\text{mod. } \mathfrak{p}^M\right),$$

und somit ist die oben für α und π aufgestellte Behauptung in ihrem ganzen Umfange bewiesen. Im Folgenden können und sollen also jetzt als Entwickelungszahlen nicht mehr die beiden Zahlen α und π des Körpers $K(\omega)$, sondern die hier gefundenen Zahlen α_1 und $\pi_1^{(1)}$ des Körpers $K\left(\alpha_1, \pi_1^{(1)}\right)$ von der ν^{ten} Ordnung benutzt werden, und man findet so, dass die Zahl ω modulo $\mathfrak{p}^M$ einer Zahl

$$\omega^{(0)} = A_r^{(1)} \pi_1^{(1)^r} + A_{r+1}^{(1)} \pi_1^{(1)^{r+1}} + \cdots$$

des Körpers $K\left(\alpha_1, \pi_1^{(1)}\right)$ congruent ist, welche nur von der ν^{ten} Ordnung ist. Hieraus folgt aber ohne Weiteres, dass auch überhaupt jede Zahl $\bar{\omega} = \varphi(\omega)$ des Körpers $K(\omega)$ der entsprechenden Zahl $\bar{\omega}^{(0)} = \varphi(\omega^{(0)})$ des Körpers $K\left(\alpha_1, \pi_1^{(1)}\right)$ congruent ist, dass also der ganze Körper $K(\omega)$ eindeutig umkehrbar modulo $\mathfrak{p}^M$ auf den Körper $K\left(\alpha_1, \pi_1^{(1)}\right)$ abgebildet ist.

In genau derselben Weise zeigt man, dass überhaupt alle n conjugirten Körper

$$K(\omega_1), \qquad K(\omega_2), \qquad \cdots K(\omega_n)$$

für einen und denselben Divisor $\mathfrak{p}^M$ eindeutig auf n andere Körper:

$$K\left(\alpha_1, \pi_1^{(1)}\right),\ K\left(\alpha_1', \pi_1'^{(1)}\right), \cdots K\left(\alpha_1^{(n)}, \pi_1^{(n)}\right)$$

niedrigerer Ordnung abgebildet sind, welche in genau derselben Weise gefunden werden, wie der erste $K\left(\alpha_1, \pi_1^{(1)}\right)$.

§ 4.

Es sei jetzt ω_1 eine beliebige ganze Zahl des vorher betrachteten Körpers n^{ter} Ordnung, $\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_n$ ihre conjugirten und

(1) $F(\omega) = (\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)\cdots(\omega - \omega_n) = \omega^n + b_{n-1}\omega^{n-1} + \cdots + b_0 = 0$

die ganzzahlige Gleichung, deren Wurzeln sie sind, und es seien $K(\omega_1), K(\omega_2), \cdots K(\omega_n)$ die zugehörigen n conjugirten Körper. Sind dann $\omega_1^{(0)}, \omega_2^{(0)}, \cdots \omega_n^{(0)}$ die im vorigen Abschnitte gefundenen n Reihen der Körper $K\left(\alpha_1, \pi_1^{(1)}\right)$, $K\left(\alpha_1', \pi_1'^{(1)}\right), \cdots$ denen diese Zahlen modulo $\mathfrak{p}^M$ congruent sind, wenn $\mathfrak{p}$ jetzt einen Primtheiler des Körpers

$$K\left(\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_n; \omega_1^{(0)}, \omega_2^{(0)}, \cdots \omega_n^{(0)}\right)$$

bedeutet, so besteht für diesen Modul und für ein variables ω die Congruenz:

$$F(\omega) \equiv \left(\omega - \omega_1^{(0)}\right)\left(\omega - \omega_2^{(0)}\right), \cdots \left(\omega - \omega_n^{(0)}\right) \pmod{\mathfrak{p}^M} \tag{2}$$

und aus ihr folgt, dass allgemein:

$$F\left(\omega_i^{(0)}\right) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^M} \qquad (i = 1, 2, \cdots n),$$

dass also jede dieser Reihen eine Wurzel der Congruenz $F(\omega) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^M}$ ist.

Alle diese Zahlen $\omega_1^{(0)}, \omega_2^{(0)}, \cdots \omega_n^{(0)}$ sind modulo $\mathfrak{p}^M$ incongruent, da sonst wegen (2) die Gleichungsdiscriminante von $F(\omega)$ durch $\mathfrak{p}^M$ theilbar, also identisch Null sein müsste, während doch ω_1 n. d. V. von der n^{ten} Ordnung ist. Ist ferner $\bar{\omega}$ irgend eine algebraische Zahl, welche ebenfalls die Congruenz $F(\omega) \equiv 0$ für die M^{te} Potenz von $\mathfrak{p}$ oder eines Primtheilers $\bar{\mathfrak{p}}$ von $\mathfrak{p}$ für einen Oberkörper befriedigt, so folgt aus der Congruenz:

$$F(\bar{\omega}) \equiv \left(\bar{\omega} - \omega_1^{(0)}\right)\left(\bar{\omega} - \omega_2^{(0)}\right) \cdots \left(\bar{\omega} - \omega_n^{(0)}\right) \equiv 0 \quad \left(\text{mod. } \bar{\mathfrak{p}}^M\right) \tag{2a}$$

dass $\bar{\omega}$ einer, aber auch nur einer der n Zahlen $\omega_i^{(0)}$ congruent sein muss für eine beliebig hohe Potenz eines Primtheilers $\bar{\mathfrak{p}}$ von $\mathfrak{p}$ innerhalb des Körpers $K\left(\omega_i^{(0)}, \omega_i, \bar{\omega}\right)$.

Man kann aber diese n Zahlen $\omega_i^{(0)}$ auch einfach als Wurzeln der Congruenz:

$$F(\omega) \equiv 0 \pmod{p^M} \tag{3}$$

definiren, wenn p die zum Divisor $\mathfrak{p}$ gehörige reelle Primzahl bedeutet. Um dies z. B. für die erste Congruenzwurzel $\omega_1^{(0)}$ zu beweisen, substituire ich sie in $F(\omega)$, entwickle $F(\omega_1^{(0)})$ nach Potenzen von α_1 und $\pi_1^{(1)}$ und reducire sie dann mit Hülfe der Gleichungen $\varphi(\alpha_1) = 0$, $\psi_1(\pi_1^{(1)}) = 0$ bezw. auf den $(k-1)^{\text{ten}}$ und $(d-1)^{\text{ten}}$ Grad in α_1 und $\pi_1^{(1)}$. Dann geht die Congruenz $F(\omega_1^{(0)}) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^M}$ über in:

$$F\left(\omega_1^{(0)}\right) \equiv \sum_{g=0}^{k-1} \sum_{h=0}^{d-1} a_{gh}\, \alpha_1^g\, \pi_1^{(1)^h} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^M} \tag{4}$$

oder einfacher geschrieben in:

$$(4a)\quad F\left(\omega_1^{(0)}\right) \equiv A_0^{(0)} + A_1^{(0)}\pi_1^{(1)} + \cdots + A_{d-1}^{(0)}\pi_1^{(1)^{d-1}} \equiv 0 \quad \left(\text{mod. } \mathfrak{p}^M\right),$$

wo die Coefficienten $A_i^{(0)}$ ganzzahlige Functionen des $(k-1)$ Grades von α_1 sind. Ich zeige nun, dass die ν algebraischen Zahlen

$$(5)\qquad \alpha_1^g \pi_1^{(1)^h} \qquad \begin{pmatrix} g = 0, 1, \cdots k-1 \\ h = 0, 1, \cdots d-1 \end{pmatrix}$$

modulo $\mathfrak{p}^M$ rational unabhängig sind, dass also eine Congruenz (4) oder (4a) dann und nur dann bestehen kann, wenn alle ν einzelnen Summanden $a_{gh}\alpha_1^g\pi_1^{(1)^h}$ für sich durch $\mathfrak{p}^M$ theilbar sind. Ist das bewiesen, so folgt ja ohne Weiteres, da die a_{gh} reelle Zahlen sind, dass jeder einzelne Zahlcoefficient a_{gh} durch eine beliebig hohe Potenz $p^{\overline{M}}$ von p theilbar ist, d. h. es zeigt sich, dass $\omega_1^{(0)}$ in der That eine Wurzel der Congruenz (3) ist.

Beim Beweise kann und will ich annehmen, dass die in allen Zahlcoefficienten a_{gh} gemeinsam enthaltene Potenz von p bereits durch Division beseitigt ist, ohne dass sich dadurch der Modul $\mathfrak{p}^M$ auf Eins reducirt hat; denn anderenfalles wäre ja die Behauptung bereits bewiesen. Ist dann in der Reihe $A_0^{(0)}, A_1^{(0)}, \cdots$ in (4a). $A_h^{(0)}$ der erste Coefficient, welcher nicht durch p theilbar ist, und ist $\mathfrak{p}^\delta$ die Potenz des Primdivisors $\mathfrak{p}$, welche genau in $\pi_1^{(1)}$ enthalten ist, so betrachte ich die Congruenz (4a) für den Modul $\mathfrak{p}^{(h+1)\delta}$; dann reducirt sie sich auf:

$$A_h^{(0)}\pi_1^{(1)^h} \equiv 0 \quad \left(\text{mod. } \mathfrak{p}^{(h+1)\delta}\right),$$

weil alle vorhergehenden Elemente durch p also durch $\mathfrak{p}^{d\delta}$, alle folgenden mindestens durch $\pi_1^{(1)^{h+1}}$ theilbar sind; da aber $\pi_1^{(1)^h}$ nur $\mathfrak{p}^{h\delta}$ enthält; so muss $A_h^{(0)}$ durch $\mathfrak{p}^\delta$ also entgegen der vorher gemachten Annahme durch p theilbar sein, und damit ist die soeben aufgestellte Behauptung bewiesen. Ist ferner umgekehrt $\overline{\omega}$ irgend eine Wurzel der Congruenz (3) modulo p^M, so gilt sie auch für den Modul $\overline{\mathfrak{p}}^M$ wenn $\overline{\mathfrak{p}}$ irgend ein Primtheiler von p ist, also muss $\overline{\omega}$ einer der n Zahlen $\omega_1^{(0)}, \omega_2^{(0)}, \cdots, \omega_n^{(0)}$ modulo $\overline{\mathfrak{p}}^M$ congruent sein, wenn $\overline{\mathfrak{p}}$ den in (2a) benützten Divisor von $\mathfrak{p}$ bedeutet.

Es sei nun $\omega^{(1)}$ irgend eine der n Congruenzwurzeln von

$$(6)\qquad F(\omega) \equiv 0 \ (\text{mod. } \overline{\mathfrak{p}}^M);$$

diese algebraische Zahl sei von der ν^{ten} Ordnung und

$$(7)\qquad \omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \cdots \omega^{(\nu)}$$

seien ihre ν conjugirten Zahlen für den Körper ν^{ter} Ordnung $K(\alpha_1, \pi_1^{(1)})$. Da nach dem soeben bewiesenen Satze $\omega^{(1)}$ dann auch die Congruenz

$$F(\omega^{(1)}) \equiv 0 \pmod{p^M}$$

befriedigt, so gilt dasselbe auch für alle ν conjugirten Zahlen $\omega^{(k)}$, d. h. alle diese Zahlen sind Wurzeln der Congruenz (6), wenn man hier wie im Folgenden unter $\bar{\mathfrak{p}}$ einen Theiler von p versteht, welcher für den hier betrachteten Zahlkörper den Charakter eines Primdivisors hat. Ferner sind aber jene ν conjugirten Zahlen $\omega^{(i)}$ modulo $\bar{\mathfrak{p}}^M$ incongruent; denn anderenfalls würde ja ihre Discriminante ebenfalls $\bar{\mathfrak{p}}^M$ enthalten, oder da sie eine reelle Zahl ist, durch eine beliebig hohe Potenz von p theilbar sein; jene Discriminante müsste also Null sein, d. h. der Körper $K(\omega^{(1)})$ wäre von niedrigerer als der ν^{ten} Ordnung. Dies ist aber sicher nicht der Fall; denn wir zeigten im § 3, dass jeder Körper $K(\alpha_1, \pi_1^{(1)})$ genau von der Ordnung $\nu = kd$ und nicht von niedrigerer Ordnung ist.

Also sind die ν zu $\omega^{(1)}$ conjugirten algebraischen Zahlen modulo $\bar{\mathfrak{p}}^M$ genau ν unter den n Wurzeln $\omega_1^{(0)}, \omega_2^{(0)}, \cdots \omega_n^{(0)}$ congruent und können also für dieselben gesetzt werden.

So ergiebt sich das Resultat, dass die n conjugirten Körper $K(\omega_1), K(\omega_2), \cdots K(\omega_n)$ für eine beliebig hohe Potenz eines Primdivisors $\mathfrak{p}$ als Modul eindeutig auf andere und zwar ebenfalls conjugirte Körper abgebildet werden können, deren Ordnungszahlen dann natürlich im Allgemeinen kleiner sind, als n. Ohne die Allgemeinheit der folgenden Ueberlegungen zu beschränken, können wir annehmen, dass bei dieser Zuordnung *drei* Systeme solcher conjugirten Körper auftreten. Es seien:

$$\lambda, \quad \mu, \quad \nu$$

die Ordnungszahlen jener Körper; dann ist also:

$$\lambda + \mu + \nu = n,$$

und es mögen der Reihe nach:

$$\gamma_1, \gamma_2, \cdots \gamma_\lambda; \quad \delta_1, \delta_2, \cdots \delta_\mu; \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_\nu$$

die conjugirten Zahlen jener Körper sein, welche bezw. den n conjugirten Zahlen $\omega_1, \cdots \omega_n$ modulo $\mathfrak{p}^M$ congruent sind. Dann sind also die n Körper $K(\omega_1), \cdots K(\omega_n)$ modulo $\mathfrak{p}^M$ eindeutig auf die n Körper

$$K(\gamma_1), \cdots K(\gamma_\lambda); \quad K(\delta_1), \cdots K(\delta_\mu); \quad K(\varepsilon_1), \cdots K(\varepsilon_\nu)$$

abgebildet.

Man beweist nun leicht, dass dies die Körper niedrigster Ordnung sind, auf welche jene Körper $K(\omega_\varrho)$ eindeutig abgebildet werden können. Könnte man nämlich $K(\omega_1)$ modulo $\mathfrak{p}^M$ eindeutig auf einen Körper $K(\xi)$ von niedrigerer als der λ^{ten} Ordnung abbilden, so würde dasselbe auch für den zu $K(\omega_1)$ congruenten Körper $K(\gamma_1)$ gelten; auch dieser wäre also modulo $\mathfrak{p}^M$ von niedrigerer als der λ^{ten} Ordnung, während doch umgekehrt

a. S. 313 bewiesen wurde, dass die algebraischen Zahlen $\alpha_1^g \pi_1^{(1)^h}$ eines jeden solchen Körpers modulo p^M also auch modulo $\mathfrak{p}^M$ rational unabhängig sind, und dass ihre Anzahl gleich der Ordnungszahl von $K(\gamma)$ ist.

§ 5.

Da die im vorigen Abschnitte gefundenen n algebraischen Zahlen: γ_g, δ_h, ε_i modulo $\mathfrak{p}^M$ den n conjugirten algebraischen Zahlen $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_n$ congruent sind, so erhält man modulo $\mathfrak{p}^M$ die für ein variables ω geltende Zerlegung:

$$(1)\quad \begin{aligned} F(\omega) &\equiv ((\omega-\gamma_1)\cdots(\omega-\gamma_\lambda))((\omega-\delta_1)\cdots(\omega-\delta_\mu))((\omega-\varepsilon_1)\cdots(\omega-\varepsilon_\nu)) \\ &\equiv F_1(\omega)\,F_2(\omega)\,F_3(\omega) \pmod{\mathfrak{p}^M} \end{aligned}$$

wo $F_1(\omega)$, $F_2(\omega)$, $F_3(\omega)$ die ganzen ganzzahligen Functionen sind, deren Wurzeln die conjugirten algebraischen Zahlen γ_g, δ_h, ε_i sind. Jede dieser Functionen ist für eine genügend hohe Potenz von $\mathfrak{p}$ als Modul irreductibel; wäre nämlich z. B.:

$$F_1(\omega) \equiv \Phi_1(\omega)\,\Psi_1(\omega) \pmod{\mathfrak{p}^M}$$

so ergäbe sich für $\omega = \gamma_1$, dass einer der beiden Factoren von niedrigerem als dem λ^{ten} Grade $\Phi_1(\gamma_1)$ oder $\Psi_1(\gamma_1)$ durch eine beliebig hohe Potenz von $\mathfrak{p}$ theilbar sein müsste, d. h. es wäre möglich, den Körper $K(\gamma_1)$ modulo $\bar{\mathfrak{p}}^M$ auf einen solchen niedrigerer Ordnung abzubilden. Ebenso leicht zeigt man auch, dass jene drei irreductiblen Factoren modulo $\mathfrak{p}^M$ incongruent sind, da ja sonst z. B. eine Zahl γ_g einer anderen δ_h modulo $\mathfrak{p}^M$ congruent sein müsste. Besteht aber eine Zerlegung von $F(\omega)$ in irreductible *ganzzahlige* Factoren für diese beliebig hohe Potenz $\mathfrak{p}^M$ eines Primdivisors, so besteht offenbar die gleiche Zerlegung für eine beliebig hohe Potenz $p^{\overline{M}}$ der zugehörigen Primzahl p, und auch für sie sind jene Factoren incongruent und irreductibel. Ist umgekehrt

$$(2)\qquad F(\omega) \equiv F_1(\omega)\,F_2(\omega)\,F_3(\omega) \pmod{p^M}$$

eine solche Zerlegung modulo p^M, so gilt sie auch für jedes $\bar{\mathfrak{p}}^M$ wenn $\bar{\mathfrak{p}}$ irgend ein Primfactor von p ist und die Wurzeln der Gleichungen $F_i(\omega)=0$ sind für diesen Modul bezw. den n conjugirten Zahlen $\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_n$ congruent. Welchen unter den Primdivisoren $\bar{\mathfrak{p}}$ von p man also auch der Untersuchung zu Grunde legt, man gelangt stets zu denselben n Reihenentwickelungen für die n Zahlen ω_i, nur wird die Zuordnung derselben eine andere, wenn man den Primdivisor $\mathfrak{p}$ durch einen anderen $\mathfrak{p}'$ ersetzt; und da diese Zuordnung für alle Sätze der Idealtheorie ganz unwesentlich ist, so eröffnet sich hier der Weg, um die ganze Theorie der algebraischen Körper ohne Benutzung auch nur eines Satzes der Idealtheorie sondern genau ebenso wie die Untersuchung der algebraischen Functionen einer

Variablen durch Benutzung der zugehörigen Reihenentwickelungen darzustellen. Ich gehe hierauf an anderer Stelle ausführlich ein, und beschränke mich hier darauf, die Hauptmomente dieser Untersuchung kurz hervorzuheben.

Zerlegt man eine irreductible ganzzahlige Function $F(\omega)$ successive für die Moduln $p, p^2, p^3, \cdots$ in ihre nicht weiter zerlegbaren Factoren, so besteht allgemein die Zerlegung für den Modul p^i auch für alle Potenzen mit niedrigerem Exponenten, jedoch brauchen diese Factoren für jene niedrigeren Potenzen noch nicht unzerlegbar zu sein. Da somit der Grad der irreductiblen Factoren mit wachsendem Exponenten nur zunehmen, aber niemals über n hinausgehen kann, so bleibt von einem bestimmten Modul p^h ab der Grad aller irreductiblen Factoren ungeändert, wie gross auch der Exponent von p^M angenommen werde. Eine obere Grenze für p^h ergiebt sich leicht aus der Betrachtung der in der Gleichungsdiscriminante $D(F(\omega))$ enthaltenen Potenz von p. Ferner kann für einen beliebig grossen Modul p^M die Aufsuchung aller irreductiblen Factoren $F_i(\omega)$ von $F(\omega)$ durch eine endliche Anzahl von Versuchen ausgeführt werden, da ihr Grad kleiner als n sein, und ihre Coefficienten unterhalb p^M liegen müssen. Es sei nun etwa:

$$F(\omega) \equiv F_1(\omega) \cdot F_2(\omega) \cdot F_3(\omega) \pmod{p^M}$$

jene Zerlegung für ein genügend grosses M; dann sind, wie man auch leicht direct zeigt, alle Factoren $F_i(\omega)$ für den Modul p^M incongruent. Ist dann z. B. λ der Grad von $F_1(\omega)$, so kann man wieder durch eine endliche Anzahl von Versuchen die beiden Gleichungen (9) und (10) des § 1

$$\text{(3a)} \qquad \varphi(t) = t^k + a_{k-1} t^{k-1} + \cdots + a_0 = 0,$$

$$\text{(3b)} \qquad \psi_1(\tau) = \tau^d + p\, C_{d-1}^{(1)} \tau^{d-1} + \cdots + p\, C_0^{(1)} = 0$$

so bestimmen, dass $kd = \lambda$ ist, und dass die Wurzeln $\gamma_1, \gamma_2, \cdots \gamma_\lambda$ der Congruenz:

$$F_1(\omega) \equiv 0 \pmod{p^M}$$

in der Form (S. Nr. 3 des § 1):

$$\text{(4)} \qquad \gamma_1 \equiv A_r^{(0)} \pi_1^{(1)^r} + A_{r+1}^{(0)} \pi_1^{(1)^{r+1}} + \cdots \pmod{p^M}$$

nebst ihren conjugirten darstellbar sind. Dann zeigt man leicht, dass für die Function $F_1(\omega)$ und für ein variables ω die Congruenz:

$$F_1(\omega) \equiv (\omega - \gamma_1) \cdots (\omega - \gamma_\lambda) \pmod{p^M}$$

besteht, und dass das Entsprechende für die beiden anderen Factoren $F_2(\omega)$ und $F_3(\omega)$ der Fall ist, so dass sich endlich für die ursprüngliche

Function $F(\omega)$ modulo p^M die folgende Zerlegung in conjugirte Linearfactoren ergiebt:

$$F(\omega) \equiv (\omega-\gamma_1)\cdots(\omega-\gamma_\lambda)\cdot(\omega-\delta_1)\cdots(\omega-\delta_\mu)\cdot(\omega-\varepsilon_1)\cdots(\omega-\varepsilon_\nu) \pmod{p^M}.$$

Aus dieser Congruenz folgt aber das wichtige Resultat, dass alle symmetrischen Functionen der n conjugirten algebraischen Zahlen $\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_n$ modulo p^M durch *dieselben* symmetrischen Functionen der conjugirten Zahlen $\gamma_1, \cdots \gamma_\lambda$; $\delta_1, \cdots \delta_\mu$; $\varepsilon_1, \cdots \varepsilon_\nu$ ersetzt, oder was dasselbe ist, dass die n conjugirten Körper $K(\omega_i)$ in Bezug auf die Theilbarkeit ihrer Individuen durch die Primzahl p eindeutig umkehrbar auf die conjugirten Körper $K(\gamma_g)$, $K(\delta_h)$, $K(\varepsilon_i)$ abgebildet werden können. Dann entspricht aber jeder Zahl $\bar{\omega}_1$ z. B. des Körpers $K(\omega_1)$ eindeutig eine Reihe (4) des Abbildungskörpers $K(\gamma_1)$, und für eine solche Reihe ist es nun leicht, die in ihr enthaltene ganze oder gebrochene Potenz der Primzahl p direct zu bestimmen.

Ersetzt man nämlich in der Gleichung (3b) die Grösse $\pi_1^{(1)}$ durch $p^{\frac{1}{d}}\varepsilon_1^{(1)}$, so erkennt man, dass die so definirte ganze algebraische Zahl $\varepsilon_1^{(1)}$ der Gleichung d^{ten} Grades genügt:

$$\bar{\psi}_1\left(\varepsilon_1^{(1)}\right) = \varepsilon^d + p^{\frac{d-1}{d}} C_{d-1}^{(1)} \varepsilon^{d-1} + p^{\frac{d-2}{d}} C_{d-2}^{(1)} \varepsilon^{d-2} + \cdots + C_0^{(1)} = 0;$$

$\varepsilon_1^{(1)}$ ist also eine *ganze* algebraische Zahl, deren Norm gleich $C_0^{(1)}$, also durch p nicht theilbar ist, oder $\varepsilon_1^{(1)}$ ist eine algebraische Einheit modulo p. Die Entwickelungszahl $\pi_1^{(1)}$ nebst allen ihren kd conjugirten ist also stets, mag $\psi(\pi) = 0$ eine reine oder eine gemischte Gleichung sein, äquivalent $p^{\frac{1}{d}}$, und hieraus folgt sofort, dass eine Zahl γ_1 des Körpers $K(\gamma_1)$ nebst allen ihren kd conjugirten äquivalent $p^{\frac{r}{d}}$ ist, wenn ihre Entwickelung in (4) mit der r^{ten} Potenz von $\pi_1^{(1)}$ beginnt.

Diese wenigen Andeutungen mögen genügen, um zu zeigen, dass und wie die Theorie der algebraischen Zahlen allein auf ihre Reihenentwickelungen modulo p^M gegründet werden können. Ich gehe jetzt zu einer genaueren Untersuchung der hier gefundenen Abbildungskörper $K(\gamma)$ auf der hier benutzten Grundlage der Idealtheorie über.

§ 6.

Es sei $K(\gamma_1)$ einer der im § 4 bestimmten Abbildungskörper $K(\alpha_1, \pi_1^{(1)})$, also α_1 und $\pi_1^{(1)}$ die zugehörigen Entwickelungszahlen, und $\lambda = kd$ seine Ordnung, endlich sei P derjenige Primtheiler von p innerhalb $K(\omega_1)$ welcher diesem Abbildungskörper zugeordnet ist. Dann besitzt p innerhalb

$K(\gamma_1)$ nur einen einzigen Primdivisor $\mathfrak{P}$, welche in $\pi_1^{(1)}$ ein Mal enthalten ist, also z. B. in der Linearform

$$\mathfrak{P} \sim p + u\pi_1^{(1)}$$

dargestellt werden könnte; es ist also:

$$\mathfrak{P} \sim p^{\frac{1}{d}},$$

und es sind die Ordnung und der Grad von $\mathfrak{P}$ bezw. gleich k und d, weil

$$\mathfrak{P}^d \sim p, \quad N(\mathfrak{P}) = p^k$$

ist. Die Primtheiler P von $K(\omega_1)$ und $\mathfrak{P}$ von $K(\gamma_1)$ besitzen also gleiche Ordnung und gleichen Grad, und sie entsprechen einander in der Weise, dass eine algebraische Zahl $\overline{\omega}$ von $K(\omega_1)$ dann und nur dann durch P^r theilbar ist, wenn ihr Bild $\overline{\gamma}$ in $K(\gamma_1)$ genau den Divisor $\mathfrak{P}^r$ enthält.

Die $\lambda = kd$ algebraischen Zahlen:

$$(1) \qquad \alpha_1^g \pi_1^{(1)^h} \qquad \begin{pmatrix} g = 0, 1, \cdots k-1 \\ h = 0, 1, \cdots d-1 \end{pmatrix}$$

bilden für alle modulo p ganzen algebraischen Zahlen von $K(\gamma_1)$ ein Fundamentalsystem; denn wegen der rationalen Unabhängigkeit jener λ Zahlen modulo $\mathfrak{P}^M$, ist jede solche ganze Zahl auf eine einzige Weise in der Form $\sum a_{gh} \alpha_1^g \pi_1^{(1)^h}$ darstellbar.

Bildet man die aus jenen λ Elementen (1) und ihren Conjugirten bestehende λ-reihige Determinante

$$\left| \alpha_r^g \pi_r^{(s)^h} \right| \qquad \begin{pmatrix} g = 0, 1, \cdots k-1 \\ h = 0, 1, \cdots d-1 \\ r = 1, 2, \cdots k \\ s = 1, 2, \cdots d \end{pmatrix},$$

so lehrt eine einfache Determinantenumformung, dass ihr Quadrat, d. h. die Körperdiscriminante $D_0(\gamma)$ den folgenden einfachen Werth hat:

$$D_0(\gamma) = D(\varphi)^d \cdot N_\alpha(D(\psi^{(1)})),$$

wo

$$D(\varphi) = \prod_{\varrho \gtrless \sigma} (\alpha_\varrho - \alpha_\sigma)$$

die Discriminante der Gleichung $\varphi(t) = 0$,

$$D(\psi^{(1)}) = \prod_{\beta \gtrless \gamma} \left(\pi_\beta^{(1)} - \pi_\gamma^{(1)}\right)$$

die Discriminante der Gleichung $\psi_1(\tau) = 0$ bedeutet, und $N(D(\psi^{(1)}))$ die Norm von $D(\psi^{(1)})$ d. h. das Product

$$N(D(\psi^{(1)})) = D(\psi^{(1)})\, D(\psi^{(2)}) \cdots D(\psi^{(k)})$$

bedeutet. Nun ist aber erstens $D(\varphi)$ durch p gar nicht theilbar, kann also fortgelassen werden, zweitens ist:

$$D(\psi^{(1)})\, D(\psi^{(2)}) \cdots D(\psi^{(k)}) = \prod_{r,s} \psi'\left(\pi_r^{(s)}\right)$$

wo sich jetzt das Product rechts auf alle $\lambda = kd$ conjugirten Zahlen $\pi_r^{(s)}$ bezieht; also ergiebt sich für $D_0(\gamma)$ der einfachere Ausdruck:

(2) $$D_0(\gamma) \sim N_\pi(\psi'(\pi))$$

wo die Norm in Bezug auf alle $\lambda = kd$ conjugirten Werthe zu bilden ist, welche $\psi'(\pi)$ für die λ conjugirten Zahlen $\pi_r^{(s)}$ annimmt.

Endlich enthält aber jede dieser λ Zahlen $\psi'\left(\pi_r^{(s)}\right)$ genau dieselbe gebrochene Potenz von p; da nämlich in

$$\psi'(\pi) = d\pi^{d-1} + p(d-1)C_{d-1}\pi^{d-2} + \cdots + pC_1,$$

wie oben bewiesen wurde, jeder Summand in Bezug auf p oder $\mathfrak{P}$ von verschiedener Ordnung ist, so besitzt jeder von diesen λ Factoren die Ordnungszahl ihres niedrigsten Gliedes; hieraus ergiebt sich also für $D_0(\gamma)$ die ganz einfache Gleichung:

(2a) $$D_0(\gamma) \sim (\psi'(\pi_1^{(1)}))^\lambda.$$

Es sei nun $\bar{d} - 1$ die Ordnungszahl von $\psi'(\pi_1^{(1)})$ in Bezug auf $\mathfrak{P}$ oder, was dasselbe ist, in Bezug auf den ursprünglichen Divisor P; die Zahl $\bar{d}$ möge die *Verzweigungsordnung oder die Verzweigungszahl* von P genannt werden; dann ergiebt sich aus (2) und (2a) die stets gültige Gleichung:

$$D_0(\gamma) \sim N(P^{\bar{d}-1}) \sim p^{k(\bar{d}-1)}.$$

Im Allgemeinen, falls nämlich die Ordnung d von P durch p nicht theilbar ist, ist stets:

$$\bar{d} = d,$$

da dann $\psi(\tau) = \tau^d - pC$, also $\psi'(\pi) = d\pi^{d-1}$ von der Ordnung $d-1$ ist. Ist dagegen $d = p^s e$ ein Multiplum von p, so ist $\psi(\tau) = 0$ im Allgemeinen eine gemischte Gleichung; ist dann:

$$\psi'(\pi) = d\pi^{d-1} + \cdots + piC_i\pi^{i-1} + \cdots + pC_1,$$

und ist etwa piC_i derjenige Coefficient in $\psi'(\pi)$ welcher einmal die niedrigste Potenz p^{δ_i} von p enthält, und für den zweitens der Exponent i möglichst klein ist, so besitzt $\psi'(\pi)$ die Ordnung des Gliedes $piC_i\pi^{i-1}$ d. h. es ist:

$$\bar{d} = d\delta_i + i$$

und es ist:

$$D_0(\gamma) \sim p^{k(d\delta_i + i - 1)}.$$

Der grösste Werth den die Ordnungszahl der Verzweigung $\bar{d}$ annehmen kann, wenn d durch p theilbar ist, ergiebt sich, wenn in $\psi'(\pi)$ das Anfangsglied $d\pi^{d-1}$ das Glied niedrigster Ordnung ist; alsdann ist:

$$\bar{d} = (s+1)\,d;$$

den kleinsten Werth von $\bar{d}$ erhält man dann, wenn $s = 0$ ist, d. h. in dem regulären Falle, wo d die Primzahl p nicht enthält; dann und nur dann ist

$$\bar{d} = d.$$

Man erhält also den folgenden ganz allgemeinen Satz:

Ist P ein Primtheiler von p von der Ordnung d und $K(\gamma)$ der zugehörige Abbildungskörper, so ist die Körperdiscriminante $K(\gamma)$ stets genau durch

$$N(P^{\bar{d}-1}) = p^{k(\bar{d}-1)}$$

theilbar. Die hier auftretende Zahl $\bar{d}$, die sogenannte Verzweigungszahl von P ist im Allgemeinen gleich der Ordnung d von P, nur falls $d = p^s e$ durch p theilbar ist, liegt sie zwischen $d+1$ und $(s+1)d$, beide Grenzen eingeschlossen, und kann in jedem Falle leicht direct bestimmt werden.

Wir stellen uns endlich die allgemeinere Aufgabe, ein vollständiges System aller rational unabhängigen Multipla von $\mathfrak{P}^{\varrho}$ für den Körper $K(\gamma)$ zu bilden, wenn ϱ irgend eine positive oder negative ganze Zahl bedeutet. Ein solches System haben wir in dem speciellen Falle $\varrho = 0$ in dem Fundamentalsystem $\alpha_1^g \pi_1^{(1)^h}$ in (1) gefunden; denn in der Form

$$\sum a_{gh}\,\alpha_1^g\,\pi_1^{(1)^h}$$

mit ganzzahligen Coefficienten sind ja in der That alle modulo p ganzen Zahlen, d. h. alle und nur die Multipla von $\mathfrak{P}^0$ enthalten. Multiplicirt man aber alle kd Zahlen von (1) mit $\pi_1^{(1)^\varrho}$, so erkennt man genau ebenso, wie vorher, dass die kd Zahlen:

$$(3) \qquad \alpha_1^g\,\pi_1^{(1)^{\varrho+h}} \qquad \begin{pmatrix} g = 0, 1, \cdots k-1 \\ h = 0, 1, \cdots d-1 \end{pmatrix}$$

ein Fundamentalsystem für alle Multipla von $\mathfrak{P}^{\varrho}$ bilden, und die gestellte Aufgabe ist somit gelöst.

Es sei

$$D_\varrho(\gamma) = \left| \alpha_r^g \cdot \pi_r^{(s)^{h+\varrho}} \right|^2 \qquad \begin{pmatrix} g = 0, 1, \cdots k-1 \\ h = 0, 1, \cdots d-1 \\ r = 1, 2, \cdots k \\ s = 1, 2, \cdots d \end{pmatrix}$$

die Discriminante dieses allgemeineren Fundamentalsystemes; da aus jeder Zeile der rechts stehenden Determinante der Factor $\pi_r^{(s)\varrho}$ herausgehoben werden kann, und nach der Unterdrückung desselben die vorher betrachtete Discriminante $D_0(\gamma)$ übrig bleibt, so ergiebt sich der wichtige Satz:

Ist $D_\varrho(\gamma)$ die Discriminante des Fundamentalsystemes (3) für den Divisor $\mathfrak{P}^\varrho$, also $D_0(\gamma)$ diejenige für den Divisor $\mathfrak{P}^0$, so besteht die Beziehung:

$$D_\varrho(\gamma) = (N(\mathfrak{P}^\varrho))^2 \cdot D_0(\gamma) = (NP^\varrho)^2 N(P^{\bar{d}-1})(p^{k\varrho})^2 p^{k(\bar{d}-1)}.$$

§ 7.

Es sei jetzt wieder $K(\omega_1)$ ein ganz beliebiger Körper n^{ter} Ordnung, p eine beliebige Primzahl, und wir nehmen wieder der Einfachheit wegen an, dass

$$(1) \qquad p \sim P^d Q^e R^f$$

die Zerlegung von p in Primdivisoren innerhalb $K(\omega_1)$ ist. Sind dann k, l, m die Ordnungen von P, Q, R, so sind nach den vorher bewiesenen Sätzen die n conjugirten Körper

$$(2) \qquad K(\omega_1), K(\omega_2), \cdots K(\omega_n)$$

modulo $\mathfrak{p}^M$ eindeutig auf die $\lambda + \mu + \nu = n$ conjugirten Körper niedrigster Ordnung

$$(2\text{a}) \qquad K(\gamma_1), \cdots K(\gamma_\lambda); \quad K(\delta_1), \cdots K(\delta_\mu); \quad K(\varepsilon_1), \cdots K(\varepsilon_\nu)$$

abgebildet, deren Ordnungszahlen bezw.:

$$\lambda = kd, \quad \mu = le, \quad \nu = mf$$

sind, und die nach der im § 1 angegebenen Methode direct bestimmt werden können; hierbei bedeutet $\mathfrak{p}$, wie stets im Folgenden irgend einen Primtheiler von p für den Galois'schen Körper niedrigster Ordnung unter welchem die conjugirten Körper (2) und (2a) sämmtlich enthalten sind.

Es sei nun ξ_1 irgend eine Zahl von $K(\omega_1)$ und

$$\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_n$$

die zu ξ_1 conjugirten Zahlen der Körper (2); dann ist z. B. ξ_1 einer Zahl $\bar{\gamma}_1$ des Abbildungskörpers $K(\gamma_1) = K(\alpha_1, \pi_1^{(1)})$ congruent, d. h. es ist:

$$\xi_1 \equiv \bar{\gamma}_1 \equiv \sum_{g=0}^{k-1} \sum_{h=0}^{d-1} a_{gh} \alpha_1^g \pi_1^{(1)^h},$$

wenn α_1 und $\pi_1^{(1)}$, wie im vorigen Abschnitte, die zu $K(\gamma_1)$ gehörigen Entwickelungszahlen bedeuten, und die entsprechende Darstellung mit denselben Coefficienten besteht für die λ ersten $\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_\lambda$ unter den

conjugirten Zahlen $\mathfrak{x}_i$ welche auf die conjugirten Körper $K(\gamma_1)\cdots K(\gamma_\lambda)$ abgebildet sind.

Im Folgenden will ich die λ Zahlen $\alpha_1^g\pi_1^{(1)^h}$ des Fundamentalsystemes für $K(\gamma_1)$ in beliebiger aber fester Reihenfolge durch:

$$\gamma_1^{(1)}, \gamma_1^{(2)}, \cdots \gamma_1^{(\lambda)},$$

ihre conjugirten für $K(\gamma_2), \cdots K(\gamma_\lambda)$ durch:

$$\begin{gathered}\gamma_2^{(1)}, \gamma_2^{(2)}, \cdots \gamma_2^{(\lambda)},\\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ \gamma_\lambda^{(1)}, \gamma_\lambda^{(2)}, \cdots \gamma_\lambda^{(\lambda)}\end{gathered}$$

bezeichnen. In gleicher Weise mögen:

$$\delta_h^{(1)}, \delta_h^{(2)}, \cdots \delta_h^{(\mu)} \quad \text{und} \quad \varepsilon_i^{(1)}, \varepsilon_i^{(2)}, \cdots \varepsilon_i^{(\nu)} \qquad \begin{pmatrix} h=1,2,\cdots\lambda \\ i=1,2,\cdots\nu \end{pmatrix}$$

die conjugirten Fundamentalsysteme für die Körper $K(\delta_h)$ und $K(\varepsilon_i)$ bezeichnen. Bei dieser Bezeichnung seien dann:

$$(3)\quad \begin{aligned} \mathfrak{x}_g &\equiv \bar{\gamma}_g \equiv a_1\gamma_g^{(1)} + a_2\gamma_g^{(2)} + \cdots + a_\lambda\gamma_g^{(\lambda)} && (g=1,2,\cdots\lambda)\\ \mathfrak{x}_{\lambda+h} &\equiv \bar{\delta}_h \equiv b_1\delta_h^{(1)} + b_2\delta_h^{(2)} + \cdots + b_\mu\delta_h^{(\mu)} && (h=1,2,\cdots\mu)\\ \mathfrak{x}_{\lambda+\mu+i} &\equiv \bar{\varepsilon}_i \equiv c_1\varepsilon_i^{(1)} + c_2\varepsilon_i^{(2)} + \cdots + c_\nu\varepsilon_i^{(\nu)} && (i=1,2,\cdots\nu)\end{aligned}$$

die Darstellungen modulo $\mathfrak{p}^M$ der Conjugirten Zahlen $\mathfrak{x}_1, \cdots \mathfrak{x}_n$ innerhalb der n Abbildungskörper $K(\gamma_g)$, $K(\delta_h)$, $K(\varepsilon_i)$.

Jede der Zahlen $\gamma_1^{(r)} = \alpha_1^g\pi_1^{(1)^h}$ ist nun durch eine ganz bestimmte und zwar eine echt gebrochene Potenz von p nämlich durch $p^{\frac{h}{d}}$ theilbar, und dasselbe gilt von allen ihren λ conjugirten Zahlen $\gamma_1^{(r)}, \gamma_2^{(r)}, \cdots \gamma_\lambda^{(r)}$. Daraus folgt, dass eine Zahl:

$$\bar{\gamma}_1 = a_1\gamma_1^{(1)} + a_2\gamma_1^{(2)} + \cdots + a_\lambda\gamma_1^{(\lambda)} = \sum a_{gh}\alpha_1^g\pi_1^{(1)^h}$$

nebst ihren λ conjugirten genau durch die niedrigste Potenz von p theilbar ist, welche in den λ Producten $a_1\gamma_1^{(1)}, \cdots a_\lambda\gamma_1^{(\lambda)}$ enthalten ist. Ist also p^ν der grösste gemeinsame Theiler der λ rationalen Zahlen $(a_1, \cdots a_\lambda)$ und ist $a_r\gamma_1^{(r)} = a_{gh}\alpha_1^g\pi_1^{(1)^h}$ das Product, dessen Coefficient a_r genau durch p^ν theilbar ist, und für welche ausserdem der Exponent h von $\pi_1^{(1)}$ möglichst klein ist, so ist die Zahl $\bar{\gamma}_1$ nebst ihren λ conjugirten $\bar{\gamma}_2, \cdots \bar{\gamma}_\lambda$ genau durch $p^{\nu+\frac{h}{d}}$ theilbar, weil mindestens diese Potenz von p in allen λ Producten $a_i\gamma_1^{(i)}$, enthalten ist, aber eine von ihnen, nämlich $a_r\gamma_1^{(r)}$, durch keine höhere Potenz theilbar ist. Die so bestimmte Potenz von p soll *der Theiler der λ conjugirten Zahlen* $(\bar{\gamma}_1, \cdots \bar{\gamma}_\lambda)$ genannt werden.

Es seien jetzt:

$$(4) \qquad \bar{\gamma}_1, \cdots \bar{\gamma}_\lambda; \quad \bar{\delta}_1, \cdots \bar{\delta}_\mu; \quad \bar{\varepsilon}_1, \cdots \bar{\varepsilon}_\nu$$

die n conjugirten Zahlen der Abbildungskörper denen $\mathfrak{x}_1, \cdots \mathfrak{x}_n$ modulo $\mathfrak{p}^M$ congruent sind und es mögen:

$$p^{\nu+\frac{h}{d}}; \quad p^{\nu'+\frac{h'}{e}}; \quad p^{\nu''+\frac{h''}{f}}$$

die Theiler bezw. der Zahlen $\bar{\gamma}_g, \bar{\delta}_h, \bar{\varepsilon}_i$ sein. Dann nenne ich die niedrigste unter jenen drei Potenzen *den Theiler aller jener n conjugirten algebraischen Zahlen* (4). Ist p^ϱ jener Theiler, so ist dies die niedrigste Potenz von p, welche in allen Producten

$$a_f \gamma^{(f)}, \quad b_g \delta^{(g)}, \quad c_h \varepsilon^{(h)}$$

in (3) enthalten ist, und es giebt unter ihnen mindestens ein Glied, welches genau durch p^ϱ theilbar ist. Wir wollen das erste unter jenen Producten welches diese Eigenschaft hat, *das zum Theiler p^ϱ gehörige Product* nennen.

Es sei nun

$$(5) \qquad \mathfrak{x}_1^{(1)}, \mathfrak{x}_1^{(2)}, \cdots \mathfrak{x}_1^{(n)}$$

ein beliebiges unabhängiges System des Körpers $K(\omega_1)$. Wir wollen jetzt die aus den n^2 zu den Zahlen (5) conjugirten Elementen $\left(\mathfrak{x}_i^{(1)}, \mathfrak{x}_i^{(2)}, \cdots \mathfrak{x}_i^{(n)}\right)$ gebildete Matrix

$$S = \left(\mathfrak{x}_h^{(i)}\right) \qquad (h, i = 1, 2, \cdots n)$$

auf ihre Theilbarkeit durch die Primzahl p untersuchen. Offenbar genügt es, ihre n^2 Elemente $\mathfrak{x}_h^{(i)}$ modulo $\mathfrak{p}^M$ zu betrachten; denn die für diesen Primdivisor gefundenen Resultate gelten dann auch für jeden anderen, und somit auch für p selbst. Thun wir dies aber, so können jene Zahlen durch die ihnen congruenten der Abbildungskörper ersetzt werden, und dies möge in dem System S bereits ausgeführt sein; dann sind die λ ersten Zeilen conjugirte Zahlen von $K(\gamma_1), \cdots K(\gamma_\lambda)$, die μ folgenden Zahlen von $K(\delta_1), \cdots K(\delta_\mu)$, die ν letzten gehören zu $K(\varepsilon_1), \cdots K(\varepsilon_\nu)$.

Es seien nun

$$p^{\varrho_1}, p^{\varrho_2}, \cdots p^{\varrho_n}$$

die Theiler der in der ersten, zweiten, $\cdots n^{\text{ten}}$ Verticalreihe stehenden conjugirten Elemente $\left(\mathfrak{x}_1^{(i)}, \mathfrak{x}_2^{(i)}, \cdots \mathfrak{x}_n^{(i)}\right)$, und jene Zahlen mögen von vornherein so geordnet sein, dass $\varrho_1 \leqq \varrho_2 \leqq \cdots \leqq \varrho_n$ ist, dass also die Elemente der ersten Colonne den kleinsten Theiler p^{ϱ_1} besitzen. Es sei etwa $a_i^{(1)} \gamma_i^{(1)}$ das in $\mathfrak{x}_1^{(1)}$ auftritt, das zu p^{ϱ_1} gehörige Glied, welches also genau p^{ϱ_1} enthält, während alle anderen in S auftretenden Zahlen dieselbe oder

eine höhere Potenz von p enthalten. Dann kann man von jedem der $(n-1)$ folgenden Zahlen $\xi^{(2)}, \xi^{(3)}, \cdots \xi^{(n)}$ ein solches Multiplum von $\xi^{(1)}$ abziehen, dass in ihnen die entsprechenden mit γ_i multiplicirten Elemente sämmtlich fortfallen, da ja ihre Zahlcoefficienten $a_i^{(1)}, \cdots a_i^{(n)}$ mindestens dieselbe Potenz von p enthalten als $a_i^{(1)}$. Thut man dies, so ergiebt sich ein neues äquivalentes System:

$$(5\text{a}) \qquad \bar{\xi}^{(1)}, \bar{\xi}^{(2)}, \cdots \bar{\xi}^{(n)},$$

für welches die Theiler $p^{\bar{e}_2}, \cdots p^{\bar{e}_n}$ der $(n-1)$ letzten Zahlen offenbar ebenfalls mindestens gleich p^{e_1} sind, da ja z. B. $\bar{\xi}^{(2)} = \xi^{(2)} - g\xi^{(1)}$ ist, und $\xi^{(1)}$ und $\xi^{(2)}$ mindestens den Theiler p^{e_1} enthalten. Dieses neue System hat aber weiter die Eigenschaft, dass in seinen $(n-1)$ letzten Elementen die Zahl $\gamma_i^{(1)}$ nebst allen ihren λ conjugirten gar nicht mehr vorkommt.

Es sei jetzt wieder $\bar{\xi}^{(2)}$ diejenige unter den $n-1$ letzten Zahlen von (5a), deren Theiler $p^{\bar{e}_2}$ möglichst klein ist, und es sei hier etwa: $b_k \delta_k^{(1)}$ das diesem Theiler zugehörige Glied. Dann kann man wieder von $\bar{\xi}^{(3)}, \cdots \bar{\xi}^{(n)}$ solche ganzzahlige Multipla von $\bar{\xi}^{(2)}$ abziehen, dass die neuen Elemente $\bar{\bar{\xi}}^{(3)}, \cdots \bar{\bar{\xi}}^{(n)}$ alle das Element $\delta_k^{(1)}$ nebst seinen μ conjugirten nicht mehr enthalten.

Geht man in derselben Weise fort, so erhält man zuletzt ein äquivalentes System:

$$\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \cdots \eta^{(n)},$$

dessen Theiler

$$p^{\sigma_1}, p^{\sigma_2}, \cdots p^{\sigma_n}$$

eine zunehmende (bezw. nicht abnehmende) Reihe bilden und für welches das in jeder Colonne zum Colonnentheiler zugehörige Glied γ_i, δ_k, ε_l nebst seinen Conjugirten in allen folgenden Colonnen fehlt.

Nun ist aber die Anzahl aller Zahlen $\gamma_1, \cdots \gamma_\lambda$; $\delta_1, \cdots \delta_\mu$; $\varepsilon_1, \cdots \varepsilon_\nu$ genau gleich n. Da aber in jeder folgenden Colonne mindestens eine derselben fortfällt, so kann in der letzten überhaupt nur ein einziges von diesen Elementen, oder gar keins vorhanden sein. Das letztere ist aber sicher nicht möglich, denn sonst wären ja die n conjugirten Zahlen $\left(\eta_1^{(n)}, \cdots \eta_n^{(n)}\right)$ dieser Colonne durch $\mathfrak{p}^M$ theilbar, mithin wäre also die ganze Determinante $\left|\eta_h^{(i)}\right|$ und also auch die ihr äquivalente $\left|\xi_h^{(i)}\right|$ durch die beliebig hohe Potenz $\mathfrak{p}^M$ theilbar, d. h. sie müsste gleich Null sein; die n Elemente $\xi^{(1)}, \cdots \xi^{(n)}$ wären also nicht rational unabhängig. Also muss nothwendig der erste Fall eintreten, es ergiebt sich demnach der Satz:

Jedes unabhängige System $\left(\xi_i^{(1)}, \cdots \xi_i^{(n)}\right)$ kann in ein äquivalentes $\left(\eta_i^{(1)}, \cdots \eta_i^{(n)}\right)$ transformrt werden, in dessen letzter Colonne alle Glieder $\gamma, \delta, \varepsilon$ mit Ausnahme eines einzigen fehlen.

§ 8.

Ich benutze die im vorigen Abschnitte angegebene einfache Transformation zunächst, um zu zeigen, dass und wie man von einem beliebigen Systeme $(\xi^{(1)}, \cdots \xi^{(n)})$ von unabhängigen ganzen algebraischen Zahlen ausgehend zu einem Fundamentalsysteme für die ganzen Zahlen des Körpers $K(\omega)$ kommen, und zugleich, und das ist das Wesentliche, die charakteristischen Eigenschaften jener Systeme auffinden kann.

Formt man das System $(\xi^{(1)}, \cdots \xi^{(n)})$ in der oben angegebenen Weise um, so erhält man ein äquivalentes System $(\eta^{(1)}, \cdots \eta^{(n)})$ von ganzen Zahlen, für dessen letztes Element nebst seinen λ ersten Conjugirten die folgenden Congruenzen modulo $\mathfrak{p}^M$ bestehen:

$$\eta_i^{(n)} \equiv a \gamma_i^{(\varrho)} \qquad (i = 1, 2, \cdots \lambda),$$

während alle $(\mu + \nu)$ folgenden Elemente $\eta_{\lambda+1}^{(n)}, \cdots \eta_n^{(n)}$ durch $\mathfrak{p}^M$ theilbar sind. Ich habe hier angenommen, dass $\gamma^{(\varrho)}$ das eine Element ist, welches in der letzten Verticalreihe d. h. in der Entwickelung des letzten Elementes $\eta^{(n)}$ allein auftritt.

Ist nun die ganze Zahl a genau durch p^ν theilbar, ist also $a = p^\nu e$ wo e p nicht mehr enthält, so kann man $\eta^{(n)}$ durch

$$\bar{\eta}^{(n)} = \frac{\eta^{(n)}}{p^\nu}$$

ersetzen, ohne dass das neue System $(\eta^{(1)}, \cdots \eta^{(n-1)}, \bar{\eta}^{(n)})$ aufhört, ein rational unabhängiges System ganzer algebraischer Zahlen zu sein; denn auch $\bar{\eta}^{(n)}$ enthält ja keinen Primtheiler von p in negativer Potenz und stimmt in Bezug auf alle übrigen Primtheiler mit $\eta^{(n)}$ überein. In diesem neuen Systeme $\left(\eta_i^{(1)}, \cdots \eta_i^{(n-1)}, \bar{\eta}_i^{(n)}\right)$ enthält also die letzte Colonne ebenfalls nur das eine Element $\gamma^{(\varrho)}$, aber multiplicirt mit e, d. h. mit einer Einheit modulo p, während in allen früheren Colonnen die Zahl $\gamma^{(\varrho)}$ mit einem ganzzahligen Coefficienten multiplicirt ist, welcher also p mindestens ebenso oft enthält, wie die Einheit e. Man kann also jetzt von jedem der $(n-1)$ ersten Elemente $\eta^{(1)}, \cdots \eta^{(n-1)}$ ein solches ganzzahliges Multiplum des letzten $\bar{\eta}^{(n)}$ abziehen, dass jedes der neuen Elemente

$$\bar{\eta}^{(i)} = \eta^{(i)} - g \bar{\eta}^{(n)}$$

die Zahl $\gamma^{(\varrho)}$ nebst allen ihren conjugirten gar nicht mehr enthält, dass also $\gamma^{(\varrho)}$, und zwar mit einer Einheit multiplicirt, allein in der letzten Colonne auftritt.

In dem so transformirten Systeme $(\bar{\eta}^{(1)}, \cdots \bar{\eta}^{(n-1)}, \bar{\eta}^{(n)})$ enthalten nun die conjugirten Elemente der vorletzten Colonne nur eine einzige der

Zahlen $\gamma^{(i)}$, $\delta^{(k)}$, $\varepsilon^{(l)}$; sei etwa $\delta^{(\sigma)}$ das einzige hier auftretende Element, d. h. es mögen von den n zu $\bar{\eta}^{(n-1)}$ conjugirten Zahlen die λ ersten und die ν letzten durch $\mathfrak{p}^M$ theilbar sein, während für die μ mittleren:

$$\bar{\eta}_{\lambda+k}^{(n-1)} \equiv b_\sigma \delta_k^{(\sigma)} \qquad (k = 1, 2, \cdots \mu)$$

sein möge. Dividiren wir dann $\bar{\eta}^{(n-1)}$ wieder durch die höchste in dem Coefficienten b_σ enthaltene Potenz von p, so können wir jetzt genau wie oben das Element $\delta^{(\sigma)}$ nebst allen seinen Conjugirten aus allen vorhergehenden Colonnen fortschaffen, während es in der letzten schon von selbst fehlt. Geht man in derselben Weise fort, so erhält man zuletzt ein System von n unabhängigen ganzen algebraischen Zahlen des Körpers $K(\omega_1)$ nebst ihren Conjugirten, in dessen Colonnen immer eins und nur eins der Elemente γ, δ, ε, multiplicirt mit einer ganzzahligen Einheit modulo p auftritt. Ordnet man jene Elemente so, dass zuerst alle Zahlen $\gamma^{(1)}, \cdots \gamma^{(\lambda)}$, dann $\delta^{(1)}, \cdots \delta^{(\mu)}$, endlich $\varepsilon^{(1)}, \cdots \varepsilon^{(\nu)}$ auftreten, und bezeichnet man jedesmal z. B. das Product aus $\gamma^{(i)}$ mit der zugehörigen für das Weitere unwesentlichen ganzzahligen Einheit e wiederum durch $\gamma^{(i)}$, so ergiebt sich das folgende wichtige Resultat:

Es giebt stets ein System $(\xi^{(1)}, \cdots \xi^{(n)})$ von ganzen algebraischen Zahlen eines beliebigen Körpers $K(\omega)$ für welche das zugehörige algebraische System $\left(\xi_k^{(i)}\right)$ modulo $\mathfrak{p}^M$ congruent ist dem folgenden einfachen Systeme:

$$(S) \equiv \begin{pmatrix} \gamma_1^{(1)} \cdots \gamma_1^{(\lambda)}, & 0 \cdots 0, & 0 \cdots 0 \\ \vdots & & \\ \gamma_\lambda^{(1)} \cdots \gamma_\lambda^{(\lambda)}, & 0 \cdots 0, & 0 \cdots 0 \\ 0 \cdots 0, & \delta_1^{(1)} \cdots \delta_1^{(\mu)}, & 0 \cdots 0 \\ & \vdots & \\ 0 \cdots 0, & \delta_\mu^{(1)} \cdots \delta_\mu^{(\mu)}, & 0 \cdots 0 \\ 0 \cdots 0, & 0 \cdots 0, & \varepsilon_1^{(1)} \cdots \varepsilon_1^{(\nu)} \\ & & \vdots \\ 0 \cdots 0, & 0 \cdots 0, & \varepsilon_\nu^{(1)} \cdots \varepsilon_\nu^{(\nu)} \end{pmatrix} (\text{mod. } \mathfrak{p}^M),$$

wo

$$\Gamma = \left(\gamma_i^{(\varkappa)}\right), \quad \Delta = \left(\delta_{i'}^{(\varkappa')}\right), \quad \mathrm{E} = \left(\varepsilon_{i''}^{(\varkappa'')}\right)$$

Fundamentalsysteme modulo $\mathfrak{p}$ für die Abbildungskörper $K(\gamma)$, $K(\delta)$, $K(\varepsilon)$ sind. Für dieses System ist also:

$$S \equiv \begin{pmatrix} \Gamma, & 0, & 0 \\ 0, & \Delta, & 0 \\ 0, & 0, & \mathsf{E} \end{pmatrix} \pmod{\mathfrak{p}^M}$$

d. h. es zerfällt modulo $\mathfrak{p}^M$ in die drei Partialsysteme $\Gamma, \Delta, \mathsf{E}$ entsprechend den zugehörigen Abbildungskörpern.

Ein solches System $\xi^{(1)}, \cdots \xi^{(n)}$ ist aber auch sicher ein Fundamentalsystem modulo p für den Körper $K(\omega_1)$, denn eine Zahl:

$$\xi = u_1 \xi_1^{(1)} + \cdots + u_n \xi_n^{(n)}$$

ist nur dann durch p algebraisch theilbar, wenn alle ihre n Conjugirten den Galois'schen Primtheiler $\mathfrak{p}$ ebenso oft enthalten, als dieser in p vorkommt. Ist also p genau durch $\mathfrak{p}^r$ theilbar, und ersetzt man jene n conjugirten Zahlen durch die ihnen modulo $\mathfrak{p}^M$ congruenten der Abbildungskörper, so erhält man die drei Systeme von bezw. λ, μ, ν Congruenzen:

$$\begin{aligned} &u_1 \gamma_g^{(1)} + \cdots + u_\lambda \gamma_g^{(\lambda)} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^r}, \quad (g = 1, 2, \cdots \lambda) \\ &u_{\lambda+1} \delta_h^{(1)} + \cdots + u_{\lambda+\mu} \delta_h^{(\mu)} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^r}, \quad (h = 1, 2, \cdots \mu) \\ &u_{\lambda+\mu+1} \varepsilon_i^{(1)} + \cdots + u_n \varepsilon_i^{(\nu)} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^r}, \quad (i = 1, 2, \cdots \nu) \end{aligned}$$

aus denen unmittelbar hervorgeht, dass die n Coefficienten u_h in der That alle durch p theilbar sein müssen. So ergiebt sich also leicht der ganz allgemeine Satz:

> Ein System $(\xi^{(1)}, \cdots \xi^{(n)})$ ist dann und nur dann ein Fundamentalsystem für die ganzen Zahlen des zugehörigen Körpers, wenn es für jede Primzahl p äquivalent ist einem anderen, welches modulo $\mathfrak{p}^M$ in die zu p gehörigen Partialsysteme $\Gamma, \Delta, \cdots \mathsf{E}$ zerfällt, wenn $\mathfrak{p}$ irgend einen Galois'schen Primtheiler von p für das betrachtete Gebiet bedeutet.

Ganz dasselbe Verfahren führt nun auch zur Lösung der folgenden Aufgabe, welche als ein Grundproblem der höheren Arithmetik bezeichnet werden kann:

Es sei

$$\mathfrak{D} = P^\varrho Q^\sigma R^\tau \cdots S^\upsilon$$

ein beliebiger Divisor des Körpers $K(\omega_1)$, $P, Q, \cdots S$, also Primfactoren innerhalb $K(\omega_1)$, welche natürlich auch zu verschiedenen reellen Primzahlen $p, q, \cdots$ gehören können, und $\varrho, \sigma, \cdots \upsilon$ bedeuten ganzzahlige Exponenten, welche positiv, oder negativ, oder aber auch Null sein können. Die Gesammtheit aller Zahlen von $K(\omega_1)$ welche Multipla von $\mathfrak{D}$ sind, bildet dann einen Theilbereich dieses Körpers, *das zu* $\mathfrak{D}$ *gehörige Ideal* $J(\mathfrak{D})$. Wir stellen uns nun die Aufgabe, ein Fundamentalsystem für alle Multipla von $\mathfrak{D}$ zu suchen, d. h. ein System:

$$\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \cdots \eta^{(n)}$$

von n solche Zahlen von $J(\mathfrak{D})$ zu finden, dass alle Multipla von $\mathfrak{D}$ und nur sie in der Form:

$$u_1\eta^{(1)} + \cdots + u_n\eta^{(n)}$$

mit ganzzahligen Coefficienten darstellbar sind.

Ist speciell $\mathfrak{D} = 1$, so ist $J(\mathfrak{D}) = J(1)$ der Bereich aller *ganzen* algebraischen Zahlen; die vorher gelöste Aufgabe ist also ein Specialfall dieser allgemeineren.

Es sei nun p irgend eine reelle Primzahl, $p \sim P^d Q^e R^f$ ihre Zerlegung innerhalb $K(\omega_1)$ und es seien $P^\varrho, Q^\sigma, R^\tau$ die Potenzen jener Primfactoren, welche in $\mathfrak{D}$ auftreten, wobei natürlich auch einige von den Exponenten ϱ, σ, τ Null sein können, wenn der zugehörige Primfactor gar nicht in $\mathfrak{D}$ vorkommt. Dann zeige ich, dass man ein beliebiges System $(\xi^{(1)}, \cdots \xi^{(n)})$ von unabhängigen Zahlen stets so umformen kann, dass es ein Fundamentalsystem zunächst für das Product $P^\varrho Q^\sigma R^\tau$ der zu p gehörigen Primfactoren von $\mathfrak{D}$ ist, während es in Bezug auf jede andere Primzahl $q, r, \cdots$ gar nicht geändert ist.

Zu diesem Zwecke kann und will ich gleich voraussetzen, dass alle n Elemente $\xi^{(1)}, \cdots \xi^{(n)}$ bereits zu $J(\mathfrak{D})$ gehören, also Multipla von $\mathfrak{D}$ sind, da man dies im entgegengesetzten Falle durch Multiplication derselben mit geeignet gewählten reellen ganzen Zahlen stets erreichen kann. Ich betrachte dann wieder das zugehörige algebraische System:

$$S = \left(\xi_g^{(h)}\right) \qquad (g, h = 1, 2, \cdots n)$$

modulo $\mathfrak{p}^M$, wo $\mathfrak{p}$ der vorher benutzte Primtheiler von p ist, und ersetze die n^2 Zahlen $\xi_g^{(h)}$ durch die ihnen congruenten der n Abbildungskörper $K(\gamma)$, $K(\delta)$, $K(\varepsilon)$. Es seien dann:

$$\bar{\gamma}^{(1)}, \cdots \bar{\gamma}^{(\lambda)}; \quad \bar{\delta}^{(1)}, \cdots \bar{\delta}^{(\mu)}; \quad \bar{\varepsilon}^{(1)}, \cdots \bar{\varepsilon}^{(\nu)}$$

die $\lambda + \mu + \nu$ Elemente der Partialsysteme ϱ^{ter}, σ^{ter} und τ^{ter} Ordnung für diese Abbildungskörper, welche für diese die Fundamentalsysteme für die Multipla bezw. von $P^\varrho, Q^\sigma, R^\tau$ sind; dann besteht z. B. das erste Partialsystem aus den λ Elementen:

$$\text{(1)} \qquad \alpha_1^g \, \pi_1^{(1)^{h+\varrho}} \qquad \begin{pmatrix} g = 0, 1, \cdots k-1 \\ h = 0, 1, \cdots d-1 \end{pmatrix}$$

u. s. w. Ist dies der Fall, so sind die n^2 Zahlen $\left(\xi_g^{(h)}\right)$ von S modulo $\mathfrak{p}^M$ homogen und linear mit *ganzzahligen* Coefficienten durch die Elemente (1) und ihre Conjugirten darstellbar, genau ebenso, wie bei dem vorher betrachteten Falle ($\mathfrak{D} = 1$) alle Elemente durch die n Zahlen

$$\gamma^{(1)}, \cdots \gamma^{(\lambda)}; \quad \delta^{(1)}, \cdots \delta^{(\mu)}; \quad \varepsilon^{(1)}, \cdots \varepsilon^{(\nu)}$$

ganzzahlig darstellbar waren. Transformirt man also dieses System $\left(\xi_g^{(h)}\right)$ wörtlich ebenso wie dies in dem speciellen Falle $\mathfrak{D} = 1$ vorher geschah, so gelangt man auch wörtlich zu demselben Resultate, und man erhält so den ganz allgemeinen Satz:

In dem zu einem Divisor $\mathfrak{D}$ gehörigen Ideale $J(\mathfrak{D})$ existirt stets ein System $(\xi^{(1)}, \cdots \xi^{(n)})$ algebraischer Zahlen, dessen zugehöriges System $S = \left(\xi_g^{(h)}\right)$ modulo $\mathfrak{p}^M$ dem folgenden Systeme äquivalent ist:

$$S \equiv \begin{pmatrix} \Gamma_\varrho & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_\sigma & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{E}_\tau \end{pmatrix} \pmod{\mathfrak{p}^M}.$$

Hier ist $\mathfrak{p}$ ein Galois'scher Primtheiler der Primzahl p, und es bedeutet z. B.:

$$\Gamma_\varrho = \begin{pmatrix} \bar{\gamma}_1^{(1)} & \cdots & \bar{\gamma}_1^{(\lambda)} \\ \vdots & & \\ \bar{\gamma}_\lambda^{(1)} & \cdots & \bar{\gamma}_\lambda^{(\lambda)} \end{pmatrix}$$

ein Partialsystem ϱ^{ter} Ordnung des Abbildungskörpers $K(\gamma)$, u. s. w.; ein solches System $(\xi^{(1)}, \cdots \xi^{(n)})$ ist umgekehrt auch sicher ein Fundamentalsystem für alle Multipla von

$$P^\varrho Q^\sigma R^\tau.$$

Macht man nun dieselbe Reduction für alle in $\mathfrak{D}$ auftretenden Primzahlen $q, r, \cdots$ für welche das System noch kein Fundamentalsystem sein sollte, so erhält man *nach einer endlichen Anzahl* solcher Umformungen ein System $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \cdots \xi^{(n)}$, welches in Bezug auf *jede* Primzahl p ein Fundamentalsystem für $J(\mathfrak{D})$ ist, welches somit also ein absolutes Fundamentalsystem für die Multipla von $\mathfrak{D}$ ist. Da ferner jedes andere Fundamentalsystem für $\mathfrak{D}$ dem hier gefundenen offenbar äquivalent ist, so ergiebt sich der folgende wichtige und meines Wissens noch nicht ausgesprochene Satz, welcher einmal die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür enthält, dass ein System $(\xi^{(1)}, \cdots \xi^{(n)})$ überhaupt ein Fundamentalsystem für einen algebraischen Divisor ist, und der zweitens erlaubt den zugehörigen Divisor $\mathfrak{D}$ aus seinem Fundamentalsysteme zu bestimmen.

I) Ein System $(\xi^{(1)}, \cdots \xi^{(n)})$ ist dann und nur dann ein Fundamentalsystem für ein Ideal, wenn es für einen beliebigen Galois'schen Primtheiler $\mathfrak{p}$ modulo $\mathfrak{p}^M$ in Partialsysteme

$$\Gamma_\varrho, \Delta_\sigma, \cdots \mathrm{E}_\tau$$

zerfällt, entsprechend der Zerlegung:

$$p \sim P^d Q^e \cdots R^f$$

der zu $\mathfrak{p}$ gehörigen Primzahl p in ihre Primfactoren für $K(\omega_1)$, und wenn dasselbe für jede andere Primzahl $q, r, \cdots$ der Fall ist.

II) Ist ferner P irgend ein Primtheiler des Körpers $K(\omega_1)$ und ϱ die Ordnung des zugehörigen Partialsystemes Γ_ϱ für das System $(\xi^{(1)}, \cdots \xi^{(n)})$, so ist

$$\mathfrak{D} = \prod_{(P)} P^\varrho$$

der Divisor, für welchen $(\xi^{(1)}, \cdots \xi^{(n)})$ ein Fundamentalsystem ist, wenn das Product auf alle Primfactoren des Körpers $K(\omega_1)$ erstreckt wird.

§ 9.

Durch den am Schlusse des letzten Abschnittes bewiesenen Satz kann man die Richtigkeit einer grösseren Anzahl von Fundamentalsätzen der Idealtheorie direct in Evidenz setzen, deren Beweis sonst grosse und manchmal nicht völlig überwundene Schwierigkeiten bot. So habe ich in zwei kleineren Notizen die Aequivalenz der Körperdiscriminante und der Discriminante der Fundamentalgleichung bewiesen, und die Theiler dieser Körperdiscriminante vollständig bestimmt*).

Ich möchte noch kurz zeigen, wie einfach sich unter Anwendung der hier auseinander gesetzten Methoden die Lösung der folgenden allgemeineren bekannten aber bisher noch nicht vollständig gelösten Aufgabe gestaltet.

Es sei:

$$\mathfrak{D} = P^\varrho Q^\sigma \cdots S^v$$

ein beliebiger Divisor, $(\xi^{(1)}, \cdots \xi^{(n)})$ ein Fundamentalsystem für das Ideal $J(\mathfrak{D})$. Es soll der Werth der zugehörigen Discriminante:

$$D(\mathfrak{D}) = \left| \xi_g^{(h)} \right|^2$$

gefunden werden.

Offenbar braucht man nur zu bestimmen, wie oft ein beliebiger Galois'scher Primtheiler $\mathfrak{p}$ irgend einer reellen Primzahl p in $D(\mathfrak{D})$ auftritt. Ist $p \sim P^d Q^e R^f$ die Zerlegung von p innerhalb $K(\omega_1)$ und sind wieder $P^\varrho, Q^\sigma, R^\tau$ die in $\mathfrak{D}$ enthaltenen Potenzen jener Primfactoren, so ist das System $\left(\xi_g^{(h)}\right)$ äquivalent einem andern, welches modulo $\mathfrak{p}^M$ einem zerfallenden Systeme von der Form:

---

*) „Ueber die Bestimmung der Discriminante eines algebraischen Körpers" und „Ueber die Fundamentalgleichung und die ausserwesentlichen Discriminantentheiler eines algebraischen Körpers". Nachrichten der Göttinger Akademie v. J. 1897 (Sitzung am 30. October 1897).

$$\begin{pmatrix} \Gamma_\varrho, & 0 & 0 \\ 0, & \Delta_\sigma & 0 \\ 0, & 0 & \mathsf{E}_\tau \end{pmatrix}$$

congruent ist. Also besteht für $D(\mathfrak{D})$ die folgende Congruenz:

$$D(\mathfrak{D}) \equiv |\Gamma_\varrho|^2 \cdot |\Delta_\sigma|^2 \cdot |\mathsf{E}_\tau|^2 \quad (\text{mod. } \mathfrak{p}^M),$$

wo die drei Factoren auf der rechten Seite bezw. gleich den Discriminanten $D_\varrho(\gamma)$, $D_\sigma(\delta)$, $D_\tau(\varepsilon)$ der Partialsysteme ϱ^{ter}, σ^{ter} und τ^{ter} Ordnung für die Körper $K(\gamma)$, $K(\delta)$ und $K(\varepsilon)$ sind. Es ist also:

$$D(\mathfrak{D}) \equiv D_\varrho(\gamma) \cdot D_\sigma(\delta) \cdot D_\tau(\varepsilon) \quad (\text{mod. } \mathfrak{p}^M).$$

Nun war aber nach dem am Schlusse von § 6 bewiesenen Satze:

$$D_\varrho(\gamma) = N(P^\varrho)^2 \cdot D_0(\gamma) = N(P^\varrho)^2 \cdot N(P^{\bar{d}-1})$$

wenn $\bar{d}$ wieder die in § 6 bestimmte Verzweigungszahl für P bedeutet, also besteht für jede reelle Primzahl P die Aequivalenz:

$$D(\mathfrak{D}) \sim N(P^\varrho Q^\sigma R^\tau)^2 \cdot N(P^{\bar{d}-1} Q^{\bar{e}-1} R^{\bar{f}-1});$$

bestimmt man also in derselben Weise die in $D(\mathfrak{D})$ enthaltene Potenz einer jeden reellen Primzahl, so erkennt man sofort, dass $D(\mathfrak{D})$ in der folgenden einfachen Weise dargestellt werden kann:

$$D(\mathfrak{D}) = \pm N\Big(\prod_P P^\varrho\Big)^2 \cdot N\Big(\prod_P P^{\bar{d}-1}\Big),$$

wenn die Multiplicationen beide Male auf alle Primdivisoren P des Körpers $K(\omega)$ erstreckt werden und jedesmal P^ϱ die Potenz von P bedeutet, welche in $\mathfrak{D}$ enthalten ist, während $\bar{d}$ die Verzweigungsordnung von P ist. Also ist das erste Product $\prod P^\varrho = \mathfrak{D}$; setzt man ferner:

$$\prod_{(P)} P^{\bar{d}-1} = \mathfrak{Z}_\omega$$

und nennt $\mathfrak{Z}_\omega$ *den Verzweigungstheiler* von $K(\omega)$, so besteht derselbe aus allen und nur aus den Divisoren, deren Verzweigungsordnung grösser ist als Eins, und man erhält das einfache Resultat:

$$D(\mathfrak{D}) = \pm (N(\mathfrak{D}))^2 \cdot (N(\mathfrak{Z}_\omega)) = \pm N(\mathfrak{D}^2 \mathfrak{Z}_\omega).$$

Setzt man speciell $\mathfrak{D} = 1$, so ergiebt sich für die Körperdiscriminante $D(1)$ die Gleichung:

$$D(1) = N(\mathfrak{Z}_\omega) = \prod p^{k(\bar{d}-1)},$$

welche allgemein gültig ist, während der Werth der Körperdiscriminante bisher nur in dem sogenannten regulären Falle bekannt war, wenn für keinen Divisor P der Grad d durch die zugehörige Primzahl p theilbar ist.

§ 10.

Es sei jetzt wieder $\mathfrak{D}$ ein beliebiger Divisor, $(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots \xi^{(n)})$ ein Fundamentalsystem für $\mathfrak{D}$, und es möge $(\bar{\xi}^{(1)}, \bar{\xi}^{(2)}, \dots \bar{\xi}^{(n)})$ das zu jenem *„complementäre“* System sein, d. h. dasjenige, welches man erhält, wenn man für das zugehörige algebraische System

$$S = \begin{pmatrix} \xi_1^{(1)} & \dots & \xi_1^{(n)} \\ \vdots & & \\ \xi_n^{(1)} & \dots & \xi_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

in gewöhnlicher Weise das reciproke System bildet, dann aber in diesem Zeilen und Colonnen vertauscht. Man erhält dann ein System:

$$\bar{S} = \begin{pmatrix} \bar{\xi}_1^{(1)} & \dots & \bar{\xi}_1^{(n)} \\ \vdots & & \\ \bar{\xi}_n^{(1)} & \dots & \bar{\xi}_n^{(n)} \end{pmatrix},$$

deren Elemente ebenfalls ein System linear unabhängiger Zahlen des Körpers $K(\omega_1)$ nebst ihren conjugirten sind, wie sich aus der Natur reciproker Systeme leicht ergiebt, und ebenso folgt leicht, dass zwei Systeme $(\xi^{(i)})$ und $(\bar{\xi}^{(k)})$ dann und nur dann complementär sind, wenn zwischen ihren Elementen die n^2 Gleichungen:

$$\sum_{h=1}^{n} \xi_h^{(i)} \bar{\xi}_h^{(k)} = \delta_{ik} \qquad \begin{pmatrix} \delta_{ik} = 0, & i \gtrless k \\ \phantom{\delta_{ik}} = 1, & i = k \end{pmatrix}$$

bestehen, oder einfacher, wenn für unbestimmte u_i, $\bar{u}_k$ die *eine* Gleichung:

$$(1) \quad \sum_{h=1}^{n} \left(u_1 \xi_h^{(1)} + \dots + u_n \xi_h^{(n)}\right) \left(\bar{u}_1 \bar{\xi}_h^{(1)} + \dots + \bar{u}_n \bar{\xi}_h^{(n)}\right) = u_1 \bar{u}_1 + \dots + u_n \bar{u}_n$$

erfüllt ist.

Ich will nun als letzte Anwendung der hier gefundenen Resultate den wichtigen auf einem ganz anderen Wege von Herrn Dedekind bewiesenen Satz ableiten, dass das complementäre System eines Fundamentalsystemes für einen Divisor $\mathfrak{D}$ wieder ein Fundamentalsystem für einen anderen Divisor $\bar{\mathfrak{D}}$ ist, und hierauf die Beziehung angeben, welche zwischen zwei solchen Divisoren besteht.

Zu diesem Zwecke brauche ich wegen des im § 8 bewiesenen Fundamentalsatzes I nur zu zeigen, dass auch das System $(\bar{S})$ für einen jeden Galois'schen Primtheiler $\mathfrak{p}$ modulo $\mathfrak{p}^M$ in Partialsysteme zerfällt; ist dies geschehen, so liefern die Ordnungszahlen jener Partialsysteme nach (II)

desselben Satzes sofort die Potenzen der einzelnen in $\overline{\mathfrak{D}}$ enthaltenen Primfactoren.

Es sei also wieder p eine beliebige reelle Primzahl, P, Q, R ihre Primfactoren innerhalb $K(\omega_1)$, und es mögen $P^\varrho, Q^\sigma, R^\tau$ die Potenzen von P, Q, R sein, welche in $\mathfrak{D}$ enthalten sind. Ist dann $\mathfrak{p}$ einer der vorher betrachteten Galois'schen Primtheiler von p, so besteht nach dem soeben erwähnten Satze für das zu $(\xi^{(1)}, \cdots \xi^{(n)})$ gehörige algebraische System die folgende Aequivalenz modulo $\mathfrak{p}^M$:

$$\left(\xi_i^{(\varkappa)}\right) \sim \begin{pmatrix} \Gamma_\varrho & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_\sigma & 0 \\ 0 & 0 & \mathsf{E}_\tau \end{pmatrix} \quad (\text{mod. } \mathfrak{p}^M),$$

wo $\Gamma_\varrho, \Delta_\sigma, \mathsf{E}_\tau$ die Partialsysteme der ϱ^{ten}, σ^{ten} und τ^{ten} Ordnung für die Abbildungskörper $K(\gamma)$, $K(\delta)$, $K(\varepsilon)$ bedeuten. Ist dies aber der Fall, so ist bekanntlich das reciproke und somit auch das complementäre System ebenfalls einem in gleicher Weise zerfallenden äquivalent, d. h. es besteht die Aequivalenz:

$$\left(\overline{\xi}_i^{(\varkappa)}\right) \sim \begin{pmatrix} \overline{\Gamma} & 0 & 0 \\ 0 & \overline{\Delta} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\mathsf{E}} \end{pmatrix} \quad (\text{mod. } \mathfrak{p}^M),$$

wo jetzt z. B. $\overline{\Gamma}$ das zu Γ_ϱ complementäre System bedeutet. Ich werde jetzt zeigen, dass jedes dieser complementären Systeme $\overline{\Gamma}, \overline{\Delta}, \overline{\mathsf{E}}$ ein Partialsystem $\Gamma_{\bar\varrho}, \Delta_{\bar\sigma}, \mathsf{E}_{\bar\tau}$ für jene Abbildungskörper ist. Ist dies bewiesen, so ist damit gezeigt, dass $\left(\overline{\xi}^{(1)}, \cdots \overline{\xi}^{(n)}\right)$ ein Fundamentalsystem für einen Divisor $\overline{\mathfrak{D}}$ ist, welcher P, Q und R bezw. in der $\bar\varrho^{\text{ten}}$, $\bar\sigma^{\text{ten}}$, $\bar\tau^{\text{ten}}$ Potenz enthält.

Offenbar braucht dieser letzte Beweis nur für irgend eines von jenen Partialsystemen etwa für Γ_ϱ geführt zu werden. Es seien α und π die Entwickelungszahlen für einen der $\nu = kd$ Abbildungskörper $K(\gamma)$, dann bilden die $\nu = kd$ Zahlen

$$\alpha^g \pi^{h+\varrho} \qquad \begin{pmatrix} g = 0, 1, 2, \cdots k-1 \\ h = 0, 1, 2, \cdots d-1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

nebst ihren Conjugirten das Partialsystem Γ_ϱ, seine Elemente sind also die Coefficienten der Producte $u_g v_h$ in dem entwickelten Ausdrucke:

$$(u_0 + u_1\alpha + \cdots + u_{k-1}\alpha^{k-1})(v_0\pi^\varrho + v_1\pi^{\varrho+1} + \cdots + v_{d-1}\pi^{\varrho+d-1}). \tag{3}$$

Mit Hülfe dieser Bemerkung kann man aber leicht das zu (2) complementäre System finden.

In der That, seien wieder:

$$
(4)\qquad
\begin{aligned}
\varphi(t) &= t^k + a_{k-1}t^{k-1} + \cdots + a_0 = (t-\alpha_1)\cdots(t-\alpha_k) = 0\\
\psi(\tau) &= \tau^d + pC_{d-1}\tau^{d-1} + \cdots + pC_0 = \left(\tau-\pi_1^{(1)}\right)\cdots\left(\tau-\pi_d^{(1)}\right) = 0
\end{aligned}
$$

die beiden Gleichungen, denen α und π nebst ihren Conjugirten genügen. Entwickelt man dann die Quotienten:

$$\frac{\varphi(t)}{(t-\alpha)\,\varphi'(\alpha)} \quad \text{und} \quad \frac{\psi(\tau)}{(\tau-\pi)\,\psi'(\pi)\,\pi^{\varrho}}$$

nach Potenzen von t und τ und sei dann:

$$
(5)\qquad
\begin{aligned}
\frac{\varphi(t)}{(t-\alpha)\,\varphi'(\alpha)} &= \bar{\alpha}^{(0)} + \bar{\alpha}^{(1)}t + \cdots + \bar{\alpha}^{(k-1)}t^{k-1},\\
\frac{\psi(\tau)}{(\tau-\pi)\,\psi'(\pi)\,\pi^{\varrho}} &= \bar{\pi}^{(\varrho)} + \bar{\pi}^{(\varrho+1)}\tau + \cdots + \bar{\pi}^{(\varrho+d-1)}\tau^{d-1},
\end{aligned}
$$

so behaupte ich, dass das aus den beiden Systemen:

$$\left(\bar{\alpha}^{(0)}, \bar{\alpha}^{(1)}, \ldots \bar{\alpha}^{(k-1)}\right) \quad \text{und} \quad \left(\bar{\pi}^{(\varrho)}, \bar{\pi}^{(\varrho+1)}, \ldots \bar{\pi}^{(\varrho+d-1)}\right)$$

componirte:

$$\bar{\alpha}^{(g)}\,\bar{\pi}^{(\varrho+h)} \qquad \begin{pmatrix} g = 0, 1, \cdots k-1 \\ h = 0, 1, \cdots d-1 \end{pmatrix}$$

zu dem Systeme $((\alpha^g \pi^{\varrho+h}))$ complementär ist. Der Beweis dieses Satzes ergiebt sich sofort aus der Identität:

$$\sum_{\alpha}\sum_{\pi}(u_0 + u_1\alpha + \cdots + u_{k-1}\alpha^{k-1})(v_0\pi^{\varrho} + v_1\pi^{\varrho+1} + \cdots + v_{d-1}\pi^{\varrho+d-1})$$

$$\times \frac{\varphi(t)}{(t-\alpha)\,\varphi'(\alpha)} \cdot \frac{\psi(\tau)}{(\tau-\pi)\,\psi'(\pi)\,\pi^{\varrho}} = (u_0 + u_1 t + \cdots + u_{k-1}t^{k-1})(v_0 + v_1\tau + \cdots + v_{d-1}\tau^{d-1}),$$

welche ihrerseits nur ein specieller Fall der Lagrange'schen Interpolationsformel ist; denn die ganze Function von t und τ auf der rechten Seite stimmt für die $\nu = kd$ Werthsysteme $\left(t = \alpha_g,\ \tau = \pi_g^{(h)}\right)$ mit der Summe auf der linken Seite überein, beide Seiten sind also identisch. Ersetzt man aber in der Summe links die beiden letzten Factoren jedesmal durch ihre Entwickelungen (5) und multiplicirt dann aus, so geht jene Gleichung über in:

$$\sum_{\alpha,\pi}\left(\left(\sum_{g,h} u_g v_h \alpha^g \pi^{\varrho+h}\right)\left(\sum_{g',h'} t^{g'}\tau^{h'}\bar{\alpha}^{(g')}\bar{\pi}^{(\varrho+h')}\right)\right) = \sum_{g,h} u_g v_h t^g \tau^h,$$

und aus ihr ergeben sich durch Coefficientenvergleichung die folgenden ν^2 Gleichungen:

$$\sum_{\alpha,\pi}(\alpha^g \pi^{\varrho+h})(\bar{\alpha}^{(g')}\bar{\pi}^{(\varrho+h')}) = \begin{cases}1\\0\end{cases},$$

je nachdem die beiden Indexsysteme (g, h) und (g', h') gleich oder verschieden sind; diese Gleichungen sagen aber in der That aus, dass die beiden Systeme:

$$\alpha^g \pi^{\varrho+h} \quad \text{und} \quad \bar{\alpha}^{(g)} \bar{\pi}^{(\varrho+h)}$$

complementär sind.

Dass dieses complementäre System $(\!(\bar{\alpha}^{(g)} \bar{\pi}^{(\varrho+h)})\!)$ aber ein Partialsystem ist, zeigt man jetzt sehr leicht. Bekanntlich sind nämlich die algebraischen Zahlen $(\bar{\alpha}^{(0)}, \bar{\alpha}^{(1)}, \cdots \bar{\alpha}^{(k-1)})$ und $(\bar{\pi}^{(\varrho)}, \bar{\pi}^{(\varrho+1)}, \cdots \bar{\pi}^{(\varrho+d-1)})$ in (5) durch die folgenden aus (5) unmittelbar sich ergebenden Gleichungen bestimmt:

$$\text{(6)} \quad \begin{aligned} \bar{\alpha}^{(g)} &= \frac{\alpha^{k-g-1} + a_{k-1}\alpha^{k-g-2} + \cdots + a_{k-g-1}}{\varphi'(\alpha)}, \\ \bar{\pi}^{(\varrho+h)} &= \frac{\pi^{d-h-1} + p\,C_{d-1}\pi^{d-h-2} + \cdots + p\,C_{d-h-1}}{\psi'(\pi)\,\pi^{\varrho}}; \end{aligned}$$

beachtet man also, dass die Gleichungscoefficienten a_r, C_s *ganze* reelle bezw. ganze algebraische Zahlen des Rationalitätsbereiches $K(\alpha)$ sind, so ergiebt sich zunächst, dass die Systeme:

$$\text{(7)} \qquad (\bar{\alpha}^{(0)}, \bar{\alpha}^{(1)}, \cdots \bar{\alpha}^{(k-1)}) \quad \text{und} \quad (\bar{\pi}^{(\varrho)}, \bar{\pi}^{(\varrho+1)}, \cdots \bar{\pi}^{(\varrho+d-1)})$$

bezw. äquivalent sind den folgenden:

$$\text{(7a)} \quad \left(\frac{1}{\varphi'(\alpha)}, \frac{\alpha}{\varphi'(\alpha)}, \cdots \frac{\alpha^{k-1}}{\varphi'(\alpha)}\right) \quad \text{und} \quad \left(\frac{1}{\psi'(\pi)\,\pi^{\varrho}}, \frac{\pi}{\psi'(\pi)\,\pi^{\varrho}}, \cdots \frac{\pi^{d-1}}{\psi'(\pi)\,\pi^{\varrho}}\right);$$

nun ist aber $\varphi'(\alpha)$ durch p gar nicht theilbar, und $\psi'(\pi)$ ist äquivalent $\pi^{\bar{d}-1}$, wo die ganze Zahl $\bar{d}$ die in § 6 definirte Verzweigungsordnung für den Divisor P ist. Also sind die beiden Systeme (7a) für sich äquivalent:

$$(1, \alpha, \cdots \alpha^{k-1}) \quad \text{und} \quad (\pi^{-(\varrho+\bar{d}-1)}, \pi^{-(\varrho+\bar{d})}, \cdots),$$

und das aus ihnen componirte complementäre System ist demnach äquivalent dem folgenden:

$$\alpha^g \pi^{\bar{\varrho}+h} \qquad \begin{pmatrix} g = 0, 1, \cdots k-1 \\ h = 0, 1, \cdots d-1 \end{pmatrix},$$

wo zur Abkürzung:

$$\bar{\varrho} = -(\varrho + \bar{d} - 1)$$

gesetzt ist.

Das zu Γ_ϱ reciproke System ist also in der That ein Partialsystem $\Gamma_{\bar{\varrho}}$, dessen Ordnung $\bar{\varrho}$ mit ϱ durch die Gleichung:

$$\varrho + \bar{\varrho} = -(\bar{d} - 1)$$

verbunden ist.

Dieselbe Beziehung besteht nun aber für jeden Divisor P. Bezeichnen wir also wie früher durch:

$$\mathfrak{Z}_\omega = \prod P^{\bar{d}-1}$$

den zu dem Körper $K(\omega)$ gehörigen Verzweigungstheiler, so ergiebt sich aus den soeben durchgeführten Untersuchungen ein neuer und einfacher Beweis des folgenden wichtigen Satzes:

Ist $(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \cdots \xi^{(n)})$ ein Fundamentalsystem für einen beliebigen Divisor $\mathfrak{D}$, so ist das complementäre System $(\bar{\xi}^{(1)}, \cdots \bar{\xi}^{(n)})$ ebenfalls ein Fundamentalsystem für einen anderen Divisor $\overline{\mathfrak{D}}$ und zwischen diesen beiden Divisoren besteht stets die Gleichung:

$$\mathfrak{D}\overline{\mathfrak{D}} = \frac{1}{\mathfrak{Z}_\omega},$$

wenn $\mathfrak{Z}_\omega$ den Verzweigungstheiler jenes Körpers bedeutet.

Berlin, den 28. Juni 1900.

Charles Hermite.

Von

M. Noether in Erlangen.

Das neue Jahrhundert hat zu seinem Beginn einen Mann verloren, der noch aus der grossen Zeit der Gauss, Jacobi und Cauchy als ihr geistiger Schüler und unmittelbarer Fortsetzer zu uns herüberragte, in dessen erste Schaffenszeit die Entwicklung neuer Grundideen der zahlentheoretischen, der algebraischen und der analytischen Wissenschaft gefallen ist, und der selbst durch eine lange Reihe bedeutender Entdeckungen so sehr den Charakter seiner Zeit mitbestimmte, dass sich an seinen Namen und sein Werk neben den Traditionen der Vergangenheit auch Ausblicke auf die Forschung der Gegenwart bis in dieses Jahrhundert hinein, das er noch begrüssen konnte, knüpfen. Wenn so die ausserordentliche Verehrung, die Ch. Hermite immer und überall genossen hat, zunächst auf der idealen Bedeutung der wissenschaftlichen Güter beruhte, als deren Repräsentant er erscheint, so hatte sie eine weitere feste Stütze in der edeln Persönlichkeit, welche sich in dem Verstorbenen verkörperte. Auch in Deutschland, dessen mathematische Wissenschaft Hermite seinem Heimatlande vermittelte und zu dessen Forschern er von je enge Beziehungen unterhielt, und in unseren Annalen, die mit manchen seiner Bestrebungen in nähere Fühlung gekommen sind, findet die Trauer um den Heimgang lebhaften Widerhall. Schon bei den Nachrufen, die wir seinen ihm befreundeten Mitstrebern aus der Zeit der 50er Jahre, die damals mit ihm um die Wiege der neueren Algebra gestanden, Cayley, Sylvester, Brioschi, in diesen Blättern gewidmet*), haben wir eine Reihe von Einzelbeziehungen zwischen ihm und insbesondere den letzten beiden hervorheben und eingehend erörtern müssen; spiegeln sich ja doch Hermite's Ideen in dem ganzen Schaffen Brioschi's wieder. Aber Hermite war weitaus der vielseitigste unter jenen Vorkämpfern der algebraischen

*) S. diese Annalen Bde. 46, 50.

Richtung, er war von arithmetischen und analytischen Einflüssen durchtränkt, in seinem Gesammtwirken spielt die algebraische Richtung zwar eine starke, aber doch nur eine Theilrolle. Um so nothwendiger erscheint es, dass wir im Anschlusse an jene Aufsätze nun auf diesen Blättern die Einzelheiten zu einem Gesammtbilde von Hermite's Wirken ergänzen und seine Bedeutung und Art zu würdigen suchen, um unseren geistigen Zusammenhang mit jener älteren Zeit uns voller zu vergegenwärtigen. In Bezug auf einige damals eingehend besprochenen Einzelheiten, die wir nunmehr, trotz ihrer Bedeutung in Hermite's Schaffen, nur noch knapp berühren, verweisen wir auf jene Aufsätze*).

Wir stellen vorerst die wenigen uns bekannten Lebensdaten kurz zusammen.

Charles Hermite, in Dieuze, Lothringen, am 24. Dez. 1822 geboren, verbrachte seine ersten Jugendjahre innerhalb seiner Familie in Nancy und besuchte auch das dortige Lyceum. Noch bei seinem Jubiläum gedenkt er in treuer Erinnerung dieser Stadt und seiner heimatlichen Provinz, in die er späterhin oft zurückgekehrt. Die Schulstudien führte er dann an den Pariser Lyceen Henry IV und Louis-le-Grand weiter. Sein mathematischer Lehrer an letzterem Colleg war noch derselbe Richard, der schon Galois in seinen Privatstudien ermuthigt hatte**). Auch für Hermite ist charakteristisch, dass er sich schon damals nicht an den Schulgang des durch seine Vorbereitung für die École Polytechnique bekannten Lehrers hielt, sondern, wie später als Zögling dieser Anstalt, mehr an das Selbststudium classischer Werke: von Lagrange's Traité de la résolution des équations numeriques und von Gauss' Disquisitiones arithmeticae. So erhielt er 1842 zwar das 1. Accessit in „Mathématiques spéciales“ beim allgemeinen Concurs der Pariser Lyceen in der Sorbonne, nicht aber den Preis, obwohl, nach dem Zeugniss von

*) Von der Hermite betreffenden Litteratur sei erwähnt:

1. „1822—1892. Jubilé de M. Hermite (24. Déc.).“ Paris, Gauthier-Villars 1893. Mit Lichtbild.
2. C. Jordan: „Notice sur M. Ch. Hermite.“ C. R. de l'Ac. des Sc., vom 21. Jan. 1901, abgedruckt im Journal de Math., 5te S., Bd. 7.
3. E. Picard: „L'Oeuvre scientifique de Ch. Hermite.“ Ann. de l'Éc. Norm. Sup., 3te S., Bd. 18, 1901.
   [Eine eingehende und übersichtliche Würdigung, in einer von Hrn. Picard als Nachfolger Hermite's auf dessen Lehrstuhl an der Fac. des Sciences am 2. März 1901 gehaltenen Vorlesung. 26 SS.]
4. Ein vorläufiges Verzeichniss der Publicationen Hermite's in Loria's Bollet. di Bibl. e Stor. dei sc. mat., Heft Jan.—März, 1901.

Dazu kommt eine Reihe kürzerer Nachrufe.

**) Cf. Liouville in der Einleitung zu Galois' Schriften, Journal de Math. XI, 1846.

Hrn. Darboux*), die — bis jetzt nicht veröffentlichten — „feinen Bemerkungen seiner Bewerbungsschrift noch heute das Ingeniöseste und Originalste bleiben, was zum Descartes'schen Theorem hinzugefügt worden ist".

Noch aus der Collegzeit von 1842 datirt die erste publicirte wissenschaftliche Arbeit Hermite's: „Considérations sur la résolution algébrique de l'équation du cinquième degré" (Nouv. Ann., t. I). Wie so viele hatten auch ihn zuerst die Gleichungen 5[ten] Grades angezogen; aber, ungleich Jacobi, nicht die Frage der Auflösung, sondern die der algebraischen Auflösbarkeit selbst. Unbekanut mit den Arbeiten Ruffini's und Abel's, vor der Publication der Arbeit von Galois, lehnt sich Hermite allein an den Zusatz XIII von Lagrange's Abhandlung an, und er machte dementsprechend einen Versuch, zwischen der Möglichkeit, dass sich dessen Resolvente 6[ten] Grades durch Gleichungen 2[ten] und 3[ten] Grades erniedrigen lasse, und dem für Lösung der Gleichung 5[ten] Grades als nöthig angenommenen Ausziehen einer fünften Wurzel auf einfache Weise einen Widerspruch herzustellen.

Gegen Ende 1842 trat Hermite — nur als 68[ster]**) — in die École Polytechnique ein; und sogleich vertiefte er sein Studium der Gleichungen an der Hand der Arbeiten Jacobi's über elliptische und hyperelliptische Functionen, welch' letztere, erst acht Jahre vorher von diesem definitiv in die Wissenschaft eingeführt (Crelle J. 13), damals die ganze mathematische Welt in tiefe Bewegung setzten. Glücklicher Weise waren diese Arbeiten, in lateinischer oder französischer Sprache abgefasst, Hermite zugänglich; und er, der Zwanzigjährige, nahm, öffentlich als erster nach Jacobi, in eklatantem Masse seinen Anteil. Durch Liouville aufgemuntert, richtete er schon Januar 1843 einen Brief über die Theilung der hyperelliptischen Functionen an Jacobi, den dieser mit Worten der höchsten Anerkennung über die Entdeckung begrüsste (C. R. Bd. 17, vom 10. Juli 1843) und, sammt dem zweiten Briefe Hermite's vom August 1844 und seiner Beantwortung, in den ersten von ihm selbst besorgten Band seiner Werke aufnahm***). Die in der zweiten Hälfte der 40[er] Jahre folgende reiche Production Hermite's, die mit ihren Entdeckungen in der Theorie der elliptischen Functionen und in der Zahlentheorie durchaus in Beziehung zu Jacobi'schen Arbeiten steht, ist ebenfalls in Briefen an Jacobi

*) „Jubilé etc." Es handelt sich um den von Hermite gefundenen Satz: dass eine Gleichung, von der vier aufeinanderfolgende Coefficienten eine arithmetische Progression bilden, complexe Wurzeln besitzen muss. Cf. Nouvelles Annales de Math., t. I, p. 385.

**) Cf. Nouvelles Annales de Math., t. I, p. 263; 1842.

***) Abgedruckt auch im 2. Bande der neuen Ausgabe von Jacobi's Werken.

niedergelegt und von diesem im Crelle'schen Journal veröffentlicht*); wie denn Hermite sein ganzes Leben hindurch eine ausgedehnte Correspondenz unterhielt, in die er einen guten Theil seiner Forschungsresultate und Betrachtungen freigebig niederzulegen pflegte: nur ein Theil davon ist publicirt.

Es scheint nicht, dass sich Hermite während seiner Studienzeit, oder später, an einen seiner Lehrer, als solchen, näher angeschlossen habe; wohl aber stand er Manchen, besonders Cauchy, in Gesinnung und freundschaftlich sehr nahe. Von 1848 an, und die 50er Jahre hindurch, war er als Repetitor und Zulassungs-Examinator an der École Polytechnique thätig. Diese letztere Zeit war zugleich weitaus die seiner höchsten Productivität, seiner folgenreichsten Forschungsperiode; in allen seinen Gebieten: der Zahlentheorie, der neueren Algebra und der Theorie der Gleichungen, der Theorie der Abel'schen und elliptischen Functionen, vor Allem in Fragen, welche aus mehreren dieser Disciplinen ressortirten, drängten sich damals bei ihm die neuen Ideen, die eine Reihe weiter Gebiete erschlossen. Sie öffneten ihm auch schon 1856 die Pforten der Académie des Sciences, wie weiterhin die der übrigen Academien und gelehrten Gesellschaften. Aber seine lehramtliche Stellung verbesserte sich nur langsam. 1862 wurde für ihn an der École Normale der Lehrstuhl eines Maître de Conférences geschaffen, wobei ihm nur Gelegenheit zu elementaren Vorlesungen gegeben, aber doch schon vergönnt war, Schüler um sich zu haben, die heute einen vordern Rang in der Wissenschaft einnehmen. 1863 erhielt er zugleich das verantwortungsvolle Amt eines Examinateur de sortie an der École Polytechnique; und 1869 wurde er Nachfolger Duhamel's an dieser Schule für Analysis, und an der Faculté des Sciences erst für Algebra, dann ebenfalls für Analysis. Ersteres Amt behielt er activ bis 1878, letzteres bis 1897 bei.

Hier nun entfaltete er eine eminent anregende Lehrkraft: ohne die Spur eines Schulgangs, aus dem Vollen hervorgegangen, wandte sie sich an Geist und Herz des Studirenden zugleich, flösste ihm die Liebe zur Wissenschaft ein, und führte ihn, vom Nächsten ausgehend, rasch und unmerklich auf Höhen voller Ausblicke. Hier, wie in seinen Arbeiten, brachte er auch die, selbst von den grossen Vertretern der französischen Mathematik bisher stark vernachlässigten Ideen der ausländischen, vor Allem der deutschen, Analytiker zur Geltung; ja zu Beginn der 60er Jahre konnte man unter den Vertretern der neuen algebraischen und analytischen Richtungen in Frankreich nur Hermite hervorheben, in dem die ganze

*) Auch abgedruckt in dem durch Dirichlet besorgten 2. Bande der alten Ausgabe von Jacobi's Werken.

jetzige mathematische Schule dieses Landes ihren Lehrer und Meister verehrt. Es entstanden die berühmten „Cours“, die weit über Frankreich hinaus zurückwirkten. Auch der Anfang und das Ende der 70er Jahre brachten Hermite nochmals zwei eingreifende Forschungsperioden. Zwischen der engeren Zahl von grösseren zusammenhängenden Arbeiten zieht zugleich, bis zu den letzten Tagen des Jahrhunderts, eine ununterbrochene Kette von etwa 200 Publicationen hin, in den Academie- und allen mathematischen Zeitschriften, mit Einzelresultaten und zerstreuten Lichtblicken auf alle seine Arbeitsgebiete. Dazu kommt eine Reihe, in der Académie des Sciences gehaltener, beredter Nachrufe, von denen die, welche ihm als Freunde und Forscher Verbundene, wie Halphen, Kronecker, Cayley, Weierstrass und Brioschi, betreffen, nicht nur warme und schwungvolle Worte selbstloser Anerkennung finden, sondern auch mit wenigen Strichen treffende Bilder der wissenschaftlichen Bedeutung der Gezeichneten liefern.

Aus einer erweiterten Examinationsthätigkeit ging auch noch ein Interesse für und ein Einfluss auf den Unterricht an den Mittelschulen hervor. Wie er es am Schlusse seines Lebens in einem an die Redaction der neuen Serie des „Archivs der Mathematik und Physik“, Bd. I, 1901, gerichteten Briefe — der auch ein Zeugnis der Pietät gegen seine deutschen Vorgänger ist — ausspricht, hält er es schon in diesen Schulen für möglich, das mathematische Interesse durch den Hinweis auf hohe, aber einfache Ideen der grossen Meister zu wecken, wie er denn die Anregung des Interesses weit über noch unverstandene Strenge stellt. Dieser Standpunkt ergab ihm auch für die ersten Jahre des Hochschulunterrichts sein Programm.

Das Jahr 1892 brachte Hermite, an seinem 70sten Geburtstage, eine Huldigung, wie sie selten einem Gelehrten zu Theil wurde*). Sie galt zwar dem Forscher und Lehrer, aber sie ging zugleich aus der allgemeinen Verehrung hervor, welche er als Persönlichkeit genoss. Er hat ein langes arbeitsreiches Leben ganz der reinen Wissenschaft geweiht, der Erforschung neuer Wahrheiten und der Mittheilung ihrer Lehren. Und nicht nur ihrer Lehren: er wusste den sittlichen Geist in seine Schüler zu pflanzen, er spendete ihnen aus der Fülle seiner Gedanken, er war ihr treuester Freund. „Die Wissenschaft gibt“, sagt Hermite an seinem Jubeltage, „in Erwiderung der Anstrengungen, die sie auferlegt, Freundschaftsbeziehungen, als beste Belohnung“. Er verband mit den Gaben des Geistes gerade die Gaben, welche den Menschen liebenswerth machen und ihm Freunde erwerben. Keiner war pietätvoller gegen seine Meister, keiner mehr als er davon entfernt, für sich selbst Ansprüche zu stellen, da er seine eigenen

---

*) S. die oben genannte Schrift „Jubilé etc.“

Leistungen stets an den hohen Endzielen, die er im Auge gehabt, mass. Wie oft hat er fremde Entdeckungen, auch wenn sie von ihm selbst längst gehegte Gedanken aussprachen, freudig anerkannt, wie suchte er überall auch das kleinste Verdienst Anderer, wenn es einen Beitrag zu einem höheren Ziel zu bilden schien, klarzustellen und hervorzuheben. Die ihm eigene unerschöpfliche Höflichkeit und Zuvorkommenheit, wie sie sich in seinen Briefen kundgibt, war nichts Aeusserliches; es war die Form, unter der sich ein bescheidenes Wesen, ein hoher Sinn und ein inneres Wohlwollen bargen.

Ch. Hermite verschied am 14. Januar 1901, unerwartet und schmerzlos. Vermählt war er mit einer Schwester seines Freundes Joseph Bertrand; des anregenden Verkehrs in dem Gelehrtenheim der Rue de la Sorbonne werden sich zahlreiche Fachgenossen dankbar erinnern. Jetzt betrauert die Wittwe mit einer zahlreichen Familie: zwei Töchtern, zwei Schwiegersöhnen, unter denen E. Picard, mit Enkeln und Urenkeln und mit vielen Näherstehenden, den Hintritt ihres Oberhauptes. —

Die *Arbeiten* Hermite's lassen sich zwar in bestimmte Richtungen gruppiren, die meist auch zeitlich auseinanderliegen, nicht aber direct nach dem gewöhnlichen Schema der mathematischen Disciplinen unterscheiden. Die grösseren Leistungen gehören zumeist Grenzgebieten zwischen mindestens zwei dieser Disciplinen an, und sie haben, äusserlich betrachtet, nur das gemeinsam, dass sie als arithmetische in demjenigen weiteren Sinn der Zahl zu kennzeichnen sind, der das stetige Gebiet mitumfasst, also neben der engeren Zahlentheorie Algebra und Analysis einschliesst, Geometrie und Mechanik aber noch ausschliesst*).

In den ersten Arbeiten, bis Mitte der 40er Jahre, strömt ein mächtiger Gedankenfluss von den *Gleichungen* aus auf die *Theorie der Abelschen* und *elliptischen Functionen* über. Ende der 40er Jahre bis tief in die 50er Jahre hinein fällt die lange Reihe der *engeren arithmetischen* Arbeiten, sogleich (1847) ausgezeichnet durch Einführung von *algebraischen Ideen über quadratische Formen*, und dann, damit verbunden, durch die Einführung von *continuirlichen Variabeln*. Der ganze Reichthum dieser selben Quelle enthüllt sich aber erst kurz darauf (1852—1854), als die allgemeinen *Invariantenideen zur neueren Algebra der Formen* daraus hervorbrechen. Nur ein Jahr später (1855) geht die engere Arithmetik eine neue Verbindung mit der Theorie der Thetafunctionen ein, und es entsteht die Arbeit, welche unter den Leistungen Hermite's den grössten Einfluss ausüben sollte: die *Grundlegung der Transformationstheorie* in

*) Cf. Kronecker, „Ueber den Zahlbegriff", Crelle J. 101 (Werke III).

der *Theorie der Abel'schen Transcendenten.* Schon das Jahr 1858 bringt die Entdeckung, welche den Namen Hermite's in die weitesten Kreise getragen hat: die *Auflösung der allgemeinen Gleichung* 5$^{\text{ten}}$ *Grades mittelst elliptischer Functionen*, eine Frucht der Verbindung der Theorie der Substitutionsgruppen und der Gleichungen mit der der elliptischen Functionen, zu deren weiterer Ausreifung auch noch die Formentheorie sich gesellte. Diese Arbeit, und die 1859 entstandene über die *Modulargleichungen* der elliptischen Functionen, einer Verbindung von Gleichungstheorie, elliptischen Functionen und Arithmetik entsprossen, enthalten die Keime einer neuen Entwicklung, die zu den modernen Disciplinen der Modulfunctionen und der automorphen Functionen hinführen sollte. Die in diesen 50$^{\text{er}}$ Jahren entfaltete Fruchtbarkeit ist eine geradezu erstaunliche; wie denn diese Jahre, in denen auch Puiseux's Arbeit erschienen ist und Weierstrass und Riemann der Functionentheorie neue Grundlagen gegeben haben, zu den wichtigsten der ganzen Geschichte der Mathematik gehören.

Der Anfang der 60$^{\text{er}}$ Jahre erzeugt, in Anwendung der Theorie der elliptischen Functionen auf die engere Zahlentheorie nach Jacobi's Vorgang, Resultate in *Classenzahlrelationen.* Es folgt scheinbar eine Pause, äusserlich angefüllt von Vorlesungen und kürzeren Aufsätzen über Reihenentwicklungen von elliptischen und anderen Functionen. Da erscheinen plötzlich (1873) die Arbeiten über *Approximation der Functionen*, gipfelnd in dem grossen Abschlusse des *Beweises der Transcendenz der Grundzahl e des natürlichen Logarithmensystems:* arithmetische Begriffsbildungen, auf die Analysis angewandt.

Gegen Ende der 70$^{\text{er}}$ Jahre aber beginnt Hermite die *„Anwendungen der elliptischen Functionen"* auf die Theorie der linearen Differentialgleichungen, die Lösung einer *Verallgemeinerung der Lamé'schen Gleichung* durch seine doppelt-periodischen Functionen 2$^{\text{ter}}$ Gattung, womit er sich von den elliptischen Functionen aus auf ein Gebiet begab, das die neuere Analysis beherrscht, und auch Probleme der Mechanik löste. Die ganze übrige Arbeitszeit war, im Anschlusse an seine Vorlesungen in der Faculté des Sciences, wesentlich den *elliptischen Functionen*, den *bestimmten Integralen* und den *eindeutigen Functionen einer Variabeln* überhaupt gewidmet. —

Im Jahre 1828 schreibt Jacobi, in seinen „Notices sur les fonctions elliptiques", welche hauptsächlich die Transformation und Theilung behandeln, an Crelle: „Vous voyez, Monsieur, que la théorie des fonctions elliptiques est un vaste objet de recherches qui dans le cours de ses developpements embrasse presque toute l'algèbre, la théorie des intégrales définies et la science des nombres. Quel titre de gloire pour l'illustre

auteur du «Traité des fonctions elliptiques», que d'avoir créé cette belle théorie et d'avoir allumé ce flambeau à la postérité.“ Diese Worte müssen in Hermite gezündet haben, sie deuten prophetisch auf sein Werk und umfassen ein grosses Stück seines Zukunftsprogramms.

Jacobi hatte (hier in Cr. J. Bde. 3, 4, wie schon in Cr. J. Bd. 2) den analytischen Ausdruck der Wurzeln der Gleichung des Grades n^2 für die n-Theilung der Argumente der elliptischen Functionen abgeleitet, indem er zur Umkehrung seiner Transformationsformeln den Charakter der doppelten Periodicität benutzte, und er hatte dadurch auch die algebraischen Ausdrücke der Wurzeln, die bei Abel noch von zwei successiven Gleichungen n^{ten} Grades abhingen, auf einfache und eindeutige Weise als Summe von n^{ten} Wurzeln (n prim) von rationalen Ausdrücken erhalten. Publicirt aber hatte Jacobi nur den Beginn der Ausführung, das Weitere ist erst später (Ges. Werke, I, 1881) aus dem Nachlass veröffentlicht. Wie hoch Jacobi die Grundlage, die Formel der inversen, irrationalen Transformation geschätzt, geht aus einem Briefe an Legendre vom 18. Jan. 1829 hervor: „La découverte de cette formule m'a couté beaucoup de peine, et c'est peut-être pourquoi je voudrais la compter pour le résultat le plus important de tout ce que j'ai trouvé jusqu' ici.“

Ferner hatte Jacobi in seiner Abhandlung von 1834 (Cr. J. 13) „De functionibus duarum variabilium quadrupliciter periodicis ...“, welche die Grundlage der Umkehrung der hyperelliptischen Integrale enthält, auch schon angedeutet, dass die n-Theilung für die hyperelliptischen Functionen von zwei Argumenten auf eine Gleichung des Grades n^4 führe, die für $n = 2$ durch blosse Quadratwurzeln lösbar sei, jedoch ohne Ausführung.

Hier nun sollte, angeregt durch diese beiden Untersuchungen, der junge Hermite eingreifen. In seinem schon angeführten Briefe an Jacobi vom Jan. 1843 (auch in C. R. t. 17 und in Cr. J. 32) gibt er mit einem Schlage die Verallgemeinerung der Jacobi'schen algebraischen Lösung der *allgemeinen n-Theilungsgleichung* von den elliptischen Functionen auf die *hyperelliptischen* von zwei Argumenten, und zwar für eine beliebige Zahl n: eine Arbeit, die schon eine tiefe Einsicht in die Periodicitätseigenschaften dieser Functionen und in das Abel'sche Theorem erforderte. Zu jener Zeit war von diesen Functionen ausser ihrer Definition noch nichts bekannt, und Abel's schwierige Arbeit über sein Theorem war eben erst erschienen. Hermite ging auch noch auf die „specielle“ n-Theilung der Perioden ein, indem er Jacobi's Bemerkung (Cr. J. 13), dass dieselbe für eine Primzahl n auf eine im Allgemeinen nicht lösbare Gleichung des Grades $\frac{n^4-1}{n-1}$ — der Anzahl der Transformationen n^{ter} Ordnung —

und auf eine lösbare Gleichung des Grades $\frac{n-1}{2}$ führe, bewies. In Bezug auf das Erstere schreibt ihm Jacobi (Juni 1843, C. R. 17): „Sie haben sich durch die Entdeckung dieser Theilung ein weites Feld für Untersuchungen und neue Entdeckungen geöffnet, welche der analytischen Kunst einen grossen Aufschwung geben werden".

Auch bei den nächsten Arbeiten steht das grosse Problem, welches Jacobi der Wissenschaft vorgelegt, die analytische Darstellung der Umkehrungsfunctionen der Integralsummen, für Hermite als Leitstern da. Er dehnt in der Abhandlung „Sur la théorie des transcendantes à differentielles algebriques" (C. R. 18, 1844; auch im Journ. de Math. IX) auf Grund von Abel's Abhandlung das Problem auf die Integrale über *beliebige* algebraische Differentialausdrücke aus; er versucht die Perioden einzuführen, wohl schon als Integrale auf Schleifenwegen zwischen Verzweigungspunkten, aber ohne — 2 Jahre vor Cauchy's Noten in C. R. t. 23 und 6 Jahre vor Puiseux's „Recherches" — hier zum Abschluss kommen zu können; er denkt auch an die linearen Differentialgleichungen für die Integrale 1ter Gattung als Functionen des Moduls. Wichtiger ist, dass er zum Zwecke des Fortschritts zunächst für nöthig hält, in die Transformationstheorie der elliptischen Functionen, also in ein gelöstes Problem, neue, und zwar functionentheoretische, Gesichtspunkte einzuführen, um so den rationalen Ausdruck der neuen Variabeln y durch die ursprüngliche $x = \sin \mathrm{am}\, u$ und die algebraische Beziehung zwischen y und $\frac{dy}{du}$ zu gewinnen, wie auch die Transformation des Integrals dritter Gattung.

Dieser Gesichtspunkt führt Hermite kurz darauf (Brief an Jacobi vom August 1844; auch in Cr. J. 32 veröffentlicht) zu einer Entdeckung, welche ihm erlaubt hat, die *Theorie der Thetafunctionen* einheitlich vorerst der ganzen Theorie der elliptischen Functionen zu Grunde zu legen, und welche späterhin auch für seine Transformationstheorie der Abelschen Functionen, wie für die Thetarelationen überhaupt, in der That das Fundament werden sollte. Hermite führt neue Functionen ein: die allgemeinsten holomorphen Functionen von u mit den Periodicitätseigenschaften rationaler ganzer homogener Functionen n^{ten} Grades von $\Theta(u)$ und $\mathrm{H}(u)$, die später sogenannten Thetafunctionen n^{ter} Ordnung, und er erkennt ihre Grundeigenschaft, dass sie sich aus $2n$ solchen Functionen linear und homogen zusammensetzen lassen.

Diese scheinbar einfache, aber folgenreiche Entdeckung liefert ihm ohne Weiteres die Jacobi'schen inversen Formeln für die Transformation n^{ter} Ordnung. Sie gibt ihm aber auch den transcendenten Ausdruck der allgemeinsten doppelt-periodischen Function, die eine rationale Function

von $x = \sin \operatorname{am} u$ und $\frac{dx}{du}$ ist, in der neuen Form eines Quotienten zweier Producte von Thetafunctionen von gleich vielen Factoren [„Hermite'scher Satz“]:

$$\frac{\Pi_i \mathrm{H}(u+a_i)}{\Pi_i \mathrm{H}(u+b_i)}$$

mit der aus dem doppelt-periodischen Charakter geschlossenen Bedingung

$$\Sigma a_i \equiv \Sigma b_i \quad \text{(mod. Perioden).}$$

Dies letztere ist nichts anderes als das Abel'sche allgemeine Additionstheorem für elliptische Functionen, oder wenn man will, der [„Riemann-Roch'sche“] Satz für die Anzahl der linear unabhängigen doppelt-periodischen Functionen, mit gegebenen Unendlichkeitspunkten. In dieser Ableitung, an Stelle derjenigen Abel's, fand Jacobi (Cr. J. 32) das Originalste und Ingeniöseste der Untersuchung Hermite's. „Hermite hat“, sagt Jacobi in einem aus dem Nachlass veröffentlichten Aufsatz (Ges. Werke, II, S. 516), „dem Abel'schen Werke eine neue Form gegeben, wie sie fast allen Arbeiten dieses grossen Genies zu wünschen ist, wenn ihre tiefen Gedanken klarer hervortreten sollen.“ Die Ableitung der ganzen elliptischen Transformationstheorie aus seinem Thetatheorem deutet Hermite nur erst an.

Inzwischen hatte auch Liouville in Vorlesungen eine einfache Theorie der doppelt-periodischen Functionen entwickelt, die auf ihre Zerlegung in eine Summe von solchen mit nur je zwei Polen im Periodenparallelogramm gegründet war. Hermite legte dann der Academie eine grössere Arbeit vor, in der er an der Hand der Cauchy'schen Residuentheorie die Zerlegung der doppelt-periodischen Function mit einer endlichen Anzahl von Polen im Parallelogramm in ihre einfachsten *transcendenten Elemente* lehrt: in eine Summe von Functionen $\frac{\mathrm{H}'(u-\alpha_i)}{\mathrm{H}(u-\alpha_i)}$, also von Integralen 2^{ter} Gattung mit nur je einem Unstetigkeitspunkte, und deren Differentialquotienten. Eine leichte Umrechnung führt von da zur Darstellung als Summe von einfachen elliptischen Functionen, wie $\frac{1}{\sin \operatorname{am}(u-\alpha_i)}$. Die nach den Berichten von Cauchy und Liouville (C. S. 32) ursprünglich für die Mém. des Sav. Étrang. bestimmte Arbeit liegt jedenfalls den später als Anhang zu Lacroix's Traité erschienenen vielgelesenen „Notes“ zu Grunde; und auf den Arbeiten von Cauchy, Liouville und Hermite in Gemeinsamkeit baut sich dann das systematische Werk von Briot und Bouquet auf.

Hermite's Untersuchung von 1844 über die elliptischen Functionen

hatte ihm offenbar als Vorbereitung für eine analoge Behandlung der höheren Transcendenten dienen sollen. Er hatte richtig vorausgefühlt, dass es dabei zunächst auf eine Verallgemeinerung der elliptischen *Thetafunction* ankomme, wobei an Stelle der Productzerlegung, welche Jacobi benutzt hatte, die Periodicitätseigenschaften zu Grunde zu legen seien. Aber in diesem Versuch war er weniger glücklich. Er gelangt zwar (in dem Briefe von 1844) bis zu einer Form des Satzes für Vertauschung von Argument und Parameter und zu Additionstheoremen für die Integrale 3ter Gattung der Functionen von zwei Argumenten; und dieses Vorgehen hat auch Jacobi angeregt, alte Untersuchungen darüber auf alle hyperelliptischen Classen auszudehnen (Cr. J. 32). Aber selbst auf inductivem Wege gelingt es Hermite nicht, zu den Thetafunctionen mehrerer Veränderlichen selbst vorzudringen. In der wirklichen analytischen Darstellung der neuen Umkehrungsfunctionen Jacobi's sollten ihm, für die erste Classe der hyperelliptischen Functionen, inzwischen andere zuvorkommen, angeregt durch die Preisfragen, welche schon vor 1840 von der Kopenhagener, 1840 durch Dirichlet von der Berliner, auf 1846 von der Pariser Akademie gestellt worden waren.

Göpel hatte, ganz in der Stille an analytischen Gedanken arbeitend, die ihm früh einen tiefen vorausschauenden Blick in die Functionsbegriffe thun liessen, schon etwa seit 1840 die Grundidee seines Werkes gefasst, auch von dem Ausgangspunkt der elliptischen Functionen her, mit Ideen, die mit den von Hermite in den beiden genannten, 1846 publicirten Briefen ausgesprochenen so verwandt waren, dass er gerade durch diesen Umstand bewogen wurde, mit seinen Entwicklungen hervorzutreten (Cr. J. 25, 1847). Die von Hermite gesuchte Function stellt er in der That inductiv aus den Periodenverhältnissen her: als eine doppelt unendliche Summe von Exponentialgrössen, deren Exponent ein quadratischer, nicht homogener, Ausdruck in zwei Indices ist; und er entwickelt, durch Bildung des Products je zweier solcher Reihen, das er als Thetafunction mit transformirtem Modul auffasst, und unter Benutzung der Periodicitätsverhältnisse, rechnend — wie Jacobi in Cr. J. 3 — Thetarelationen und daraus das Differentialproblem. In seiner Transformationsarbeit von 1855 hat dann Hermite den Weg Göpel's, insbesondere dessen Relation 4ten Grades, seinem bei den elliptischen Functionen entwickelten Princip der linearen Zusammensetzung von Thetafunctionen höherer Ordnung eingeordnet.

Auch Rosenhain war schon 1844 auf die neuen Functionen durch Induction gekommen, wenn auch nicht durch eine scheinbar so unvermittelte Divination wie Göpel: er stieg von den 3-fach periodischen Functionen, die sich ihm bei der Umkehrung der Integralsummen 3ter Gattung im elliptischen Falle ergeben hatten, zu den 4-fach periodischen Functionen

auf, wie man von der Exponentialfunction zur elliptischen Thetareihe weitergeht. Der weitere Weg war wieder ein rechnerischer, diesmal, wiederum nach dem Vorbild Jacobi's (Cr. J. 32), durch das Product von vier Thetafunctionen hindurch; und auch einige ganz specielle Fälle der allgemeinen linearen Transformation der Thetafunctionen kommen dabei vor. Dass die 1846 von der Pariser Akademie preisgekrönte Arbeit erst 1851 erschien, war für Hermite auch ein Hinderniss zu weiteren Versuchen in diesem Gebiete.

Wenn Hermite die Gabe einer kühn vorausnehmenden Induction, mit ihrem Gefolge von unabsehbaren Rechnungen, nicht eigen war, so zeigen die Arbeiten eines anderen Forschers, der um dieselbe Zeit von denselben Problemen angezogen worden war, voll die ausserordentlichen analytischen Schwierigkeiten, die in jener Zeit noch der directen Lösung entgegenstanden, und lassen verstehen, dass die Aufgabe zu früh an den jugendlichen Hermite herangetreten war. Der Jacobi'sche Weg der unbestimmten Wiederholung der Transformation der Integrale verbot sich ohne vorherige Kenntniss der höheren Thetafunctionen von selbst; es blieb nur, wie bei Abel, die fortgesetzte Multiplication, und eine Verallgemeinerung des ganzen Jacobi'schen Operationscyklus, der, von der elliptischen Function ausgehend, zum Integral 2^ter^ Gattung und zur Thetafunction gelangt und auf diese wieder die Integrale 3^ter^ Gattung und die Bruchdarstellung der elliptischen Functionen selbst zurückführte. Es bedurfte eines in allen Gebieten der Functionentheorie völlig neuen und sicheren Grund schaffenden Geistes, wie es Weierstrass war, um auf solchem Wege voran und zum Ziel zu kommen. Und auch ihm, der schon 1840 den Gang Abel's und Jacobi's nochmals selbständig an den elliptischen Functionen sich eröffnet und streng gemacht hatte, gelang es erst Ende der 40^er^ Jahre durchzudringen, um 1853 eine erste systematische Uebersicht zusammenzustellen, dann freilich gleich für die hyperelliptischen Classen von n Variabeln, zu denen der frühere Weg von den Theta's aus, wegen Unkenntniss der Modulbeziehungen für $n > 2$, nicht führen konnte. Was auch für Hermite das Haupthinderniss auf diesem Wege bilden sollte, hat Jacobi schon sehr früh (1846) erkannt*): den damaligen Mangel einer Betrachtung des Gesammtumfangs der Werthe der *algebraischen Function* und ihrer Integrale, auf allen Wegen durch das complexe Gebiet, und der darauf ruhenden Periodenrelationen. Hier eben musste erst, auf Cauchy gestützt, Puiseux und dann Weierstrass eingreifen, und nach ihnen Riemann seine Theorie der algebraischen Functionen aufbauen.

Einen kleineren Beitrag zu dieser Theorie hat auch Hermite geliefert,

---

*) S. dessen nachgelassenen Aufsatz in Ges. Werke, II, p. 516.

indem er in einer kurzen Note von 1851 (C. R. 32), gleich nach der ersten Abhandlung Puiseux', die Galois'sche Gruppentheorie auf die Gesammtheit der Substitutionen anwandte, welche die Wurzeln $u_1, \cdots u_n$ einer algebraischen Gleichung $f(u, z) = 0$ durch die verschiedenen Wege von z erleiden, und die so inducirte Gruppe, die später sogenannte „Monodromiegruppe", in ihrer Bedeutung einführte: als Galois'sche Gruppe im Z-Bereich; so z. B. für die allgemeine n-Theilungsgleichung bei elliptischen Functionen.

Während das Hermite als weites Ziel vorschwebende Gebiet der Abel'schen Functionen von anderen Seiten in Angriff genommen war, war es ihm später (1855) doch vergönnt, einen der wichtigsten Zweige selbst zu schaffen: die Transformationstheorie. Zunächst aber drängte ihn seine Ideenfülle auf ein anderes Feld, das *arithmetische*, auf das wir ihm nun zu folgen haben.

Auf jene ersten beiden Briefe an Jacobi folgen drei Jahre stillen Arbeitens, um dann einer *arithmetisch-algebraischen Periode* Platz zu geben. Sie wird wiederum eingeleitet durch vier überreiche Briefe an Jacobi, die 1850 unter dem Titel „Sur différents objets de la théorie des nombres" im Crelle'schen Journal (Bd. 40) erschienen und 1851 in den 2ten Band von Jacobi's Werken aufgenommen sind. Man wird die fehlende Datirung, nach Einzelheiten des Inhalts, auf 1847 für die zwei ersten, auf 1848 für die zwei letzten Briefe (oder Anfang 1849 für den letzten) anzusetzen haben. Dazwischen fällt noch eine grössere Ausarbeitung von März 1848 in Crelle's J. 36, und es folgt eine zusammenfassende Darstellung im Juli 1850 (Cr. J. 41), mit weiteren Verallgemeinerungen 1853 (ib. 47) und 1856 (ib. 53).

Hermite wird zunächst von der arithmetischen Methode angezogen, wie sie Jacobi in jener mehrfach angeführten Abhandlung, Crelle J. 13, angewandt, um die Unmöglichkeit einer eindeutigen Function einer Variabeln mit mehr als zwei Perioden nachzuweisen. Er fasst die Methode als Verallgemeinerung des Kettenbruchalgorithmus auf, benutzt sie, um nachzuweisen, dass ein Ausdruck $A\alpha + B\beta + \gamma$ bei beliebigen reellen Grössen A, B durch ganze Zahlen α, β, γ zu Null oder aber beliebig klein gemacht werden kann, und er stellt sich die Aufgabe, auch die aus Gleichungen dritten Grades stammenden algebraischen Zahlen analog zu charakterisiren, wie es seit Lagrange für die ganzzahligen Gleichungen 2ten Grades geschehen ist. Hierbei bestätigt Hermite zunächst zwar den ersten Theil eines von Dirichlet gethanenen Ausspruches (1833; dessen Werke I, S. 197): „Es scheint eine Eigenthümlichkeit dieses Theils der Mathematik [der Theorie der Zahlen] zu sein, dass darin grosse Fort-

schritte fast immer durch die Bemühungen hervorgerufen werden, wodurch man sich von der Richtigkeit einzelner auf dem Wege der Induction gefundener Sätze zu überzeugen sucht“; aber wenn Dirichlet fortfährt: „während in allen anderen Zweigen der Analysis bedeutende Resultate eine Folge neuer Gesichtspunkte zu sein pflegen“, so war er bekanntlich kurz darauf durch Einführung seiner analytischen Gesichtspunkte selbst dazu gekommen, die Zahlentheorie aus der bisherigen isolirten Stellung zu erheben und sie auch bezüglich der Forschungsmethode den übrigen analytischen Zweigen gleichzustellen. Und auch Hermite gelingt es sehr bald, zu einem neuen einheitlichen Gesichtspunkte und einer festen Methode, und damit zur Erledigung neuer Probleme, vorzudringen.

Beim eifrigen Studium der Disquisitiones Arithmeticae wurde sein Geist vor Allem von dem rein *algebraischen* Charakter so vieler Definitionen und Entwicklungen berührt, der ganz unabhängig dasteht von der Annahme der Ganzzahligkeit der Coefficienten und Variabeln in den dort behandelten binären und ternären quadratischen Formen. „In diesem immensen Untersuchungsgebiet, das uns von Gauss eröffnet ist“, schreibt er im dritten der Briefe, „scheinen mir die Algebra und die Theorie der Zahlen zu einer und derselben Ordnung der analytischen Begriffe verschmelzen zu sollen“. Und dieses von Gauss vorbereitete mächtige Instrument der *quadratischen Formen* für seine allgemeinen Fragen zu verwerthen, war die neue Idee Hermite's. Dazu gesellte sich aber ein zweiter Gedanke, welcher diese Idee erst fruchtbar machte, indem er die Fragen der unbestimmten Analysis auf elementare Principien zurückführte: *die Einführung willkürlicher, continuirlicher Parameter* in die, seinen Problemen zu adjungirenden, wesentlich positiven quadratischen Formen.

So führt Hermite die gewöhnliche, aus der Kettenbruchentwicklung folgende Annäherung an eine Zahl A durch Brüche $\frac{m'}{m}$ zurück auf die Betrachtung der binären Form

$$(x'-Ax)^2+\frac{x^2}{\Delta},$$

mit dem willkürlichen positiven Parameter Δ, und mit der Determinante $D=-\frac{1}{\Delta}$. Man weiss, dass man die Form, also auch jeden ihrer beiden Theile, durch ganze Zahlen $x=m$, $x'=m'$ kleiner als $\sqrt{-\frac{4}{3}D}=\sqrt{\frac{4}{3\Delta}}$ machen kann, und hat somit $m<\sqrt[4]{\frac{4\Delta}{3}}$, $\left|\frac{m'}{m}-A\right|<\frac{2}{m^2\sqrt{3}}$. Nimmt man hier diejenigen Zahlen m, m', welche die Form bei gegebenem Δ zu einem Minimum machen, so wird, für $x<m$, auch $(m'-Am)^2<(x'-Ax)^2$; und man erhält so, wenn man Δ stetig von 0 bis $+\infty$ wachsen lässt,

als sprungweise sich ändernde zahlentheoretische Functionen der stetigen Grösse Δ eine Reihe von Brüchen $\frac{m'}{m}$, welche die nach Lagrange charakteristische Eigenschaft der successiven Näherungsbrüche der Kettenbruchentwicklung von A haben, also die Gesammtheit dieser Brüche gerade wiedergeben.

Analog wird die oben berührte erweiterte Frage nach der gleichzeitigen Annäherung von zwei Zahlen A, B durch zwei Brüche $\frac{m'}{m}$ und $\frac{m''}{m}$ behandelt, mittelst Untersuchung der Minima der definiten ternären Form

$$f = (x' - Ax)^2 + (x'' - Bx)^2 + \frac{x^2}{\Delta},$$

wo Δ wieder ein stetiger positiver Parameter; einer Form, die, nach den Disquis., immer unter $\frac{4}{3}\left|\sqrt[3]{D}\right| = \frac{4}{3\sqrt[3]{\Delta}}$ bleibt. Directer wird die Annäherung an Null von $A\alpha + B\beta + \gamma$ auf die successiven Minima der zu f im Gauss'schen Sinne „adjuncten" Form

$$(Ax' + Bx'' + x)^2 + \frac{x'^2 + x''^2}{\Delta}$$

bei stetig wachsendem Δ zurückgeführt.

Zur Anwendung dieses Gedankengangs auf höhere Fragen hatte sich Hermite erst den Weg zu bereiten, indem er die definiten quadratischen Formen von beliebig vielen Variabeln, nach dem Vorbilde von Gauss für zwei und drei Variable, durch ganzzahlige lineare Transformationen von der Determinante 1 auf ihre einfachsten Formen zu reduciren, diese Formen also in nicht-äquivalente Classen einzutheilen hatte. Die algebraische Ausdehnung der Theorie der adjuncten Formen bildet hier das Hauptmittel der Untersuchung (2ter und 3ter Brief); sie dienen zur succesiven Aufstellung der Grenzbedingungen für die Coefficienten der Reducirten, die wenigstens so weit eingeschränkt werden, dass höchstens endlich viele Reducirte zu einer Classe gehören; und die Grenzbedingungen liefern das Minimum der Form bei gegebener Determinante. So ergiebt sich also auch die *Endlichkeit* der Anzahl der nicht-äquivalenten Classen von definiten quadratischen ganzzahligen Formen.

Als erste grössere Anwendung erhält Hermite Fundamentalsätze der Theorie der allgemeinsten *algebraischen ganzen Zahlen* (1ter Brief). Für eine ganzzahlige Gleichung n^{ten} Grades

$$F(x) = x^n + Ax^{n-1} + \cdots + L = 0,$$

mit den reellen Wurzeln α_i, werden, mittelst n Unbestimmter $x_0, \cdots, x_{n-1}$, die n Functionen

$$\varphi(\alpha_i) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_i^k x_k$$

aufgestellt und danach das Product

$$f = \mathrm{Norm}\,[\varphi(\alpha_i)]$$

und die definite quadratische Form

$$f' = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i \varphi^2(\alpha_i)$$

mit den willkürlichen stetigen positiven Parametern Δ_i, mit einander verglichen. [Wenn die Wurzeln α_i nicht alle reell sind, so tritt nur je an Stelle zweier Quadrate ein auf zwei imaginär-conjugirte Wurzeln bezügliches Product.] Ganzzahlige Werthe der Grössen x_k, die f' bei gegebenen Δ_i zu einem Minimum machen, bewirken auch für f ein Minimum, das sich aber als unabhängig von den Δ_i, nur abhängig von der Discriminante D von $F(x)$ erweist. So ergeben die verschiedenen sprungweisen Minima von f' schon den Satz: dass eine durch f darzustellende ganze Zahl sich für eine unendliche Anzahl verschiedener Werthsysteme der x_k periodisch wiederholen muss. Indem später die lineare Substitution der x_k, welche f' bei gegebenen Δ_i, in seine Reducirte überführt, auch auf f angewandt wird, ergiebt sich, bei stetiger Variation der Δ_i, aus f nur eine begrenzte Zahl transformirter reducirter Formen, die sich gruppenweise wiederholen; aus den Begrenzungen der Reducirten von f' aber der Fundamentalsatz: *dass alle einem Werth der Discriminante D entsprechenden Normformen f nur eine begrenzte Anzahl von Classen bilden.*

In der Abhandlung in Crelle J. 36, bei der von vornherein in φ, f, f' die Grössen $x_2, \cdots, x_{n-1}$ gleich 0 gesetzt sind, zeigt sich endlich, dass es, bei einer gegebenen Determinante D' — auf deren invariantentheoretische Definition wir noch zurückzukommen haben —, nur eine endliche Anzahl von Classen nicht-äquivalenter binärer Formen n^{ten} Grades, $F(x)$, giebt.

Hermite zog bei diesen Untersuchungen vor Allem das Ziel an, das sich ihm eröffnete: die Charakterisirung der aus allen ganzzahligen Gleichungen stammenden Irrationalitäten, der „algebraischen Zahlen“, und ihre Classificirung. Der periodische Charakter, welche das Wiederauftreten derselben Reducirten bei den successiven Aenderungen der Parameter Δ_i an sich trägt, war ja eine Verallgemeinerung derselben Erscheinung bei der Kettenbruchentwicklung einer Quadratwurzel. Und Hermite bescheidete sich, wenn es ihm nur vergönnt war, einem grossen Ziel einige Schritte entgegengegangen zu sein. Indessen gelangen ihm hier noch weitere wesentliche Schritte.

So sind mit den genannten Untersuchungen auf der einen Seite, für $n=2$, auch die indefiniten binären quadratischen Formen, mit ihrer Periode reducirter Formen in jeder Classe, erledigt. Auf der andern Seite, bei beliebigem n, erhält man für die Gleichung Norm $[\varphi(\alpha_i)]=1$ alle Lösungen, d. h. alle zu $F(x)=0$ gehörigen *complexen Einheiten.* Und hierbei findet Hermite (3[ter] Brief) den für diese Einheiten $\varphi(\alpha_i)$ grundlegenden Satz, dass sie sich, wie bei dem Specialfall der Pell'schen Gleichung, aus einer endlichen Anzahl solcher, und einer Einheitswurzel, als Producte von positiven und negativen Potenzen derselben, ergeben. Es war ihm damals von Arbeiten über complexe Zahlen nur die kurze Note Jacobi's von 1839 bekannt, aber unbekannt, dass Dirichlet nicht nur denselben Satz, den er seit 1840 in den Comptes Rendus vorbereitet hatte, schon 1846 gefunden, sondern auch die Anzahl der Einheiten eines solchen Fundamentalsystems, welche Hermite in seinem 4[ten] Briefe angiebt, für alle Fälle genau zu $h-1$ bestimmt hatte, wenn h die Anzahl der reellen und der Paare conjugirter Wurzeln von $F(x)=0$ bedeutet; und unbekannt, dass auch Kronecker in seiner Dissertation von 1845 für die aus Wurzeln der Einheit gebildeten complexen Zahlen, auf eine Untersuchung Kummer's gestützt, den Satz schon aus einer Minimumsbetrachtung abgeleitet hatte. Uebrigens liegt ein 1883 von Kronecker gegebener Beweis des Dirichlet'schen Satzes nicht weit von dem Hermite's ab, indem es sich hier, wie auch bei den Fragen von Hermite, Riemann und Weierstrass nach der möglichen Anzahl der Periodensysteme von Functionen, immer um die näherungsweise ganzzahlige Auflösung eines Systems linearer Gleichungen, mit Angabe des Grades der Annäherung, handelt.

Dass Hermite auch das mit dem Normproblem engverwandte Problem der allgemeinen Formen, welche in lineare Factoren zerlegbar sind, analog erledigt (Brief 3), bedarf kaum der Erwähnung.

Die wichtigste Anwendung ist von Hermite 1853 ausgeführt worden (drei Abhandlungen in Crelle J. 47): es gelang ihm die Zurückführung auch der allgemeinen *indefiniten* quadratischen Formen mit beliebig vielen, insbesondere drei, Veränderlichen auf seine definiten Formen. Das Princip ist, dass aus einer indefiniten Form $F(x, y, z)$, deren Determinante D und deren adjuncte Form $\frac{\partial D}{\partial a}u^2+\cdots=G(u, v, w)$ ist, in

$$F'=F+2(ux+vy+wz)^2,$$

für $G(u,v,w)=-D$, definite Formen F' hergeleitet werden können, die noch von willkürlichen stetigen Parametern $u:v:w$ abhängen, und deren continuirliche Reduction zugleich die von F liefert. Die besonderen Schwierigkeiten, welche den indefiniten Formen innewohnen, zeigen sich beim Aequivalenzproblem: eine solche Form lässt sich durch unendlich-viele ganzzahlige

Substitutionen mit der Determinante 1, durch die sog. „ähnlichen" Substitutionen, in sich selbst transformiren. Diese führt Hermite auf eine endliche Anzahl von erzeugenden Substitutionen zurück, aber — im Gegensatz zu dem, was in der sonst analogen Theorie der zerlegbaren Formen eintritt — von nicht vertauschbaren. Die Betrachtung der Formen F' ergiebt dann auch hier den Satz, dass alle ganzzahligen quadratischen Formen, die zu derselben Discriminante und zu demselben „Typus" — d. h. denselben Anzahlen positiver und negativer Quadrate in ihrer Normalform — gehören, in eine endliche Anzahl von Classen zerfallen. Hiermit waren die allgemeinen Umrisse dieses neuen Gebiets fixirt.

Ferner betrachtet Hermite auch bilineare Formen mit *conjugirt-imaginären Variabeln und Coefficienten:*

$$f = \sum a_{ik} x_i \bar{x}_k \quad (i, k = 1, 2, \cdots n;\ \bar{x}_k \text{ conj. zu } x_k;\ a_{ki} \text{ conj. zu } a_{ik}),$$

bei linearer Transformation der x_i und conjugirt-imaginärer Transformation der $\bar{x}_k$. Diese speciellen („Hermite'schen") quadratischen Formen von $2n$ Variabeln behandelt er arithmetisch genau in dem Sinne, wie seine quadratischen Formen von n Variabeln, indem er sie in Typen unterscheidet und reducirt (ibid.). So erhält er wieder, was sein eigentlicher Ausgangspunkt war: die Darstellung einer ungeraden Zahl durch vier Quadrate und die successiven Annäherungen an irgend eine imaginäre Zahl durch imaginäre Brüche (s. den 3ten der früher angeführten vier Briefe). Aber er gelangt mit diesem Hülfsmittel auch dazu (Cr. J. 53 und C. R. 44), sein Theorem über die Gleichungen n^{ten} Grades, wie das über die zerlegbaren Formen, auf solche mit imaginären ganzen Coefficienten auszudehnen.

Wenn wir auf diese Ergebnisse zurücksehen, welche Hermite aus seiner neuen Methode der Adjunction quadratischer definirter Formen mit willkürlichen stetigen Parametern gewonnen hat, so drängt sich die Frage auf, warum diese Methode unter seinen Händen*) nicht auch weiterhin ihre ursprüngliche Fruchtbarkeit in demselben Masse bewährt hat. Heute ersieht man den Grund: während Hermite auch in der Zahlentheorie ganz *algebraisch* dachte, entstand in derselben Zeit, in der er in dieser Theorie zu arbeiten anfing, auf dem Boden der *arithmetischen* Begriffe der Theilbarkeits- und Congruenzbeziehungen, also an Dirichlet anschliessend und unter den Händen Kummer's (Cr. J. 35), zunächst der neue und wesentliche Begriff der idealen Primtheiler, und endlich, über die aus Perioden von Einheitswurzeln gebildeten ganzen Zahlen hinausgehend, durch Dedekind und

*) Die durch diese Methode angeregten und sie fortführenden Untersuchungen Minkowski's in dessen „Geometrie der Zahlen" (1896) benutzen noch Dirichlet'sche und weitere Principien.

Kronecker die arithmetischen Begriffe und Theorien der algebraischen Zahlkörper und noch allgemeinerer algebraischer Körper. So blieb in Hermite's Auffassung der arithmetischen Grundbegriffe für seine höheren Zahlbereiche, die nur ganzzahlige Functionen einer ganzen algebraischen Zahl kannten, von vornherein eine Lücke, die ihn an der Erreichung der vollen Allgemeinheit für seine Theorien hinderte. Trotzdem hat er zu einer weiteren Grundlage einer Theorie solcher Körper im Kronecker'schen Sinne durch den auch von ihm gefundenen Satz über das endliche Fundamentalsystem für die complexen Einheiten, und für die zerlegbaren Formen überhaupt, einen Beitrag geliefert. Dass ihm damals aber die zukünftige Bedeutung dieser Dinge nicht fremd war, beweist sein Ausspruch (Cr. J. 40, 3ter Brief): „C'est là un résultat qui ouvre la voie à un nouvel ordre de recherches destinées, si je ne m'abuse étrangement, à jeter un grand jour sur la nature si inconnue des irrationnelles algébriques."

Den Umstand übrigens, dass die Adjunction der quadratischen Formen überhaupt, auch der Hermite'schen, in vielen Theorien eine grosse Rolle spielt, werden wir noch an einigen Stellen zu berühren haben.

Aus dem algebraischen Geiste Hermite's, wie er sich an diesen arithmetischen Untersuchungen entwickelte, ist eine Reihe von bedeutenden Errungenschaften für die *Algebra* hervorgegangen, darunter solche, die für einen Zweig dieser Wissenschaft, die *neuere Formentheorie*, grundlegend geworden sind.

Hierher gehört vor Allem die algebraische Theorie der *quadratischen Formen* überhaupt. In ihrer Behandlung giebt Hermite (Cr. J. 47) die unendlich vielen reellen Transformationen einer ternären Form in sich — in Erweiterung von Cayley's Untersuchung für Summen von Quadraten — in schon ziemlich vollkommener Gestalt, indem er die einzelne Substitution je einer linearen Form zuordnet, die zugleich mit der ternären Form unverändert bleibt. Zu bemerken ist nur*), dass Hermite hier noch nicht alle Transformationen erhält; aber er hat für die eigentlichen Transformationen (von Determinante $+1$) einer nicht-speciellen ternären Form 1874 (Cr. J. 78) die Lücke auf einfache Weise ausgefüllt. Ferner hat er 1856 (Cr. J. 53) einen Beweis des Trägheitsgesetzes gegeben, wenigstens bei nicht verschwindender Determinante der Form. Auf die Frage, wie weit etwa Hermite auch an der ersten Aufstellung dieses Gesetzes betheiligt ist, braucht hier nicht weiter eingegangen zu werden, da sie in meinem Aufsatz über Sylvester**) ausreichend erörtert ist; nur möge

*) Cf. Bachmann in Cr. J. 76.

**) Diese Annalen, Bd. 50.

hinzugefügt sein, dass für ternäre Formen der Satz schon in Nr. 271 der Disquisitiones arithmeticae ziemlich deutlich enthalten ist*).

Auch über das erst von Jacobi, dann auch von Hermite angegebene Princip, die Sturm'schen Kriterien für die Realität der Wurzeln einer Gleichung aus Betrachtung an quadratischen Formen, welche der Gleichung adjungirt werden, zu erschliessen — ein Princip, das jenes Gesetz zur Voraussetzung hat —, wurde in dem eben angeführten Aufsatz Bericht erstattet. Hermite erhält nicht nur, durch Adjunction von Quadratsummen aus ähnlichen Functionen der Wurzeln, die unendlich vielen Gestalten, in welche die Sturm'schen Kriterien gefasst werden können (publicirt in C. R. t. 36, Febr. 1853), sondern auch (ib.) die Ausdehnung auf zwei simultane Gleichungen, nachdem er sie schon vorher (C. R. 35) auf dem Sylvester-Cayley'schen Wege gegeben hatte, sowie auch, mit Hülfe seiner Formen mit conjugirten Variabeln, die Ausdehnung auf Gleichungen mit imaginären Coefficienten (Cr. J. 52). Es gelingt Hermite hierbei auch, durch rationale Transformation $u = \varphi(x)$ der Gleichung $f(x) = 0$, den Cauchy'schen Satz über die Zahl der Wurzeln innerhalb eines complexen Gebiets abzuleiten, wenn auch nur für den Fall einer Begrenzung durch rationale Curven: also diese Erweiterung des Sturm'schen Satzes ohne Stetigkeitsuntersuchung zu erhalten. Es führt diese Methode zu einem Theil von Kronecker's „Charakteristikentheorie von Functionen". Auch Hermite's Satz (Cr. J. 41), dass die verallgemeinerte Säculargleichung, in welcher die Elemente a_{ki} conjugirt-imaginär zu a_{ik} sind, nur reelle Wurzeln hat, gehört in das hier besprochene Gebiet. —

Die Nothwendigkeit, zur arithmetischen Reduction der binären Formen n^{ten} Grades die Begriffe der „Determinante" und der „adjuncten Form", welche Gauss für binäre und ternäre quadratische Formen geliefert hatte, und den Classenbegriff der Zahlentheorie überhaupt, algebraisch zu erweitern, hat Hermite's Entdeckungskraft auf's höchste angeregt; es wirkte dieselbe Ursache und in derselben Richtung, wie einige Jahre vorher bei Eisenstein**). Aber Hermite's Resultate sind hier völlig original.

Hermite hatte (in der o. c. Abhandlung, Cr. J. 36, 1848) bei gleichzeitiger Reduction einer binären Form n^{ten} Grades

$$F(x, y) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} y + \cdots + A_n y^n$$
$$\text{(mit } n \text{ reellen Wurzeln } \alpha_1, \cdots \alpha_n)$$

und einer zugeordneten definiten quadratischen Form

*) Dass Gauss das Gesetz gekannt und 1846/47 vorgetragen hat, ergiebt sich auch aus einer Bemerkung Riemann's in einer Vorlesung, die demnächst publicirt werden soll.

**) S. Crelle's Journ., 27.

$$f=\sum_{i=1}^{n}\Delta_i(x-\alpha_i y)^2 \qquad (\Delta_i>0)$$

Begrenzungen für die Coefficienten der Reducirten von F erhalten, die nur von

$$D=A_0^2\,\frac{\Delta^{\frac{n}{2}}}{\Delta_1\Delta_2\cdots\Delta_n}$$

abhingen, wo

$$\Delta=\frac{1}{2}\sum_{i,j}(\alpha_i-\alpha_j)^2\Delta_i\Delta_j$$

die Determinante von f ist; so für das Product der äusseren Coefficienten A_0', A_n' der Reducirten von F:

$$|A_0'A_n'|<\left(\frac{1}{n}\right)^n\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{n}{2}}D.$$

Der positive Ausdruck D nimmt aber, als Function der Parameter Δ_i, für gewisse Werthe Δ_i' der Δ_i einen Minimalwerth D' an, der für alle linear transformirte Aequivalente von $F(x, y)$ immer derselbe werden muss. So erkennt Hermite also in D' eine *Invariante der binären Form* $F(x, y)$, und aus demselben Grunde in

$$f'=\sum\Delta_i'(x-\alpha_i y)^2$$

eine *quadratische Covariante* von $F(x, y)$ (für letzteres s. die Abhandlung von 1850 in Crelle J. 41 über Einführung der continuirlichen Parameter). Nur sind D' und f' irrational, rational nur für $n=3$, wobei D' die Discriminante von F ist; während schon für $n=4$ $D'=A_0^2(\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_3-\alpha_4)^2$ die Wurzel der cubischen Resolvente, f'^2 eines der drei in dem Büschel $F+\lambda H(F)$ [$H(F)$ die Hesse'sche von F] enthaltenen vollständigen Quadrate wird.

Die Bezeichnungsweise war im Anschluss an Cayley und Sylvester gewählt, die seit einigen Jahren mitten in der Entwicklung der Fundamentalprobleme der Theorie der binären Formen niedrigeren Grades begriffen waren und mit denen Hermite seit dieser Zeit (etwa 1851) in engen Verkehr getreten war. Die frühere Bezeichnung „formes adjointes" deutet auf eine zweite Erzeugungsweise für invariante Bildungen hin, welche Hermite schon 1848 (Cr. J. 40, 3ter Brief) ersann, und welche, gültig für Grundformen beliebigen Grades, unabhängig von der Realität der Wurzeln, und mit beliebig vielen Veränderlichen, weit über das beschränkte Feld der ersten Erzeugungsweise hinausging und sich überdies viel leichter handhaben liess.

Hermite hatte, in Verallgemeinerung der Theorie der quadratischen Grundformen, erkannt, dass aus der Discriminante einer Form n^{ten} Grades $F(x_1, \cdots x_m)$ eine Reihe von „adjungirten Formen", nach späterem Sprachgebrauch von „Contravarianten", dadurch zu erhalten ist, dass man die Coefficienten von F durch die entsprechenden Coefficienten von

$$F + \lambda(u_1 x_1 + \cdots + u_m x_m)^n$$

ersetzt: die Factoren der Potenzen von λ bilden jene Reihe. Von diesem „Evectantenprocess", wie ihn Sylvester nannte*), ersah Hermite (Cr. J. 40) noch einen andern, einige Jahre später von Sylvester wiedergefundenen, Fall: dass man in einer binären Form die Variabeln $-x_2, x_1$ durch die ersten Differentialquotienten nach x_1, x_2 einer Covariante ersetzt. In der Abhandlung im Cambridge and Dublin Math. J. Bd. 9, 1854 dehnte er dann dieses Verfahren auf Ersetzen der Potenzen und Producte von $-x_2$, x_1 durch die entsprechenden höheren Differentialquotienten einer Covariante aus, d. h. er erhielt den „Ueberschiebungsprocess" Cayley's.

Während sich nun so die zu einer Form 3^{ten} Grades gehörigen Bildungen, die schon Eisenstein besass, direct ergaben, wurde Hermite bei der Ableitung der, ihm durch Cayley übrigens bereits bekannten, Relation zwischen den fünf Bildungen einer binären biquadratischen Form aus einer von ihm berechneten Resolventenrelation (Cr. J. 52, 1854) auf ein neues allgemeines Resultat geführt: die Ableitung von Covarianten, oder von Relationen zwischen solchen, aus dem ersten Coefficienten, dem „Quellgliede". Hermite ersetzt diesen ersten Coefficienten durch seinen transformirten, nimmt zwei der Substitutionscoefficienten als die neuen Variabeln und hat damit unmittelbar die neue Covariante. Cayley freilich hatte um dieselbe Zeit (Cr. J. 47) schon sein aus der partiellen Differentialgleichung für die Covarianten gezogenes allgemeineres Verfahren veröffentlicht. Aber der einfache Gedanke Hermite's musste 1875 von Faà di Bruno, sogar in einer weniger allgemeinen Form, erst wieder entdeckt werden, um Eingang zu finden.

Die wichtigsten Entdeckungen Hermite's auf dem neuen Gebiete sind in seiner vorhin citirten, an neuen Gesichtspunkten und Resultaten ausserordentlich reichen, Abhandlung im Cambridge and Dublin Math. J. „Sur la théorie des fonctions homogènes à deux indéterminées" niedergelegt. Hier ist der Ausgangspunkt sein *Reciprocitätsgesetz*, dass jeder Covariante φ, r^{ten} Grades und von der Ordnung p in den Coefficienten einer binären Form m^{ten} Grades f, eine Covariante φ', r^{ten} Grades und von der Ordnung m in den Coefficienten einer binären Form p^{ten} Grades f' entspricht. Dieses Gesetz wird von Hermite durch eine *symbolische* Darstellung a_x^m

*) Cambr. and Dubl. Math. J., Bd. 7.

einer Form m^{ten} Grades gewonnen, welche weniger mit der Cayley'schen, als mit der von Aronhold ausgehenden Symbolik völlig übereinstimmt; man mag kurz sagen, dass man φ' aus φ erhält, indem man φ zunächst durch die Wurzeln α von f ausdrückt (oder auch direct als Covariante einer in m Factoren zerfallenden Form f auffasst) und dann Aggregate wie $(\alpha_1-\alpha_2)^i$, $(x_1-\alpha_1 x_2)^k$ bezw. durch auf $f'=a_x'^p$ bezügliche Symbole $(a'b')^i$, $a_x'^k$ ersetzt.

In der abzählenden Richtung, welche späterhin Cayley und Sylvester eingeschlagen haben, kommt das Gesetz zur Geltung. Hermite, und Anderen, diente es, um von der bekannten Theorie der binären quadratischen Formen aus eine Menge neuer Invarianten und Covarianten zu entdecken, vor Allem eine in den Coefficienten und in den Variabeln quadratische Covariante φ_2 der Form f von ungeradem Grade m. Diese Covariante, sowie die mit Hülfe seines Ueberschiebungsprocesses daraus abgeleiteten linearen Covarianten, bilden die Grundlage, welche Hermite erlaubte, an sein eigentliches Ziel heranzutreten: die Behandlung der Gleichungen 5^{ten} Grades.

Indess genügte die so erhaltene beschränkte Anzahl von zu f gehörigen Bildungen Hermite noch nicht. Er suchte eine Methode, welche ihm einen Einblick in das gesammte System bieten konnte, das sich aus einer Grundform ableiten liesse, und er fand sie in einer glücklichen Anwendung des oben berührten Processes der ersten Ueberschiebung: in seiner *Theorie der associirten Formen* (ibid. und Cr. J. 52). Hermite ersetzt hier die Variabeln x_1, x_2 einer Covariante g von f bezw. durch

$$x_1 X_1 - \frac{1}{\nu}\frac{\partial h}{\partial x_2} X_2, \quad x_2 X_1 + \frac{1}{\nu}\frac{\partial h}{\partial x_1} X_2,$$

wo h irgend eine Covariante ν^{ten} Grades von f ist, und hat nun in den Coefficienten der so entstehenden Form $g'(X_1, X_2)$ eine Reihe von Covarianten von f, die, im Falle f selbst für g genommen wird, als „das zu h associirte System von f“ [Schwesterformen zu h] bezeichnet wird: alle die unendlich-vielen invarianten zu f gehörigen Bildungen werden, bis auf eine Potenz von h, ganze rationale Functionen dieser Formenreihe. Auch die einfache Herstellung dieses Ausdrucks, und die Berechnung des zu f associirten Systems, hat Hermite gezeigt.

In den *Anwendungen* auf die Formenzusammenhänge für die Grundformen niedrigeren Grades hat diese Theorie unter den Händen Hermite's, und dann Brioschi's*), eine entscheidende Rolle gespielt. Der Erstere hat insbesondere auf die gleichzeitige Benutzung der beiden, zu f oder zur Hesse'schen $H(f)$, associirten Systeme, seinen Beweis für die Endlichkeit des Formensystems einer binären biquadratischen Grundform gestützt

*) S. meinen Aufsatz über F. Brioschi, diese Annalen Bd. 50.

(Cr. J. 52), während der Satz selbst ohne Beweis schon von Cayley ausgesprochen war (Cr. J. 50).

Die *Theorie der binären Grundform* 5^{ten} *Grades*, f_5, ist eines der umfassendsten Werke Hermite's. Für diese Form hat er, mit Hülfe der schon erwähnten quadratischen und linearen Covarianten, invariante Darstellungen erfunden (Cambr. and Dubl. Math. J. 9), welche er theilweise als *kanonische*, theilweise als *typische* bezeichnet; und unter letzterem Namen sind sie, unter Weiterführung der Theorien und Ausdehnung auch auf Grundformen geraden Grades*), in die neuere Algebra als wesentlicher Bestandtheil eingegangen. Sie unterscheiden sich von der in der Theorie der associirten Formen auftretenden Darstellung dadurch, dass nun die transformirte Gestalt von f nur Invarianten, statt Covarianten, als Coefficienten hat, hängen aber, wenn man dort h gleich der quadratischen Covariante φ_2 von f_5 setzt, eng mit jener zusammen. So werden einmal als neue Variable die beiden Factoren dieser Covariante φ_2 benutzt, wobei in die Coefficienten die Invarianten J_4, J_8, J_{12} der Ordnungen 4, 8, 12, sowie $\sqrt{J_4}$, rational eintreten, und zwar, von einer Potenz von J_4 als Factor abgesehen, in nur zwei absolut invarianten Combinationen. An diese Untersuchung knüpft sich eine unvermuthete Entdeckung Hermite's: die einer Invariante J_{18}, 18^{ter} Ordnung in den Coefficienten von f_5, der ersten windschiefen Invariante, und mit der Eigenschaft, dass erst ihr Quadrat eine rationale ganze Function von J_4, J_8, J_{12} wird, während alle übrigen Invarianten, zunächst bis auf eine ganze Potenz von J_4, rationale ganze Functionen dieser vier Invarianten werden. Zur typischen Darstellung von f_5 benutzt Hermite als neue Variable zwei lineare Covarianten von der 5^{ten} und 7^{ten} Ordnung, in welcher sich φ_2 als Summe zweier Quadrate ergiebt; und auch hier folgt der eben angeführte Satz über den Ausdruck aller Invarianten von f_5, nur dass eine Potenz von J_{12} als Nenner auftritt. Der Vergleich beider Ausdrücke führt Hermite endlich zum Schluss, dass sich alle Invarianten schon als *ganze* Functionen der vier Fundamentalinvarianten darstellen lassen; ein Satz, den er später (C. R. Bd. 61, 1865) auch aus dem functionentheoretisch ganzen Charakter der Invarianten abgeleitet hat.

Doch waren alle diese umfassenden Gedanken und Untersuchungen in der Formentheorie für Hermite nur Vorbereitungen für die *Gleichungstheorie.* Es handelt sich für ihn um Aufstellung von invarianten Kriterien für das Verhalten der Wurzeln einer Gleichung 5^{ten} Grades bezüglich *Realität.* Dass die typische Form von f_6 aus reellen Substitutionen resultirt, zeigt die Möglichkeit solcher Ausdrücke; aber bei der complicirten Gestalt jener Form stellte die wirkliche Herstellung noch grosse

*) Clebsch, Binäre Formen, 1872.

Anforderungen an den Forscher, die er durch continuirliches Variiren der Parameter J_4, J_8, J_{12} unter der Bedingung $J_{18} = 0$, und Untersuchen der dadurch bedingten Verzweigung von J_4 überwand. Zunächst freilich erhielt er nur hinreichende Bedingungen*); aber gerade dieser Umstand trieb ihn späterhin zu neuen grossen Anstrengungen auf dem Gebiet der Invariantentheorie, und nun in ganz directem Zusammenhang mit dem Ziel, das sich ihm inzwischen darbot: der *Lösung* der Gleichungen 4^{ten} und 5^{ten} Grades.

Er stellte sich die Aufgabe, möglichst einfache Resolventen einer Gleichung $f = 0$ [im uneigentlichen Sinne, nämlich unter Adjunction „accessorischer“ Irrationalitäten], mit invarianten Coefficienten und mit besonderen Invarianteneigenschaften, aufzustellen; und für diesen Zweck ersann er verschiedene neue Formen der *Tschirnhausen-Transformation.*

Die erste Gestalt, welche Hermite der Transformation giebt (C. R. Bd. 46, 1858), ist diejenige, welche aus

$$f_n(x) = 0, \quad z = \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

hervorgeht, indem man die Potenzen t^i durch Parameter $t_i (i = 0, 1, \cdots n-1)$ ersetzt und die in den t_i lineare Relation hinzunimmt, welche das zweite Glied der transformirten Gleichung in z zu Null macht. Die übrigen Coefficienten werden dann Covarianten von f_n, aber in den $n-1$ Variabeln $t_0, \cdots t_{n-2}$, die sich wie die Potenzen von x transformiren. Die Theorie wird benutzt, um, den Gleichungen bei der Transformation dritter Ordnung der elliptischen Functionen entsprechend, im Falle $n = 4$ die Gleichung $f_4(x) = 0$ in eine solche zu transformiren, deren quadratische Invariante verschwindet. Und die invariantentheoretische Untersuchung solcher Formen in den t_i hat für $n = 5$ späterhin unter den Händen von F. Klein, wenn auch von anderem Ausgangspunkte aus und das binäre Gebiet überschreitend, eine Grundlage von dessen Theorie einer Reduction der Gleichung 5^{ten} Grades gebildet.

Die zweite Gestalt (C. R. Bd. 61, 1865) erreicht den Zweck durch eine Transformation

$$f_n(x) = 0, \quad z = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

wo P und Q Covarianten gleichen Grades von $f_n(x)$ sind.

Hierher gehört schon, dass er (Cr. J. 52), vermöge der Relation zwischen den Bildungen einer allgemeinen biquadratischen Form f_4, das elliptische Integral mit $\sqrt{f_4}$ vermittelst einer derartigen Transformation $z = \frac{H(f_4)}{f_4}$ in eine invariante (Weierstrass'sche) Gestalt übergeführt hatte;

*) S. meinen Aufsatz über J. J. Sylvester; diese Annalen Bd. 50, S. 150.

sowie die spätere Transformation dritter Ordnung $z = \frac{P}{Q}$, wo P, Q Polaren von f_4 sind (Cr. J. 60).

Nun wählt Hermite, an die Partialbrucheigenschaften von $\sum_i \frac{\varphi(x_i)}{f'(x_i)}$ anschliessend, für $n > 4$ die Transformationsformel [x_1, x_2 binäre Variable]:

$$f_n(x_1, x_2) = 0, \qquad z = \frac{(a_1 x_2 - a_2 x_1) \sum_{k=1}^{n-1} t_k \varphi_{n-2}^{(k)}(x_1, x_2)}{\frac{\partial f}{\partial x_1} a_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} a_2}.$$

ein von den a_1, a_2 unabhängiger Ausdruck, in dem die $\varphi_{n-2}^{(k)}$ $n-1$ Covarianten $(n-2)^{\text{ten}}$ Grades der Grundform n^{ten} Grades, $f_n(x_1, x_2)$, sind, die t_k aber $n-1$ willkürliche Parameter, die etwa benutzt werden, um, neben dem zweiten, eine Reihe von weiteren Gliedern der transformirten Gleichung $F(z) = 0$, als Formen in den t_k, zu Null zu machen. In Bezug auf die allgemeine Gleichung 5^{ten} Grades dient Hermite diese Methode, um dieselbe in eine 3-gliedrige, und auch in andere Formen überzuführen; und dabei erlangt er auch, indem er die Invarianten als Functionen der Wurzeln discutirt, die Verbindung mit den Resolventenbetrachtungen Kronecker's. Endlich ergiebt ihm dieser Weg die Revision seiner invarianten Realitätskriterien für die Wurzeln von $f_5(x) = 0$; nur gelingt ihm die Umsetzung der Sturm'schen Functionen in Covariantengestalt (er findet solche in zwei Reihen von Veränderlichen) nicht so einfach, als kurz darauf Schramm*).

Auch auf die *ternären cubischen Formen* hat Hermite seine Methode ausgedehnt. Diese Formen interessirten ihn schon wegen ihres Zusammenhangs mit den elliptischen Functionen und mit speciellen binären Formen und Gleichungen 4^{ten} Grades. Er hat zu diesem Zweck sie zuerst zwar in der Hesse'schen kanonischen Form betrachtet, zum Studium ihrer Contravarianten (Journ. de Math., ser. 2, Bd. 3, 1858); das auf die allgemeine Form bezügliche elliptische Integral jedoch ebenfalls (Cr. J. 63, 1863) in die binäre invariante Gestalt übergeführt. Die kurze Note „Sur le résultant de trois formes quadratiques ternaires" (Cr. J. 57, 1860) ist aber durch methodische und sachliche Fortschritte wichtig: sie giebt die Benutzung der Quellglieder für das ternäre Gebiet und die Ausdehnung des Evectantenprocesses auf dieses Gebiet; und ihr Inhalt geht weit über den an Aronhold, Sylvester und Cayley anknüpfenden Gegenstand des Titels hinaus, da eine zusammenhängende Invariantentheorie des Netzes von drei quadratischen ternären Formen φ_i geliefert wird. Indem sie drei lineare Contrainvarianten des Netzes aufstellt und zur typischen Darstellung der φ_i

*) Annali di Mat., ser. 2, t. 1, 3.

benutzt, führt sie direct zu einer cubischen Form U, deren Derivirte die φ_i werden. Zur Vollständigkeit der Theorie des Netzes fehlt nur noch der Beweis, dass nur *eine* derartige Form U existirt, und die Betrachtung des dem Netze zugehörigen Gewebes. Aber dafür giebt die Note noch einen Ausblick auf eine analoge Theorie für zwei binäre cubische Formen; und dauernd hat sich an sie die Bezeichnung der „Hermite'schen Curve des Netzes“ geknüpft. So kurz solche Noten Hermite's sind, sie pflegen, wie die vorliegende, wesentliche Gedanken in aphoristischer Weise auszusprechen und liefern dadurch oft Grundlagen von Theorien, deren Entwicklung der Forscher seinen Nachfolgern überlassen hat.

Es ist charakteristisch für Hermite, dass hinter diesen bedeutenden rein-algebraischen Zielen und Anwendungen der ursprüngliche Ausgangspunkt seiner invariantentheoretischen Betrachtungen: die Verwendung für die *Arithmetik*, ganz zurücktritt. Er ging, sogleich nachdem er die neuen Begriffe principiell entwickelt hatte, an den Versuch, sie ausgiebiger für die höhere („transcendente“) Zahlentheorie zu verwerthen (Cr. J. 52, 1854): für die wirkliche Aufstellung aller Reducirten der ganzzahligen binären Formen n^{ten} Grades, bei gegebenen Werthen ihres Invariantensystems, wie für das Aequivalenzproblem. Auch ihm war hierbei das Princip Eisenstein's, dass die nicht-äquivalenten Classen von Formen dritten Grades den nicht-äquivalenten Classen von quadratischen Formen (als Covarianten jener) eindeutig entsprechen müssen, das leitende; und es genügt ihm zur Untertheilung der cubischen und biquadratischen Classen in „Ordnungen“ (im Gauss'schen Sinne), und zum Vergleich der, je nach der zu Grunde gelegten Covariante verschiedenen, Untertheilungen. Für die Ableitung der cubischen Classen selbst werden aus diesem Princip sie bestimmende Ungleichungen aufgestellt (C. R. Bd. 48, 1859). Und wenn auch bei diesen Verfahrungsweisen wirkliche Classenzahlausdrücke nicht zu erhalten sind, so ist es doch bedauerlich, dass Hermite auf seine wiederholt ausgesprochene Absicht, von Seiten der Invariantentheorie aus auf diese und andere arithmetische Fragen, insbesondere die Aequivalenztheorien, weiter einzugehen, nicht zurückgekommen ist; und so hat er auch hier ein Untersuchungsfeld offen gelassen.

Auf dem weiten Umweg über die quadratischen und bilinearen Formen, und deren Transformationen in sich, wurde Hermite im Jahr 1855 zu den Bestrebungen der ersten Arbeitszeit zurückgeführt: zu den *Abel'schen Functionen von zwei Variabeln*, und zwar zum *Transformationsproblem.* Von zwei Seiten her waren zur Behandlung dieses Problems inzwischen die Vorbereitungen gefördert. Einmal waren die zugehörigen sechzehn Thetafunctionen von zwei Argumenten ermittelt, und es war auf dieselben

das Umkehrproblem gestützt worden. Auf der andern Seite konnte Hermite daran denken, auf Grund seiner Untersuchungen über bilineare Formen gerade an einem Punkt anzusetzen, in dem das Problem eine Schwierigkeit bot: nämlich dass, im Falle der periodischen Functionen von zwei Variabeln mit vier simultanen Periodensystemen, die Coefficienten in der linearen Substitution zwischen vier alten und vier neuen Periodicitätsmoduln eines Integrals erster Gattung nicht mehr willkürliche ganze Zahlen, von der Determinante k^2 für eine Transformation k^{ter} Ordnung, sind, sondern dass sie noch die linke Seite einer bilinearen alternirenden Relation, welche zwischen den zweimal vier Moduln der beiden hier existirenden Integrale erster Gattung von Rosenhain und Weierstrass nachgewiesen war, in sich transformiren müssen (bis auf den Factor k^2).

Jetzt definirt Hermite das Transformationsproblem so, dass die neuen Variabeln als solche rationale Functionen der ursprünglichen bestimmt werden sollen, welche die Integralsummen, aus denen die linke Seite des Jacobi'schen Umkehrproblems besteht, analog gebildeten in neuen Variabeln proportional machen. Die Noten: „Sur la théorie de la transformation des fonctions Abeliénnes" (C. R. t. 40), eine der geschlossensten Darstellungen, welche Hermite geliefert hat, sind der Lösung dieses Problems gewidmet.

Jacobi, und ihm selbst (s. oben, S. 344), war die Anzahl der Transformationen k^{ter} Ordnung der ultraelliptischen Functionen längst bekannt, nun aber war es ihm möglich, sie arithmetisch vollständiger zu discutiren. Er reducirt, für eine Primzahl k, die Gesammtheit der quaternären Transformationen k^{ter} Ordnung, indem er die vermöge einer einmaligen Transformation erster Ordnung in einander überführbaren als äquivalent betrachtet [„Eisenstein's Aequivalenz nach links"], auf vier Typen, aus welchen sich die Repräsentanten der nicht-äquivalenten Classen unmittelbar ergeben; auch trennt er nach dem Modul 2 die Transformationen erster Ordnung selbst noch von einander. Zu den Typen bildet er die „supplementären", welche, mit jenen zusammengesetzt, zur Multiplication führen. Während sich Hermite selbst früher schon mit den binären Substitutionen und der Zusammensetzung der Determinante vom Werth 1 beschäftigt hatte (Journ. de Math. XIV), schliesst er also jetzt an die arithmetischen Reductionsbegriffe an, welche Eisenstein für die binären (Cr. J. 28) und ternären (Berliner Monatsber. 1852 und Journ. d. Math. XVII) Substitutionen gegeben hatte. Man weiss, dass Kronecker späterhin (Berliner Monatsber. 1866) auch für die Gesammtheit der hier in Betracht kommenden Transformationen von der Determinante 1 den Grundgedanken der Zusammensetzung aus einfacheren durch Aufstellung seiner „elementaren" Transformationen weiter verfolgt hat, die nur aus Vertauschung oder

Addition zweier Variabeln bestehen; wie denn derselbe auch Hermite's Betrachtung auf nicht-symmetrische Zahlsysteme erweitert hat.

Hermite's Transformationstheorie geht von den *Thetafunctionen* aus, und gründet sich, unter Erweiterung der Periodicitätsgleichungen dieser Functionen, auf den Begriff allgemeiner höherer Thetafunctionen, auf welche der Satz von der linearen Zusammensetzung aus einer endlichen Anzahl analoger Functionen — sein Ausgangspunkt in der Theorie der elliptischen Functionen — ausgedehnt wird. Sein Princip ist: dass vermöge einer Transformation $\cdot k^{\text{ter}}$ Ordnung eine Thetafunction $\Theta_\alpha(X, Y)$ mit den neuen Moduln G, G', H, in welcher die neuen Veränderlichen X, Y bestimmte lineare Functionen der alten Veränderlichen x, y sind, nach Multiplication mit einer Exponentialgrösse, deren Exponent eine einfache quadratische Function von x, y ist, zu einer Thetafunction k^{ter} Ordnung der alten Veränderlichen x, y, mit den alten Moduln g, g', h wird; denn sie erfüllt dieselben Periodicitätsrelationen, wie diese. Insbesondere zeigt Hermite, dass man jenes Product für ungerades k schon als ganze Function k^{ter} Dimension von solchen vier gewöhnlichen Thetafunctionen $\vartheta_{\beta_i}(x, y)$, mit den Moduln g, g', h, darstellen kann, deren vier Charakteristiken β_i ein „Göpel'sches" System bilden (von der Summe 0 und zu je zweien „syzygetisch"); ja dass so durch dasselbe Göpel'sche System vier Functionen $\Theta_{\alpha_j}(X, Y)$ dargestellt werden können, welche selbst ein Göpel'sches System bilden. Zwischen solchen vier Functionen herrscht noch die von Göpel angegebene biquadratische Relation; und auch deren Existenz wird von Hermite aus seinem Princip bewiesen (für $k = 2$), wie auch die quadratischen Relationen. Da weiter der vorhin genannte Exponentialfactor von den vier Zahlen, welche nach dem Modul 2 genommen die Charakteristik α der Function $\Theta_\alpha(X, Y)$ unter den 16 gleichberechtigten bestimmen, unabhängig ist, so erhält man auch Quotienten der neuen Thetafunctionen durch Quotienten der alten ausgedrückt, d. h. den Ausdruck von neuen vierfach-periodischen Functionen durch die ursprünglichen, also die vollständige algebraische Lösung des Transformationsproblems.

Die Ausführungen Hermite's erstrecken sich auf die Angabe der Transformation der Moduln und der Charakteristikenzahlen, auf die Convergenz der neuen Thetareihe, auf die Form der Relationen. In Herstellung der Theta- und algebraischen Relationen, und der Modulargleichungen, blieb aber noch ein weites Feld offen, das sogleich von Brioschi (C. R. 1858) und weiterhin, nachdem Weierstrass die für die Nullwerthe der Argumente verschwindenden Thetafunctionen bestimmt hatte, für alle hyperelliptischen Classen zunächst von Königsberger bearbeitet worden ist (Cr. J.).

Als für Hermite's Denkweise bezeichnend sei dabei noch auf zwei Punkte besonders hingewiesen.

Der eine betrifft die Einführung einer gewissen speciellen quaternären quadratischen Form, deren Coefficienten reelle Functionen der reellen und imaginären Theile der Moduln der Thetafunction sind. Sie tritt bei Untersuchung der Convergenz der transformirten Thetafunction auf und hat die Eigenschaften, einmal: durch die speciellen Substitutionen, welche zu einer Transformation k^{ter} Ordnung gehören, in eine Form überzugehen, welche, bis auf einen Factor, aus den neuen vier Veränderlichen und den transformirten Moduln genau so zusammengesetzt ist, wie die ursprüngliche aus den alten Veränderlichen und Moduln; sodann: dass ihre adjuncte Form mit ihr, bis auf einfache Vertauschung je zweier Variabeln unter Zeichenänderung, zusammenfällt. Man hätte hier also eine Theorie specieller quadratischer Formen, unter einer Gruppe specieller Substitutionen, eine Theorie, die sich, wie früher bei den Formen mit conjugirt-imaginären Variabeln, derjenigen der binären Formen anschmiegt und zu einem vereinfachten arithmetischen Reductionsverfahren Veranlassung gäbe. Diese hier nur angedeutete Theorie hat Brioschi (Cr. J. 52) durch Betrachtung windschiefer Determinanten gleich für $2n$ Variable aufgenommen, und nach ihm Laguerre.

In zweiter Linie sei hervorgehoben, dass Hermite aus der Transformation der Charakteristikenzahlen und aus Weierstrass' Indicesbezeichnung für die Abel'schen Functionen (Cr. J. 47) die Elemente eines Calculs für die 16 Charakteristikenzahlen ableitet. So kann er insbesondere die Charakteristiken eines Göpel'schen Quadrupels auf allgemeine und einfache Weise definiren. Dies war der Anfang einer combinatorischen und einer Gruppentheorie der Charakteristiken, und zugleich ein erster Versuch zu einer Zusammenfassung der grossen Formelcomplexe bei den Thetarelationen.

Die in den Noten von 1855 niedergelegten Untersuchungen sind die dauernde Grundlage nicht nur der Transformationstheorie der Abel'schen Functionen aller Arten, sondern auch der Theorie der Thetafunctionen überhaupt geworden; ein ausgedehnter Theil der Theorie der Substitutionsgruppen, die der „Abel'schen Gruppen" (C. Jordan), ist durch sie veranlasst; und die nun folgenden Arbeiten über Lösung der Gleichung 5^{ten} Grades und über die Modulargleichungen der elliptischen Functionen sind auf ihrem Boden erwachsen. Vorher sei noch angeführt, dass Hermite bei der directen Anwendung der Theorie auf die elliptischen Functionen noch ein weiteres Verdienst zukommt. Er hat (C. R. 46 und Journ. de Math. ser. 2, Bd. 3, 1858) die Transformation der vier Thetafunctionen mittelst allgemeinster Transformation erster Ordnung (Theorie der „unendlich-vielen Formen der Thetafunction") vollständig ausgeführt, und zwar in einem einzigen Ausdruck, der explicit ist in den Moduln und in den

Transformationszahlen: ein Problem, bei dem besonders die explicite Bestimmung des betreffenden Zahlenfactors, der eine 8[te] Wurzel der Einheit ist, Schwierigkeiten bot, die aber durch Zurückführung auf Gauss'sche Summen bewältigt wurden.

In den Jahren 1858 und 1859 wandte sich Hermite *algebraischen* Untersuchungen im Transformationsgebiet der *elliptischen Functionen* zu. Es entstand die berühmte Note *„Sur la résolution de l'équation du cinquième degré* (C. R. t. 46, v. 15. März 1858), dann die beiden über die Auflösung der *Gleichung 4[ten] Grades* durch elliptische Functionen (ibid.), und endlich die grosse Arbeit über die *Modulargleichungen* (ibid. t. 48, 49); 1859), Arbeiten, welche auch, pietätvoll dem Andenken Cauchy's gewidmet, vereint in Separatausgabe erschienen sind.

In dem Aufsatz über Brioschi*) wurde über den Inhalt der ersten Note, und über die weitere Geschichte des Gegenstandes so eingehend berichtet, dass an dieser Stelle nur kurz darauf verwiesen zu werden braucht. Auch über die invarianten Gedanken, welche Hermite bei Gelegenheit der Aufstellung von Resolventen der Gleichung 4[ten] und 5[ten] Grades in den genannten Noten von 1858, wie weiterhin in den C. R. t. 61, 62 (1865, 66) entwickelt hat, wurde schon oben (S. 361) berichtet.

Aber die, theoretisch betrachtet, grösste Förderung, welche der Forscher selbst, und in noch höherem Grade die spätere Wissenschaft aus diesen Untersuchungen gezogen hat, liegt weniger in Hermite's algebraischem Ziel der Aufstellung niedriger Resolventen, bei dem sich die Auflösung der Gleichung 5[ten] Grades wie nebenher ergab, als in dem von ihm dabei eingeführten und der Methode zu Grunde gelegten transcendenten Begriffe: der *Modulfunction*. Es sind die transcendenten eindeutigen Functionen des Periodenverhältnisses ω, welche bei der Gesammtgruppe aller ganzzahligen gebrochen-linearen Substitutionen von ω, von der Determinante 1, nur eine endliche Anzahl von Werthen annehmen.

Die Einführung von ω, an Stelle des Jacobi'schen $q = e^{i\pi\omega}$, dient Hermite dazu, um auch eine Grösse, wie $u = \sqrt[4]{\varkappa} = \varphi(\omega)$, die noch von einer 8[ten] Wurzel aus q abhängt, eindeutig zu definiren, und um die Wurzeln $v = \sqrt[4]{\lambda} = \varphi(\omega')$ der Modulargleichungen analytisch eindeutig von einander zu trennen, mit einfacheren Substitutionen zwischen ω' und ω, als dies bei q der Fall ist. Hermite liefert für die sechs mod. 2 verschiedenen Classen von linearen Transformationen die zugehörigen Transformationen von $\varphi(\omega)$ und von $\sqrt[4]{\varkappa'} = \psi(\omega)$, ebenso des Jacobi entnommenen $\chi(\omega) = \sqrt[3]{\varphi(\omega)\cdot\psi(\omega)}$ (C. R. t. 46), und er hat später (C. R. t. 57, 1863) einen Beweis der Um-

*) Diese Annalen Bd. 50, S. 483—486.

formungen von $\varphi(\omega)$ mittelst Transformation 2^{ter} Ordnung der Thetafunction angedeutet. Die Tafeln sind dann von Königsberger („Die Transformation etc.“, Teubner 1868 und Math. Ann. Bd. 3) aus der allgemeinen Hermite'schen Transformationsformel, von Schläfli (Cr. J. 72) aus der Differentialgleichung für die Periodicitätsmoduln abgeleitet worden.

In der Arbeit über die Modulargleichungen findet Hermite, der sich schon 1847 (s. dessen zweiten Brief an Jacobi, Cr. J. 40) mit dem Beweis des Galois'schen Satzes von der Erniedrigung der Modulargleichungen für die Transformationsordnungen $n = 5, 7, 11$ beschäftigt hatte, zunächst dessen Gruppe, bei adjungirter Discriminante, wieder; und er zeigt dabei insbesondere, dass zu dieser Adjunction für eine Primzahl n nur die von $\sqrt{(-1)^{\frac{n-1}{2}} n}$ nöthig ist. Durch Aufstellung specieller Functionen z_i der Wurzeln (wie Kronecker 1858 und Betti 1859) zeigt er dann die Erniedrigung der drei Fälle auf den Grad n, und liefert auch allgemeine Ausdrücke für deren Substitutionssystem (für $n = 7$ noch einfachere in C. R. t. 57). Die Modulargleichungen für die z_i selbst werden nur der Form nach angedeutet, schon etwas ausführlicher in Annali di Mat. II, 1859; aber der Weg ist späterhin, zunächst von Königsberger, weiter verfolgt worden.

Den grundlegenden und wichtigsten Theil des Aufsatzes bildet eben die Untersuchung über die Zusammensetzung der *Discriminante* der Modulargleichung zwischen u und v, eine Untersuchung, die wieder tief in die Arithmetik der binären quadratischen Formen zurückführte. Hermite erkennt, dass die Discriminante D, abgesehen von Potenzen von u und $1 - u^8$, ein vollständiges Quadrat einer ganzen rationalen Function wird; und dass die Gesammtheit der Werthe von u, welche D zu Null machen, übereinstimmt mit der Gesammtheit der entsprechenden Doppelwurzeln v der Modulargleichung. Dieses Grössensystem führt daher zu linear gebrochenen Ueberführungen von ω in sich selbst, also zu dem Verschwinden von binären ganzzahligen quadratischen Formen $\Omega(\omega)$; wie übrigens schon daraus folgt, dass die zu zwei zusammenfallenden Wurzeln v gehörigen linearen Combinationen von ω einander äquivalent werden. Diese Formen $\Omega(\omega)$ sind definite, und zwar gehört zu jeder Transformationszahl n eine endliche Anzahl von Formendeterminanten $-\Delta$, nach arithmetischen, von der Theilung der Zahlen n und Δ in Factoren abhängigen, Gesetzen; jede der nicht-äquivalenten Classen von der Determinante $-\Delta$ zerfällt dann noch, mod, 2, in Typen von Formen von der Art, dass die Gesammtheit der Formen eines Typus die Grösse $u = \sqrt[4]{x}$ nicht mehr ändern. So ergeben sich aus den Repräsentanten $\Omega(\omega)$ der verschiedenen Typen, die den zu n gehörigen Determinanten $-\Delta$ entsprechen, in Zusammenord-

nung nach „Geschlechtern" (Gauss), alle Factoren der Discriminante D. Es werden hierbei Summen von Classenanzahlen quadratischer Formen bei Primzahl n mit dem Grad von D — bei beliebigem ungeradem n, ohne quadratischen Theiler, mit höheren Theilerfunctionen von n — in Verbindung gesetzt.

Hermite stiess in diesen Untersuchungen mit Kronecker zusammen, der, den Spuren Abel's folgend, 1857 von Seiten der complexen Multiplication der elliptischen Functionen her auf dieselben beliebigen definiten quadratischen Formen $\Omega(\omega)$ gekommen war, deren Auflösung eben die speciellen Moduln $\varphi(\omega)$ liefert, für welche eine solche Multiplication stattfindet: Weber's transcendente „Classeninvarianten" für die ganze Classe äquivalenter Formen $\Omega(\omega)$ von der Determinante $-\Delta$. Hermite gelingt es, durch Gegenüberstellung seiner und der Kronecker'schen Methode, neue Verbindungen der Classenzahl-Relationen Kronecker's zu erhalten; aber letzterer strebt einer tieferen Erfassung der speciellen Classeninvarianten als algebraischer Zahlen zu.

Wenn Hermite seinen Begriff der *Modulfunction* aus der allgemeinen Theorie der elliptischen Functionen ableitete, so war er sich doch bewusst, dass hier ein Grundbegriff einer neuen analytischen Function vorliege, der einer von jener Disciplin unabhängigen functionentheoretischen Definition und Durchbildung bedürfe, um unmittelbar die merkwürdigen analytischen und arithmetischen Eigenschaften der Function erkennen zu lassen und um seinerseits wieder auf die Theorie der elliptischen Functionen neugestaltend einwirken zu können. Er hat dies in seinen „Notes sur les fonctions elliptiques" (Anhang zu Lacroix's Calcul) schon 1861 vollständig deutlich ausgesprochen; aber er selbst hat zunächst nur die angeführten gruppentheoretischen Gesichtspunkte in die keimende Theorie hereingezogen. Die Anregung wirkte jedoch um so tiefer.

In der That entstand schon 1865 unter den Händen von St. Smith die gruppentheoretische Grundlage der ganzen späteren Stufeneintheilung der Moduln: die Zugehörigkeit von Moduln wie $\sqrt[4]{\varkappa}$, $\sqrt[8]{\varkappa}$ zu einer Congruenz-Untergruppe der oben genannten Gesammtgruppe Γ von Substitutionen für ω (Reports of the British Association), mit dem Satze, dass *alle* Substitutionen von ω, welche $\varphi(\omega)$ in sich transformiren, der Gruppe Γ angehören; ein Satz, mit welchem ein Jahrzehnt später auch Hermite selbst wieder in die oben entstehende Theorie eingriff (Anmerkung zu Fuchs' Abh. in Cr. J. 83) und der ebenfalls zur Definition der Modulfunctionen aus der Gruppe Γ und ihren Untergruppen drängen musste. Ein weiterer Schritt geschah wiederum durch St. Smith: die geometrische Versinnlichung dieser Gruppen in der Ebene durch die „Modultheilungen", Dreieckstheilungen nach dem Vorbilde der schon von Schwarz für die Function

$\varphi^8(\omega)$ gegebenen (Cr. J. 74, 1872). In seiner Arbeit von 1874 (publ. 1877 in den Acc. dei Lincei) stellt ihm jeder Punkt ω der oberen Halbebene eine quadratische definite Form in x, y: Norm $(x-\omega y)$, vor, die entsprechenden Punkte der Theilung äquivalente Formen; und es genügen einfach anschauliche Verfahren, um die Reductionsbedingungen und für ganzzahlige Formen die Endlichkeit der Classenzahl festzustellen. Damit war auch Dedekind's „Hauptfeld", das spätere „Fundamentalpolygon" gewonnen. Zu gleicher Zeit hat auch Selling (Cr. J. 77, 1874) mit seiner Gebietstheilungs- und Gruppentheorie der indefiniten binären und ternären Formen hier wesentlichen Einfluss geübt. Die entscheidenden neuen Gesichtspunkte in die Theorie brachte einmal im Allgemeinen die Einführung der, in der Theorie der linearen Differentialgleichungen von Fuchs entwickelten Begriffe, insbesondere aber die Anwendung der Riemann'schen Begriffe auf die Definition von Functionen durch die neue Gebietstheilung. Und hierbei hat, angeregt durch Hermite's Bemerkung, Dedekind (Cr. J. 83, 1877) das grosse Verdienst, eine directe und systematische Begründung einer Theorie der Modulfunctionen gegeben zu haben. Dedekind hatte aber noch eine andere Anregung durch Beschäftigung mit dem von ihm gerade vorher (1876) bearbeiteten Fragmente Riemann's (dessen Werke XXV—XXVII); denn dort finden sich schon Grenzfälle der Modulfunctionen, wenn ω an eine reelle rationale Zahl heranrückt, mit Erläuterungen, welche in der That Hermite's Betrachtungen vor 1858 über die lineare Transformation der Thetafunctionen in einem schwierigen Punkte fortführen. Dass Gauss (nach seinem Nachlass, Bd. 8 von Gauss' Werken) gerade bezüglich der Modulfunctionen Jacobi und Abel dauernd vorausgeblieben und heute als der Vorläufer Riemann's anzusehen ist, hat in die Entwicklung nicht eingegriffen. An die von Dedekind explicit eingeführte einfachste Modulfunction, die absolute Invariante J ($=$ val (ω)) der binären biquadratischen Form des elliptischen Integrals, als Hauptmodul der Gesammtgruppe Γ — eine Function, die schon in den Rechnungen Hermite's eine Rolle spielte und die auch Klein aus der Schwarz'schen Arbeit ableitete —, knüpfte dann die von Klein ausgehende allseitige Entwicklung der Theorie an, die unter Anderen auch die einfachsten Formen der Modulargleichungen für $n = 7$ und 11 lieferte.

Dass auch die Modulfunctionen selbst nur das erste Glied einer Reihe von höheren Functionen, der „automorphen Functionen", und damit eines wichtigen, noch in der Entstehung begriffenen Theiles der Nach-Hermite'schen Analysis, werden sollten, beweist die Tragweite der ersten Anregung Hermite's.

Wenn die heutige Weiterentwicklung der Transformationstheorie der elliptischen Functionen und der zahlentheoretischen Anwendungen haupt-

sächlich der Theorie der Modulfunctionen zu verdanken sind, so ist Hermite gleich nach den bis jetzt charakterisirten Arbeiten auf einen andern Weg der Verbindung der elliptischen Functionen mit der Zahlentheorie zurückgekommen, der zwar auch die genannten recurrirenden Classenanzahl-Relationen liefert, aber bei Weitem nicht so ausgiebig ist, wie der erstere Weg. Er schliesst an die Jacobi'sche Methode an (Cr. J. 3 und „Fundamenta"), Zahlen in eine Summe von vier Quadraten zu zerlegen durch Verwandlung der vierten Potenz einer q-Reihe in eine andere q-Reihe. Angeregt durch Liouville, der aus einigen weiteren solchen Reihen analoge Schlüsse gezogen hatte, verallgemeinert Hermite 1861 (C. R. 53, 55; Journ. de Math. VII, 1862) die Methode: indem er elliptische Functionen, wie $\frac{\mathrm{H}^2(u)}{\Theta(u)}$ (seine späteren „doppelt-periodischen Functionen dritter Art"), durch trigonometrische Reihen darstellt, und eine Anzahl solcher mit einander multiplicirt und integrirt, erhält er q-Reihen, die als Exponenten von q einerseits reducirte definite quadratische Formen, andrerseits, bei Ordnen dieser Reihen, die Determinanten (absolut genommen) dieser Formen enthalten, wobei dann als Coefficient je eine Classenzahl der Determinante auftritt. In späterer Zeit (Cr. J. 99, 100 [1885] oder Acta Mathem. Bd. 5, 1884) ist Hermite in Fortsetzung dieser Betrachtungen zu allgemeineren Resultaten gelangt, so zu Relationen zwischen Anzahlen von Zerlegungen in drei oder fünf Quadrate und Theilersummen, und zu asymptotischen Werthen dieser Theilerfunctionen.

Während der Weg Kronecker's auf einer tieferen Beziehung zwischen zwei scheinbar entfernten Gebieten, wie Zahlentheorie und Theorie der elliptischen Functionen, die als Invarianten von quadratischen Formenclassen auftreten, beruht, und gerade dadurch ein unerwartetes Licht auf den Gang der Wissenschaft überhaupt und die Momente geworfen wird, welche sie im Verborgenen fördern*), so ist auch bei Hermite's Ausbildung des Jacobi'schen Weges beachtenswerth, wie methodisch er die Entwicklungen der elliptischen Functionen mit seiner Theorie der reducirten quadratischen Formen in Verbindung setzt und die Classenzahl-Relationen arithmetisch, wenn nicht entstehen, so doch in Evidenz treten lässt.

Schlag auf Schlag waren die grossen Arbeiten der 50er Jahre auf einander gefolgt. In den 60er Jahren nahm nun Hermite Gedankenverbindungen aus der frühesten Zeit auf, erst leise ansetzend, Jahre hindurch sogar scheinbar pausirend, bis er sich 1873 nochmals zu einem Höhepunkt erhob. Es sind die Probleme der *Näherungsausdrücke für Zahlen und Functionen*, die ihn nun beschäftigen.

*) Cf. Hermite's Nachruf auf Kronecker in C. R. von Jan. 1892.

Zunächst treten Fragen der *Interpolation* an den Forscher heran. Schon 1859 (C. R. t. 48) hatte er zur Beantwortung von Tschebyscheff's Frage nach der möglichst genauen Annäherung einer Function an mehr als n Stellen durch ein Polynom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades nach der Methode der kleinsten Quadrate, bei gegebenen durch Werthe einer ganzen Function bestimmten Gewichten, die Lagrange'sche Interpolationsformel verallgemeinert, indem er wieder eine quadratische Form adjungirte. Auch jetzt trat ihm eine Frage Tschebyscheffs entgegen: wie man die von Gauss in der mechanischen Quadratur angestellten Interpolationsuntersuchungen auf Functionen von mehr als einer Variabeln verallgemeinern könne.

Nach Gauss („Methodus nova") wird der Werth eines Integrals $\int_{-1}^{+1} \psi(x)\,dx$ durch ein Integral $\int_{-1}^{+1} \varphi(x)\,dx$, wo $\varphi(x)$ ein zu bestimmendes Polynom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades ist, dadurch am vortheilhaftesten, bis auf Glieder der Dimension $2n-1$ incl., berechnet, dass man die Uebereinstimmung an solchen n Stellen x_i bewirkt, welche eine Gleichung $N_n(x) = 0$ erfüllen, deren linke Seite den n Bedingungen

$$\int_{-1}^{+1} x^{\nu} N_n(x)\,dx = 0 \qquad (\nu = 0, 1, \cdots, n-1)$$

genügt. Es ist dann $\dfrac{Z_n(x)}{N_n(x)}$ der n^{te} Näherungsbruch der Kettenbruchentwicklung für $\sigma = \log \dfrac{x+1}{x-1}$, in welcher die Theilnenner vom 1^{ten} Grade in x sind; und die Abweichung $R_n = N_n \sigma - Z_n$, nach fallenden Potenzen von x geordnet, beginnt mit der Potenz x^{-n-1}. Nach den Integralrelationen, oder nach den mit der Kettenbruchentwicklung verbundenen recurrirenden Relationen, stimmen die Näherungsnenner $N_n(x)$ mit den Laplace-Legendre'schen Polynomen (Kugelfunctionen) $P^{(n)}(x)$ überein; wie Jacobi (Cr. J. 2) und nach ihm Heine in seinem eben erschienenen „Handbuche der Kugelfunctionen", das Hermite lebhaft anregte, gezeigt hatten.

Hermite's Versuch einer Verallgemeinerung auf Functionen von mehreren Variabeln knüpft nur an die Entstehung der Kugelfunctionen $P^{(n)}(x)$ als Coefficienten einer Reihenentwicklung an. Die neuen Polynome werden durch Entwicklungen von Functionen der Art $e^{-\varphi(x+h,\,y+k)}$ nach Potenzen von h, k erhalten, wo $\varphi(x, y)$ eine definite positive quadratische Form bedeutet (C. R. t. 58); sodann (C. R. t. 60) von solchen der Art $(1 - 2ax - 2by + a^2 + b^2)^{-\frac{1}{2}}$ nach Potenzen von a, b. Die Eigenschaften dieser Polynome sind denen von $P^{(n)}(x)$ so analog, dass Entwicklungen von Functionen mehrerer Variabeln nach denselben ebenfalls einfach und der Discussion zugänglich werden. Indessen deutet Hermite

keine Interpolationsanwendungen an; und auch die anschliessende Litteratur (Appell etc.) hat nur die Erweiterung noch allgemeinerer hypergeometrischer Reihen im Auge.

Uebrigens ist Hermite späterhin (Cr. J. 84; 1877) nochmals auf die Interpolation für Functionen von einer Veränderlichen zurückgekommen. Er erweiterte Lagrange's Formel dahin, dass die gesuchte ganze Function $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades von x nicht an n Stellen einfach, sondern an weniger Stellen, aber zugleich mit einer Reihe von Differentialquotienten, mit den Werthen der gegebenen Function und ihren Ableitungen übereinstimmt. Insbesondere werden sehr einfache Formeln für genäherte Quadratur bei höherer Osculation an zwei Stellen aufgestellt.

Die Jahre von 1866 bis gegen 1873 hin bezeichnen eine Zeit stiller Sammlung. Aber die wenigen publicirten Seiten in diesem Zeitraum deuten doch auf Hermite's Beschäftigung hin: Reihenentwicklungen elliptischer und anderer Integrale, mit Bestimmung der Coefficienten als Näherungs-Zähler und -Nenner von Kettenbrüchen; Processe unbestimmter Integrationen, dann Grenzwerthe und Unstetigkeiten von bestimmten Integralen. Das eine steht in Zusammenhang mit den damals vorbereiteten Cours an der École Polytechnique, das andere zeigt Hermite's Bemühungen an, sich auch die Errungenschaften der deutschen functionentheoretischen Richtungen anzueignen. Es war eine Vorbereitungszeit für die ganze weitere analytische Thätigkeit.

Die im Juni 1873 von Hermite aufgenommenen Näherungsbetrachtungen beschränken sich nun auf Functionen von einer Veränderlichen und knüpfen gerade an die bei der oben angeführten Verallgemeinerung des Polynoms $P^{(n)}(x)$ vernachlässigte Seite, an dessen Entstehung als Näherungsnenner einer Kettenbruchentwicklung. Wie nach seinen frühsten Untersuchungen ein Ausdruck $a\alpha + b\beta + \gamma$, bei gegebenen a, b, durch eine zweifach unendliche Reihe von ganzen Zahlen α, β, γ successive Minima erhalten konnte, die eine beliebige Annäherung an Null gestatteten, so sollen jetzt (Cr. J. 76) zweifach unendlich viele Annäherungen an Null eines Ausdrucks $X \sin x + Y \cos x + Z$ mittelst Polynome X, Y, Z in x, bis auf eine mit dem Grad dieser Polynome verträgliche, möglichst hohe Potenz in x, bestimmt werden. Für $Z = 0$ war die Aufgabe längst behandelt: sie führt auf Nenner und Zähler der Näherungsbrüche des Lambert'schen Kettenbruchs für $\operatorname{tg} x$; und die Restreihe A_n für $X \sin x + Y \cos x$ wird eine Bessel'sche Function. Hermite leitet das Resultat nochmals einfach her, durch partielle Integration von

$$A_n = \frac{x^{2n+1}}{n!\,2^n} \int_0^1 (1-t^2)^n \cos xt \cdot dt;$$

das allgemeine Problem aber wird durch successive Integration der Gleichung dieses speciellen Problems erledigt.

Die für Hermite's weiteren Gedankengang wichtigsten Momente sind hier: einmal, dass er den Restausdruck bei der Annäherung an Null von Ausdrücken wie $X \sin x + Y \cos x + Z$ durch einen einfachen Integralausdruck wiedergiebt, dessen Grössendimension sich leicht erforschen lässt; sodann, dass er aus zwei successiven Annäherungen rationale Näherungsbrüche für $\sin x$ und $\cos x$ selbst herleitet. Letzteres, oder auch die partielle Integration von Ausdrücken der Art

$$\int_0^1 t^p (1-t^2)^n e^{-xt}\, dt,$$

gibt ihm zugleich eine Reihe von Näherungsbrüchen für die Exponentialfunction e^x. Auch drückt er die grösstmögliche Annäherung einer linearen Function $\sum_{i=1}^{n} e^{a_i x} X_i$ durch Polynome X_i von x mittelst eines bestimmten n-fachen Integrals aus.

Diese Resultate konnten Hermite ermuthigen, dem grossen Ziele einer Untersuchung des Charakters von Zahlen, wie e und π, näher zu treten. Lambert hatte schon 1761 mittelst seiner Kettenbrüche die Irrationalität von π, π^2 und e^m (m rational) gezeigt; und über dessen Resultate war eigentlich nur Liouville hinausgekommen, als er 1840 (Journ. d. Math. V) an Reihen gezeigt hatte, dass e und e^2 keiner algebraischen Gleichung 2ten Grades genügen und 1844 (C. R. t. 18) an der Hand der Kettenbruchentwicklungen von Wurzeln ganzzahliger algebraischer Gleichungen die Existenz von nicht-algebraischen Zahlen erwiesen hatte. Auf das Lambert'sche Resultat für e^m kam auch Hermite später (Cours an der Fac. des Sc., 9te Vorlesung) nochmals auf einfache Weise, durch Differentiation der e^x-Reihe. Die bisherigen Resultate machten den Transcendenten Charakter der Zahlen e und π immer wahrscheinlicher; und in der That ergab nun Hermite's oben angedeutete Annäherung von $X \sin x + Y \cos y$, für $x = \frac{\pi}{2}$, ohne Weiteres wenigstens die Irrationalität von π^2, aus dem bekannten Widerspruch, dass sonst eine ganze von Null verschiedene Zahl beliebig klein gemacht werden könnte. Aber die Erledigung der allgemeinen Frage, ob π eine transcendente Zahl sei, widerstand dem Versuch eines directen Angriffes (Cr. J. t. 76, Brief an Borchardt vom 31. Aug. 1873).

Und zur selben Zeit gelingt es Hermite, seine Analyse so weit durchzubilden, dass er für die Zahl e bis zur völligen Lösung der Frage vordringen kann („Sur la fonction exponentielle", C. R. t. 77, Juli und August 1873).

Das leitende Princip ist die Frage nach den *gleichzeitigen* Annäherungen, bis zu höchstmöglichen Potenzen von x, einer Reihe von Exponentialfunctionen $e^{a_i x}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ durch rationale Brüche $\frac{\Phi_i(x)}{\Phi(x)}$, mit demselben Nenner und bei gegebenen Graden der Polynome Φ, Φ_i. Zwar liessen sich solche Brüche aus der Betrachtung einer Reihe von Annäherungen an Null der oben erwähnten linearen Function der Grössen $e^{a_i x}$ ermitteln; aber zur Discussion der Näherung greift Hermite die Aufgabe direct an, und hierbei ist wieder ein wesentliches Mittel die Darstellung der Näherungen durch Potenzen der Variabeln x mit bestimmten Integralen, deren asymptotische Werthe beliebig klein werden, und die sich überdies auch unbestimmt auswerthen lassen.

Dies sind Ausdrücke der Art

$$e^{a_i x}\int_{a_0}^{a_i} e^{-xt}F(t)\,dt,$$

wo $F(t)$ ein Product von Factoren $(t - a_\varkappa)^{\mu_i}$ $[\varkappa = 0, 1, \cdots, n]$ ist. Die Φ, Φ_i selbst entstehen dann aus dem Polynom $\mathfrak{F}(t)$, das bei der unbestimmten Integration des Integrals erscheint, dadurch dass man $t = a_0, a_1, \cdots, a_n$ setzt. Eine ganzzahlige Gleichung für e

$$\mathsf{N} + \sum_{i=1}^{n} e^{a_i}\,\mathsf{N}_i = 0,$$

wo auch die a_i ganze Zahlen sind, würde dann, durch Einsetzen einer Anzahl genügend hoher Näherungssysteme für die e^{a_i}, nur zu einer Reihe von Relationen der Art

$$\mathsf{N}P^{(\varkappa)} + \sum_{i=1}^{n} \mathsf{N}_i P_i^{(\varkappa)} = 0$$

führen können, wo auch die $P^{(\varkappa)}$, $P_i^{(\varkappa)}$ ganze Zahlen sind, und aus $n+1$ solchen Gleichungen müsste immer die Determinante aus den $P^{(\varkappa)}$, $P_i^{(\varkappa)}$ verschwinden. Die Untersuchung ist also darauf zurückgeführt, die Unmöglichkeit dieses Verschwindens zu zeigen, wozu eben die besonderen Ausdrücke der Näherungen auf verschiedene Weisen, besonders auch durch recurrirende Beziehungen, benutzt werden.

Hermite's Untersuchung hat auch allen späteren Arbeiten über den Gegenstand die Anregung gegeben. Die 1885 von Weierstrass gelieferte Vereinfachung des Beweises der Transcendenz von e beruht wesentlich nur darauf, dass statt des Products $F(t)$ die Polynomausdrücke betrachtet werden, wobei sich die Integrale in übersichtlicherer Gestalt auswerthen lassen; während die weiteren, von Hilbert, Hurwitz, Gordan ausgegangenen

Modificationen das Product als solches bestehen lassen, aber die Betrachtung der Determinante durch eine Congruenzbetrachtung ersetzen und dabei noch, wie der Letztere mittelst Benutzung der e-Reihe, die Integrale vermeiden. Wie einfach 1882 Lindemann den Uebergang von e auf e^{ξ}, wo ξ algebraisch ist, und von da auf π geleistet, ist in Aller Erinnerung.

Das Interesse des Forschers an den Annäherungen war nicht durch seine grosse Anwendung von 1873 erschöpft; er wandte sich sogleich anderen damit in Verbindung stehenden Gedankenverbindungen zu: der Erweiterung der Eigenschaft der Kugelfunction $P^{(n)}(x)$, einer linearen Differentialgleichung 2^{ter} Ordnung zu genügen (Cr. J. 79; 1874). So hängen die gleichzeitigen Näherungen von n Functionen durch rationale Brüche mit linearen homogenen Differentialgleichungen $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung zusammen. Dies wird insbesondere für die Näherungen $\frac{\Phi_i(x)}{\Phi(x)}$ der n Functionen $\log\frac{x-a_0}{x-a_i}$ $(i=1,2,\cdots,n)$, diesmal bei Ordnen nach absteigenden Potenzen von x, durchgeführt, wobei die Differentialgleichung $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung nicht nur durch $\Phi(x)$, sondern auch durch die $\int\limits_{a_0}^{a_i}\frac{\Phi(t)}{x-t}\,dt$, befriedigt wird; und die Annäherung an Null der linearen Function

$$x-\sum_{i=1}^{n}X_i\log\frac{x-a_i}{x-a_0}$$

durch Polynome X hängt mit der adjungirten Differentialgleichung zusammen.

Hermite geht dem Zusammenhang mit der Fuchs'schen Theorie, der hier zu Tage tritt und ihm wohlbekannt war, nicht näher nach. Dagegen ist er auch späterhin wiederholt auf die mehr arithmetische Seite der Annäherungen zurückgekommen. So 1879 (Cr. J. 88) auf gewisse annähernde Lösungen der Gleichung $x-ay-b=0$, die er auf zwei successive Näherungen an a zurückführte, mit engerer Begrenzung für das Minimum von $x-ay-b$, als bei Tschebyscheff, eine Begrenzung, die von Hurwitz (diese Ann. Bd. 54) im allgemeinen Falle noch etwas weiter verengt wurde. So noch 1893 (Annali di Mat. t. 21) auf die Annäherung an Null einer linearen Function $\sum\limits_{i=1}^{n}S_i X_i$ von Potenzreihen $S_i(x)$ durch Polynome $X_i(x)$, bei der die Function als Residuensumme eines Integrals erhalten und auf die recurrirende Berechnung der Polynomsysteme besonderer Werth gelegt wird, also auf Algorithmen, welche die Auflösung von Systemen linearer Gleichungen umgehen sollen. Durch

diese ganze Arbeitsthätigkeit Hermite's geht die Idee von der Bedeutung, welche die Annäherungstheorien in der Darstellung der Functionen einst für die Functionentheorie gewinnen könnten; und darin wurzelt auch seine hohe Verehrung für Tschebyscheff, als Anreger und Förderer der Richtung. Er hat auch selbst in seinen Schülern noch eine reiche Ernte aus diesen Betrachtungen aufgehen sehen. Hier sei nur darauf hingewiesen, dass Laguerre — hier, wie in anderen Gebieten ein Fortsetzer von Hermite, welcher auch der Herausgabe der Sammlung der Abhandlungen jenes sich mit unterzog — die Annäherungen mit Jacobi's (Cr. J. 53) Entwicklungen einer Function nach ganzen Potenzen eines Polynoms, in denen dieselben Integrale auftreten wie bei Hermite, in Verbindung gesetzt hat, so die Annäherung an Null von $\sum_{i=1}^{n} e^{a_i x} X_i$ mit der Entwicklung von e^{tx} nach Potenzen des oben genannten Polynoms $F(t)$ (s. Cr. J. 88).

Aus der Beschäftigung mit der linearen Differentialgleichung für die Kugelfunction $P^{(n)}(x)$ entwickelte Hermite, sogleich nach seinen Forschungen in den Approximationstheorien, noch einen anderen fruchtbaren Gesichtspunkt, von dem aus er zugleich zu einer Erweiterung der Theorie der elliptischen Functionen gelangte. Ihn zog die *Lamé'sche lineare Differentialgleichung* 2^{ter} *Ordnung* an, auf welche Lamé schon gegen 1840 durch physikalische Probleme, unter Einführung seiner elliptischen Coordinaten in die Potentialtheorie, gekommen war. Es ist eine Gleichung der Art

$$\frac{d^2 z}{du^2} = [n(n+1)\varkappa^2 \sin^2 \mathrm{am}\, u + h]\, z,$$

wobei n eine ganze positive Zahl ist und h gewisse specielle, vom Modul $\varkappa$ abhängige Werthe besitzt. Was Hermite interessiren musste, war einmal die Thatsache, dass sie für $x = \varkappa \sin \mathrm{am}\, u$ und $\lim \varkappa = 1$ in die Gleichung für die Kugelfunction $P^{(n)}(x)$ ausartet; sodann, dass, für beliebigen Modul $\varkappa$, neben einer ersten Lösung $E^{(n)}(x)$, die ein Polynom in x ist, eine zweite Lösung $F^{(n)}(x)$ existirt, die, wie Liouville und Heine schon 1845 gezeigt hatten, in ihrem transcendenten Theile nur elliptische Integrale 1^{ter} und 2^{ter} Gattung, mit $E^{(n)}(x)$ multiplicirt, enthält — analog wie für $\lim \varkappa = 1$ eine Lösung $Q^{(n)}(x)$ den Ausdruck $P^{(n)}(x) \cdot \log \frac{x+1}{x-1}$ enthält; ja dass nach Heine, mit dem Hermite um diese Zeit in engerer Verbindung stand, auch eine Beziehung zwischen $E^{(n)}(x)$, bezw. $F^{(n)}(x)$, und dem Nenner, bezw. dem Reste, des Näherungsbruches der Kettenbruchentwicklung eines ganzen elliptischen Integrales 3^{ter} Gattung besteht (Cr. J. 60).

Hermite's Untersuchungen beziehen sich auf die *verallgemeinerte Lamé-sche Gleichung*, in der h eine *beliebige* Constante ist; und sein Hauptresultat besteht darin, dass hier, von jenen speciellen Werthen von h abgesehen, immer zwei eindeutige, durch elliptische Functionen als „periodische Functionen zweiter Art" ausdrückbare Lösungeu der Differentialgleichung existiren.

Als Ausgangspunkt, von dem aus Hermite zu diesem Resultate gelangt, erscheint ein doppelter. In einem Brief an Brioschi (Annali di Mat., ser. 2, t. 9, vom 17. Dec. 1877) theilt er einen Weg zur vollständigen Integration der Gleichung mit, welcher direct auf die beiden genannten Lösungen führt und welchen er schon in dem II$^{\text{ten}}$ Theil seiner Cours an der École Polytechnique von 1872 (lithographirt 1873 verbreitet) gegeben hatte. Indem er die lineare Differentialgleichung 3$^{\text{ter}}$ Ordnung für das Product zweier Lösungen aufstellt*), erkennt er durch n-malige Differentiation dieser Gleichung, dass sie durch ein Polynom n^{ten} Grades befriedigt wird, was in bekannter Weise die vollständige Lösung der gegebenen Gleichung liefert. Dieser Weg steht also schon in nächster Beziehung zu dem von Fuchs 1875 in seiner Untersuchung über die linearen Differentialgleichungen mit algebraischen Integralen eingeschlagenen (Cr. J. t. 81).

Die hier erscheinenden Lösungen, $F(u)$ und $F(-u)$ — elliptische Thetaquotienten, multiplicirt mit einer Exponentialfunction, deren Exponent proportional u ist — sind dieselben Functionen, welche bei der Jacobi'schen Lösung des Problems der Rotation eines festen Körpers um einen Punkt, ohne äussere Kräfte, auftreten: von der constanten Winkelgeschwindigkeit um die zur invariablen Ebene senkrechte Axe herrührend, muss hier in die beweglichen Winkelgrössen ein der Zeit proportionales Glied eingehen. Dieser mechanische Umstand bildete den andern Ausgangspunkt Hermite's und führte ihn für den aus zwei der Winkelgrössen a, a' in bekannter Weise zusammengesetzten Ausdruck $a + ia'$ zu einer verallgemeinerten Lamé'schen Gleichung.

In welcher Ordnung die beiderseitigen Anregungen in Hermite's Geist durch einander wirkten, mag hier unentschieden bleiben. Neben dem Rotationsproblem war es bald auch das des sphärischen Pendels, welches ihn in ähnlichem Sinne wiederum zur Beschäftigung mit den elliptischen Functionen reizte (Cr. J. 85, 1877), wie auch der Umstand, dass Gylden in seinen astronomischen Bahnnäherungen auf die Lamé'sche Gleichung gekommen war. Während die mechanischen Fragen ihn zu Untersuchungen über Entwicklungen in Potenzreihen von Producten von elliptischen Func-

*) Cf. Liouville im Journ. de Math. t. 4, 1839.

tionen und über die asymptotischen Werthe der Coefficienten in diesen Reihen führten (Cr. J. 81 etc.), wandte er auch sein Theorem über Zerlegung in Elemente für doppelt-periodische Functionen erster Art auf geometrische Fragen über Curven 3ter Ordnung an (Cr. J. 82, 84); und auch die functionentheoretischen Gesichtspunkte Cauchy's in Differentialgleichungen und Residuentheorie beschäftigten ihn um diese Zeit vielfach. In der Darstellung dieser erneuten weiten Thätigkeit in dem Felde der elliptischen Functionen („Sur quelques applications des fonctions elliptiques", C. R. Bde. 85—93, Oct. 1877—1881; gesammelt erschienen 1885 in einem ersten, dem Andenken Borchardt's gewidmeten Hefte, während ein zweites Heft nicht erschienen ist) geht Hermite von einer Theorie der doppelt-periodischen Functionen 2ter Art aus, d. h. von eindeutigen Functionen der Veränderlichen u, die im Periodenparallelogramm nur eine endliche Anzahl von Polen haben und die sich bei Vermehrung von u um die beiden Perioden je nur um einen constanten Factor ändern. Sie wächst zu einer vollständigen Theorie dieser Functionengattung aus. Es wird die Zerlegung auch dieser Functionen in *Elemente* gelehrt, nämlich in Ausdrücke der Art

$$\frac{d^{\alpha-1}}{du^{\alpha-1}}\left[\frac{\mathrm{H}(u+\omega-a)}{\mathrm{H}(u-a)}\,e^{\nu(u-a)}\right],$$

die im Parallelogramm nur je einen Pol α^{ter} Ordnung $u=a$ haben; für die einfachsten Functionen dieser Art werden lineare Differentialgleichungen durch das Zerlegungsprincip und Residuenrechnung hergeleitet — eben die erweiterten Lamé'schen Gleichungen für $n = 1, 2$, während die Lösungen der speciellen Gleichungen durch Grenzübergang in h erhalten werden. Eine symmetrische Behandlung des Rotationsproblems wird durch die gleichzeitige Betrachtung von vier einfachsten Functionen 2ter Art, mit demselben Nenner und um halbe Perioden verschiedenen Argumenten der Zähler, geliefert. Die Bewegung des sphärischen Pendels wird auf eine unipolare Lösung einer verallgemeinerten Lamé'schen Gleichung zurückgeführt, während in dem Problem der Gleichgewichtsfigur einer elastischen Feder, bei beliebigen äusseren Kräften, nur Reihenentwicklungen geliefert werden. Den Abschluss der Untersuchungen bildet eine Ausdehnung der Theorie auf beliebige positive Zahlen $n > 2$, wobei ein Fundamentalsystem von zwei doppelt-periodischen Functionen 2ter Art mit einem Pol höherer Ordnung existirt. Dem Uebergang auf den Fall $\lim \varkappa = 1$ hat Hermite noch ein besonderes Studium gewidmet (Cr. J. 89, 1879).

Wenn sich diese Untersuchungen auch den allgemeinen Betrachtungen der neueren Theorie der Differentialgleichungen unterordnen, so zeichnet sie doch ein besonderes Merkmal aus: dass die Entwicklungen, auch wenn die Ausführung auf complicirte Gleichungssysteme führt, durch

algebraische und analytische Hülfsmittel überall vollständig und explicit erledigt werden. Die allgemeineren Fragen aber nach solchen linearen Differentialgleichungen, welche eine eindeutige doppelt-periodische Function 2[ter] Art als Lösung haben, und die analytischen Modificationen der Lösungen in speciellen Fällen, sind von Picard und Mittag-Leffler aus Hermite's Arbeit aufgenommen und aus dem Cauchy'schen Gebiet heraus auf den neueren Fuchs'schen Standpunkt, der von Hermite nur gelegentlich zur Rechnung betreten wird, erhoben worden. Immerhin sind die Untersuchungen Hermite's als ein Vorläufer von Poincaré's Integration aller linearen Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten durch eindeutige Functionen anzusehen.

So schliessen sich diese Anwendungen mit denen der Näherungsbetrachtungen und denen der Modulfunctionen zu dem reichen Kranze von Untersuchungen zusammen, mit denen Hermite die Beziehungen der Theorie zu einer Reihe von speciellen Gebieten, so dem der elliptischen Functionen, auf wirksame Weise gefördert hat.

Um dieselbe Zeit beginnt Hermite auch einzelnen *functionentheoretischen Fragen* näher zu treten. Es sind in erster Linie *die bestimmten Integrale* überhaupt, im Besonderen die *Euler'schen Integrale*, die *Bernoulli-schen Polynome* und *Zahlen*, dann *die Unstetigkeiten von analytischen Ausdrücken längs Linien*, Betrachtungen, denen Hermite die letzten 25 Jahre seiner Lebensarbeit hauptsächlich widmete, in seinem Cours und in zahlreichen kürzeren Publicationen.

Hier ist zunächst ein zahlentheoretisches Resultat zu erwähnen: eine Recursionsformel für die ganzzahligen Bestandtheile der in der Staudt-schen Form geschriebenen Bernoulli'schen Zahlen (Cr. J. 84), eine später (ibid. 96) von Lipschitz fortgeführte Untersuchung. Die Theorie der Bernoulli'schen Polynome wird nach allen Richtungen seit 1874 (Cr. J. 79) erörtert, besonders aus dem Raabe'schen Integralausdruck heraus mit Integration durch das imaginäre Gebiet, oder durch Umformung der erzeugenden Function; es wird der Verlauf der Polynome im reellen Gebiet gefunden, und eine neue Restbestimmung bei Entwicklung einer Function nach solchen Polynomen vorgenommen (ibid. t. 84 etc.).

Von einem bedeutenden Teil der Untersuchungen dieser Periode, denen in der Theorie der Gammafunctionen bei complexem Argument, findet sich eine zusammenfassende Darstellung in den an der Sorbonne gehaltenen „Cours". Hervorzuheben ist: eine genaue Bestimmung der Restglieder der semiconvergenten Reihen durch bestimmte Integrale; das Studium des Ganges von $\Gamma(x)$ für negative x und des asymptotischen Werthes von $\log \Gamma(x)$ für grosse x; vielfach neue Umformungen bekannter

Integralausdrücke und Verallgemeinerung der bekannten semiconvergenten Reihen. Hermite verwendet neben der Residuentheorie auch die Weierstrass'schen und Mittag-Leffler'schen Theoreme, wie er denn zu dieser Zeit sich in die in der Wissenschaft neu auftretenden Gedanken noch frisch und rasch hineinfindet, um sich von ihnen zu eigenen kürzeren, aber in sich abgeschlossenen, Betrachtungen, zu feinen Anwendungen auf Convergenz-, Restbestimmungen und Aehnliches, inspiriren zu lassen.

Insbesondere sucht Hermite, sich noch in Weierstrass' Begriffsbildungen über *eindeutige analytische Functionen*, und dessen Darstellungen von solchen Functionen bei gegebenen Unstetigkeitsstellen verschiedener Arten einzuleben. Sein Ziel ist, diese Auffassung, mit Hülfe von Riemann's geometrischen Mitteln, seinem auf Cauchy ruhenden Standpunkt einzuordnen.

Die Unstetigkeiten bestimmter Integrale mit reellem Integrationsweg, als Functionen eines complexen Parameters betrachtet, hatten Hermite seit lange interessirt. Nun sucht er denselben, und damit den Unstetigkeiten längs Linien überhaupt, in seinen seit 1881/82 gehaltenen „Cours" zu didaktischen Zwecken näher zu treten. So definirt er $\log(1+z)$ durch das auf reellem Wege genommene Integral $\int\limits_0^1 \frac{z\,dt}{1+zt}$, in der ganzen Z-Ebene, bis auf die reellen Werthe von $z=-1$ bis $z=-\infty$, die das Integral unendlich machen und die durch einen geradlinigen Schnitt von -1 bis $-\infty$ („Coupure") ausgeschlossen werden. Auf diese Weise erhält er also wohl eindeutig *einen* Zweig der unendlich vieldeutigen Function $\log(1+z)$, und somit das, was Riemann mit seinen Querschnitten bei mehrdeutigen Functionen bezweckt; aber da die Frage der analytischen Fortsetzbarkeit der Function über den Schnitt hinweg in dieser elementaren Betrachtung nicht untersucht wird, so tritt gerade dieser Riemannsche Sinn noch nicht hervor, sondern nur die Bedeutung des Schnittes als einer Grenze für den definirenden *Ausdruck*. Man erkennt dies auch daran, dass für den Cauchy'schen Integralausdruck $F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(t)\,dt}{t-z}$, genommen über eine einfach geschlossene Curve C, der im Inneren und Aeusseren der Curve zwei ganz verschiedene analytische Functionen darstellt, C als „Coupure" bezeichnet wird; und wenn Hermite hier öfters von der „Function $F(z)$" spricht, so meint er eben nur den Integralausdruck.

Gelegentlich wird jedoch, so bei der Gammafunction $\Gamma(x)$, ein nur für Werthe des Parameters mit positivem reellem Theile gültiger Integralausdruck durch Zerlegung und Reihenentwicklung mit Prym explicit über die imaginäre Axe hinweg eindeutig analytisch fortgesetzt; und auch die

geradlinige Führung der Schnitte wird späterhin zu ihrer ganzen möglichen Mannigfaltigkeit erweitert. Immerhin treten noch Widersprüche auf, so bei dem Versuch einer Ausdehnung der Bestimmung von $\sin\operatorname{am}\frac{2K}{\pi}\xi$, mittelst der trigonometrischen Reihe, auf die ganze ω-Ebene (Cr. J. 92).

Hervorzuheben ist aber die reiche Fülle, in welcher Hermite seine Sprungtheorien anzuwenden weiss, um aus ganz anderen Theilen der Analysis bekannte Beziehungen wiederzufinden. Was sonst durch Residuentheorie geleistet wird, entwickelt er durch Ermittlung der Sprünge an den durch $G(t, z) = 0$ bestimmten Schnitten für den Integralausdruck $\int_\alpha^\beta \frac{F(t, z)}{G(t, z)}\,dt$, wo F, G holomorphe Functionen von t, z sind; bekannte Relationen zwischen Γ-Functionen werden aus den Unstetigkeiten der Integrale für $\log\Gamma(z)$ hergeleitet; und die Zerlegungssätze der doppeltperiodischen Functionen, das Verhalten der vollständigen elliptischen Integrale als Functionen des algebraischen Moduls, oder Jacobi'sche Modularrelationen werden ohne Integration durch das imaginäre Gebiet erhalten.

Für den Mittag-Leffler'schen Satz giebt Hermite (in Cr. J. 91 und in den „Cours") eine Modification des Weierstrass'schen Beweises, aber unter beschränkenden Voraussetzungen; in Cr. J. 92 für die Zusatzglieder in den Reihen dieses Satzes, die mannigfach abänderbar sind, bequeme Formen.

Man erkennt, dass auch in dem allgemeinen Gebiet der analytischen Functionen immer specielle Darstellungsweisen solcher Functionen, welche sich allseitig im Einzelbilde discutiren liessen, das Medium waren, in dem sich Hermite bewegte. Noch ganz am Ende seines Lebens (Briefe an Pincherle, Annali di Mat., ser. 3, t. 5) sehen wir ihn mit der Verallgemeinerung der Riemann'schen ζ-Function, ihrer Ausdehnung auf die ganze Ebene, und mit interpolatorischen Darstellungen dieser und anderer Functionen beschäftigt; die Arbeit an den elliptischen Functionen, an neuen Additionsformeln, Reihen- und Partialbruchentwicklungen und Moduleigenschaften, hat ihn mitten in allen übrigen Betrachtungen unablässig bis zu Ende begleitet. Seine letzte Note, „Sur une équation transcendante", vom 17. Dec. 1900 (Archiv der Math. u. Phys., 3te Reihe, 1ter Band) behandelt ein bei Kugelfunctionen und anderen Functionen öfters von ihm berührtes Gebiet: die Bestimmung der reellen Wurzeln transcendenter Gleichungen.

Nachdem wir hier über den Inhalt des „Cours, professé à la Faculté des Sciences", der seit 1882 wiederholt lithographirt erschienen ist, berichtet, erübrigt noch eine eingehendere Charakterisirung dieser und der anderen zusammenfassenden Schriften, als es bereits in der Einleitung geschehen ist. Diese Vorlesungen, sowie die elementareren an der École Poly-

technique, von denen ein Band, „Cours d'Analyse", 1873 durch den Druck veröffentlicht ist, stellen nicht in der Art der Lehrbücher ein systematisches Ganzes vor, das Vollständigkeit oder eine umfassende Einführung in die gewöhnlichen Methoden bezweckte. Hermite wählt einzelne Capitel aus und durchtränkt sie, so elementar sie scheinen mögen, mit den hohen Methoden, an denen er schöpferisch gewirkt, und mit dem Geiste der vielseitigen Fülle in Beispielen und analytischen Umformungen und der allseitigen Ausblicke, der ihn belebt. So tritt der Gesammtplan gegenüber den ingeniösen Einzelheiten zunächst zurück. Aber die Einheit dieses Ganges liegt eben darin, dass die leitenden Gedanken schon in die Anfänge der Infinitesimalbetrachtungen eingeführt werden, um die Mannigfaltigkeit der gewöhnlichen Methoden in höherem Sinne zusammenzufassen. So wird im „Cours d'Analyse" die Zerlegung von einfach-periodischen Functionen in Elemente ganz in dem Sinne seiner früheren höheren Arbeiten vorgetragen, und es wird der *rationalen* Reduction von Integralen aller Arten auf einfachere, mittelst Kettenbruch-Verfahren, viel Aufmerksamkeit gewidmet. Gerade in der Betrachtung eines grossen Kreises specieller Probleme von einem modernen Standpunkt aus liegt der Einfluss begründet, welchen die höheren, stetig weiter bearbeiteten Vorlesungen auf die Cultur der Mathematik ausgeübt haben.

Zu den Vorlesungen treten, von didaktischen Schriften, noch die „Notes sur la théorie des fonctions elliptiques"; zuerst 1861 in Lacroix's Traité, 6[te] Auflage, veröffentlicht, dann immer wieder abgedruckt. Sie liefern einen zwar knappen, aber übersichtlichen Ueberblick über die Theorie, von Hermite's ursprünglichem Standpunkt der doppelten Periodicität aus bis zu neueren Auffassungen hin. Es wäre zu wünschen, dass diese Schrift, welche schon in der Uebertragung durch Natani seit 1863 Jahre hindurch Anregung gegeben hat, in ihrer jetzigen Gestalt, in welcher sie noch einige einleitende Theile der Transformationstheorie mit mannigfachen Ausblicken in sich aufgenommen hat, durch eine neue Uebertragung auch in Deutschland wiederum zur Wirkung gebracht würde.

Rückblickend sehen wir ein wissenschaftliches Lebenswerk vor unseren Augen liegen, so reich und vielseitig, wie es nur Wenige vollbracht haben. Durch alle Gebiete der Analysis bewegt es sich hindurch, immer weitere Kreise werden gezogen, immer neue Anschauungen und Methoden werden gestaltet, und überall entstehen Leistungen, welche bleibende Errungenschaften der Analysis, theilweise grundlegend für ganze Zweige, geworden sind. So drängt sich denn die Frage auf, ob sich in dieser vielgestaltigen Gedankenthätigkeit ein *Mittelpunkt* auffinden lässt, von dem sie ausstrahlt und der sie beherrscht.

In der einleitenden Uebersicht wurden der Gang der Arbeitsreihen des Forschers und deren Zwischenstellungen hinsichtlich der gewohnten Eintheilungen in Gebiete gezeichnet. Was am meisten auffällt, ist, dass die algebraische Seite die ganze Hauptarbeitsepoche, die bis in den Anfang der 60^{er} Jahre reicht, durchdringt und leitet, auch bei arithmetischer oder functionentheoretischer Richtung. Sicher ist Hermite's vorherrschender Zug sein *algebraischer Sinn.* Aber derselbe nimmt nie eine einseitig formalistische Gestaltung an, wie man sie bei Cayley, Sylvester, Brioschi öfters beobachten kann. Symbolische Processe hat er, obwohl er ihre Kraft kannte, nie als solche verfolgt, seine algebraischen Methoden waren ihm nie Selbstzweck, sondern nur Mittel, in dunkle Gebiete vorzudringen. Immer steht ein grosses Problem als Richtstern vor ihm, es regt ihm neue Fragestellungen an, und von hier aus erst werden algebraische Methoden neu geschaffen oder umgeschaffen, die dann weit über ihren speciellen Zweck zu wirken berufen sind. Interessiren ihn auch alle Fragen der Zahlentheorie und der Analysis, so trägt er doch überall seine algebraischen Gedanken hinein: in die Arithmetik seine definiten Formen und continuirlichen Parameter, in die elliptischen Functionen neue Gleichungsfragen und seine Transformationskunst; erst in der *Invariantentheorie* der Formen und Gleichungen selbst aber offenbart er die volle Mächtigkeit seiner geistigen Kraft.

Wenn man den Functionentheoretiker daran erkennt, dass im Mittelpunkt seines Gedankenkreises die Grundbegriffe der analytischen Abhängigkeit stehen, dass er auf die Grundlagen der Analysis zurückgreift und sie vertieft oder festigt, so war Hermite kein solcher. Sein Feld war nicht die principielle Grundlegung von allgemeinen Begriffen, und am wenigsten von solchen, die von der analytischen Ausdrucksweise absehen: er arbeitete mit bekannten Functionsausdrücken. Hier freilich hat er Erfolge zu verzeichnen, die um so bedeutender erscheinen müssen, als sie *vor* der deutschen functionentheoretischen Entwicklung errungen sind; es sei nur an die Zerlegung der doppelt-periodischen Functionen und der höheren Thetafunctionen in Elemente, oder an die Grundlegung der Transformationstheorie der Abel'schen Functionen erinnert.

Ja auch die systematische Ausgestaltung einer umfassenden Theorie lag nicht in seiner Art: so hat sich Hermite in der letztgenannten Theorie auf die Aufstellung der principiellen Punkte beschränkt, die aber, wie früher gesagt, den Ausgangspunkt aller Entwicklungen in diesem Gebiete bilden. In der Aufstellung solcher principieller Gesichtspunkte und in der Herleitung jeweils entsprechender Methoden war Hermite Meister. Und zwar sind es durchaus *Transformationsprincipien,* in welchen man das tiefste Wesen der Hermite'schen Analyse zusammenfassen kann, und

deren Herrschaft die innere Einheit seines ganzen Schaffens bildet. Nur muss man die Schaffung und Handhabung algorithmischer Methoden, des eigentlichen Werkzeugs Hermite's, diesem Begriffe unterordnen.

Nicht als ob Hermite, wie Lie, diese Principien selbst zum Gegenstand seines Forschens gemacht hätte; oder als ob er, wie eine Reihe von Algebraikern und Geometern, von vornherein von einigen bestimmten Transformationsgruppen ausgegangen wäre: eine solche Systematik lag ihm ganz fern. Aber seine algebraisch-arithmetische Reductionstheorie ist ein Transformationsproblem; seine Formen- und Gleichungstheorien führen zu der Invariantentheorie der linearen Transformationen; die Gruppe der linear-gebrochenen Substitutionen und die Transformationstheorie bilden Ausgangspunkt und Gegenstand seiner Forschungen in den elliptischen und Abel'schen Functionen; seine Annäherungsmethoden sind explicite specielle Darstellungen von Functionen; und seine Integration der erweiterten Lamé'schen Gleichung beruht ebenfalls ausschliesslich auf expliciten Umformungen. Seine analytische Kunst der Umformungen zeigt sich dabei würdig der seines Meisters Jacobi; und die immer neuen Methoden, und die daraus gezogene unbegrenzte Menge von Einzelresultaten — darunter einige, wie die Lösung der Gleichung 5^ten Grades und der Beweis der Transcendenz von e, von leuchtender Bedeutung —, scheinen wie von selbst dieser Kunst zu entspringen. Aber gerade bei dieser Fülle von Einzelbildern ist es nur zu leicht zu übersehen, dass Hermite immer von grossen methodischen Gesichtspunkten geleitet war und dass bei der Weiterentwicklung der Wissenschaft gerade diese vorzugsweise ihren stillen, aber befruchtenden Einfluss gezeitigt haben.

Mittenwald, September 1901.

Theorie der Systeme Pfaff'scher Gleichungen.

Von

Eduard von Weber in München.

§ 1.

Die Fragestellung.

1. Das *„Pfaff'sche Problem"* in seiner ursprünglichen Fassung ist die Aufgabe, erstens die Bedingungen dafür anzugeben, dass eine vorgelegte Pfaff'sche Gleichung:

$$dx_n = a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + \cdots + a_{n-1} dx_{n-1}$$

sich auf eine reducirte Form

$$df_\tau = F_1 df_1 + \cdots + F_{\tau-1} df_{\tau-1}$$

mit einer gegebenen Zahl τ von Termen bringen lasse, sodann die allgemeinste derartige reducirte Form wirklich herzustellen. Die Verallgemeinerung dieses Problems für *Systeme* Pfaff'scher Gleichungen lautet dann folgendermassen:

Welches sind die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass ein gegebenes $n - m$-gliedriges Pfaff'sches System in n Variabeln:

$$(\mathfrak{A}) \qquad dx_{m+h} = \sum_1^m a_{ih}(x_1 \cdots x_n)\, dx_i \qquad (h = 1, \cdots n - m)$$

sich auf eine reducirte Form mit τ Differentialelementen

$$(\mathfrak{B}) \qquad df_{\sigma+h} = F_{1h} df_1 + \cdots + F_{\sigma h} df_\sigma$$
$$(h = 1, 2, \cdots n - m;\ \tau = n - m + \sigma)$$

bringen lasse, worin τ eine beliebig vorgegebene Zahl der Reihe

$$n - m + 1,\ n - m + 2, \cdots n - 2\text{*})$$

*) Die Annahme $\tau = n - m$ führt auf die Bedingung der unbeschränkten Integrabilität, die Annahme $\tau = n - 1$ auf eine stets mögliche triviale Aufgabe; denn

bedeutet, und die Functionen $f_1, \cdots f_\tau$ von einander unabhängig sind? Weiterhin erhebt sich die Frage nach der allgemeinsten reducirten Form dieser Art, m. a. W. nach dem Charakter des partiellen Differentialproblems, von dem in jedem einzelnen Fall die Herstellung der reducirten Form ($\mathfrak{B}$) abhängt.

2. Während die Theorie des Pfaff'schen Problems heutzutage als abgeschlossen gelten kann*), lag seine Verallgemeinerung bis vor kurzem völlig im Dunkeln; die Litteratur blieb auf die Betrachtung naheliegender, aber ganz oberflächlicher Analogien zum Pfaff'schen Problem beschränkt**).

Unsere Aufgabe lässt sich als Specialfall der allgemeinen Theorie der Differentialsysteme auffassen, wie sich auch umgekehrt die letztere, von einem andern Standpunkt aus betrachtet, der ersteren als Specialfall einordnet***). Das neue Hilfsmittel jedoch, das wir bei unseren Untersuchungen verwenden und mit der Theorie der Differentialsysteme in mannigfache Beziehung setzen werden, ist *die Theorie der Liniencomplexe und -Congruenzen im m — 1-dimensionalen Raum*, also der Schaaren von alternirenden Bilinearformen mit m Variabelnpaaren. Schon hiernach lässt sich vermuthen, dass die Zahl m, d. h. der Ueberschuss der Variabelnzahl in dem Pfaff'schen System ($\mathfrak{A}$) über die Anzahl der Gleichungen, in gewissem Sinn als ein Mass für die Schwierigkeit unserer Aufgabe angesehen werden kann; wir wollen daher diese Zahl als die *„Stufe"* des Pfaff'schen Systems ($\mathfrak{A}$) bezeichnen.

In drei früheren Abhandlungen†) habe ich die erwähnten Methoden ihren Hauptzügen nach skizzirt, und die Lösung unseres Problems für die

---

man braucht, um eine Darstellung mit $n-1$ Termen zu finden, nur eine Schaar von ∞^{n-1} „Integralcurven" des Systems ($\mathfrak{A}$) zu ermitteln, derart dass durch jeden Punkt des Raums $R_n(x_1 \cdots x_n)$ eine solche Curve hindurchgeht.

*) Vgl. mein Buch: *„Vorlesungen über das Pfaff'sche Problem und die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung"*, Leipzig 1900.

**) Herr C. Russjan („Sistema urawnenij Pfaff'a", Schriften der k. neurussischen Universität Odessa 1899) glaubt die Lösung des allgemeinen Problems gefunden zu haben; doch sind seine Resultate unrichtig, und die eigentlichen Schwierigkeiten der Theorie werden darin gar nicht berührt; vgl. hierüber meine Note, Münch. Ber. XXX, p. 299 (1900) und die ausführlichere Darlegung: „Remarques sur un Mémoire de M. Roussiane", Schriften der k. neuruss. Univ. Odessa 1901.

***) Vgl. meinen Artikel in der „Encyclopädie der math. Wissenschaften" II A, 5 Nr. 8, p. 307.

†) I. *„Ueber die Reducirbarkeit eines Pfaff'schen Systems auf eine gegebene Zahl von Termen"*, Sitzungsberichte der kgl. bayer. Akademie der Wiss. Bd. XXX, pag. 273 (1900).

II. *„Liniencomplexe im R_4 und Systeme Pfaff'scher Gleichungen"*, ebenda pag. 393.

III. *„Liniengeometrie und Pfaff'sche Systeme"*, Berichte der kgl. sächs. Gesellschaft der Wiss. zu Leipzig 1900, p. 179.

Diese Arbeiten werden im Folgenden mit „I", „II" und „III" citirt.

kleinsten in Betracht kommenden Stufenzahlen $m = 3, 4, 5$, sowie für zwei besonders wichtige Kategorien sechster Stufe theils explicite angegeben, theils auf Pfaff'sche Systeme kleinerer Stufenzahl zurückzuführen gelehrt.

Der Zweck der vorliegenden Arbeit ist erstens, diese ganze Untersuchungsrichtung im Zusammenhang darzustellen und weiterzubilden, sodann die Lösung unserer Aufgabe für $m = 6$ ausführlich darzulegen. Das besondere Interesse, das gerade diese Stufenzahl in Anspruch nehmen darf, rührt daher, dass bei ihr zum ersten mal alle wesentlichen Begriffsbildungen und Sätze der allgemeinen Theorie zur Geltung kommen.

§ 2.

Die Congruenzmannigfaltigkeiten.

3. Die Forderung, dass sich das Pfaff'sche System $\mathfrak{A}$ in der Form $\mathfrak{B}$ darstellen lasse, ist mit der andern äquivalent, dass die τ Pfaff'schen Gleichungen

$$(1)\qquad \begin{cases} dx_{m+h} = \sum_1^m {}^i\, a_{ih}\, dx_i, & (h = 1, \cdots n - m); \\ df_1 = 0, \cdots df_\sigma = 0 & (\sigma = \tau - n + m) \end{cases}$$

ein unbeschränkt integrables System bilden. Gebraucht man die Abkürzungen:

$$\mathsf{A}_i f \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^{n-m} {}^h\, a_{ih}\, \frac{\partial f}{\partial x_{m+h}};$$

$$\alpha_{ikh} \equiv \mathsf{A}_i a_{kh} - \mathsf{A}_k a_{ih} \equiv -\alpha_{kih};$$

$$\Lambda_{ik} \equiv \sum_1^{n-m} {}^h\, \lambda_h \alpha_{ikh},$$

so sind nach Frobenius (J. f. Math. 82, p. 267) die Gleichungen (1) dann und nur dann unbeschränkt integrabel, wenn die $2\sigma + 2$-reihigen Hauptunterdeterminanten des alternirenden Schemas:

$$(2)\qquad \left\| \begin{matrix} 0, & \Lambda_{12} & \cdots & \Lambda_{1m}, & \mathsf{A}_1 f_1 & \cdots & \mathsf{A}_1 f_\sigma \\ . & . & . & . & . & . & . \\ \Lambda_{m1}, & \Lambda_{m2} & \cdots & 0, & \mathsf{A}_m f_1 & \cdots & \mathsf{A}_m f_\sigma \\ \mathsf{A}_1 f_1, & \mathsf{A}_2 f_1 & \cdots & \mathsf{A}_m f_1, & 0 & \cdots & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ \mathsf{A}_1 f_\sigma, & \mathsf{A}_2 f_\sigma & \cdots & \mathsf{A}_m f_\sigma, & 0 & \cdots & 0 \end{matrix} \right\|$$

für jedes beliebige Werthsystem

(3) $$x_1, \cdots x_n, \quad \lambda_1, \cdots \lambda_{n-m}$$

Null sind, oder etwas anders ausgedrückt, wenn die $n - m$ Bilinearformen

(4) $$\sum_1^m \sum_1^m \alpha_{ikh} \xi_i \eta_k \qquad (h = 1, \cdots n - m)$$

vermöge der σ Relationenpaare:

(5) $$\xi_1 \mathsf{A}_1 f_s + \cdots + \xi_m \mathsf{A}_m f_s = 0 \qquad (s = 1, \cdots \sigma);$$

(6) $$\eta_1 \mathsf{A}_1 f_s + \cdots + \eta_m \mathsf{A}_m f_s = 0 \qquad (s = 1, \cdots \sigma)$$

alle identisch verschwinden. Bei der Formulirung dieser Bedingungen kann man statt $f_1, \cdots f_\sigma$ irgend σ der Functionen $f_1, \cdots f_\tau$ verwenden.

Als eine erste *nothwendige* Bedingung für die Möglichkeit einer Darstellung $\mathfrak{B}$ ergiebt sich sonach die folgende: der Rang $2r$ der alternirenden Matrix

(7) $$\| \mathsf{A}_{ik} \| \qquad (i, k = 1, 2, \cdots m),$$

d. h. die Ordnung der höchsten, nicht für jedes Werthsystem (3) verschwindenden Hauptminoren dieses Schemas darf höchstens gleich 2σ sein. Die Zahl $2r$ nennen wir den „*Rang*" des Pfaff'schen Systems $\mathfrak{A}$.

Die Anzahl der linear unabhängigen unter den Bilinearformen (4), also den Rang der $n - m$-zeiligen Matrix

(8) $$\left\| \begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{12h}, & \alpha_{13h}, & \cdots & \alpha_{m-1,m,h} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix} \right\|$$

bezeichnen wir mit K, und nennen sie den „*Charakter*" des Systems $\mathfrak{A}$*). Dann können wir, um die Ideen zu fixiren, annehmen, dass die Bilinearformen

(9) $$\sum \sum \alpha_{ik1} \xi_i \eta_k, \cdots \sum \sum \alpha_{ik\mathsf{K}} \xi_i \eta_k$$

linear unabhängig sind.

Die Zahlen $2r$ und K sind natürlich *Invarianten* des Systems $\mathfrak{A}$ gegenüber allen Punkttransformationen des $R_n(x_1, \cdots x_n)$.

4. Wir verstehen unter $\xi_1, \cdots \xi_m$ und ebenso unter $\eta_1, \cdots \eta_m$ homogene Punktcoordinaten des $m - 1$-dimensionalen Raums R_{m-1}; mit μ_k bezeichnen wir eine k-dimensionale lineare Mannigfaltigkeit dieses Raums, d. h. den Inbegriff aller Punkte, die ein System von $m - k - 1$ unabhängigen

---

*) Diese Bezeichnung ist verschieden von derjenigen, die ich in einer früheren Arbeit (Leipz. Ber. 1898, p. 208) gebraucht habe.

linearen homogenen Gleichungen in den ξ_i erfüllen. Eine μ_k ist darnach durch $k+1$ linear unabhängige auf ihr gelegene Punkte eindeutig bestimmt. Für eine μ_1 gebrauchen wir das Wort „Gerade", für eine μ_{m-2} das Wort „Ebene".

Betrachten wir für den Augenblick die α_{ikh} als Constante, so definirt jede der K bilinearen Gleichungen:

$$(\mathfrak{C}) \qquad \sum_1^m{}^i \sum_1^m{}^k \alpha_{ikh} \xi_i \eta_k = 0 \qquad (h = 1, \cdots \mathsf{K})$$

einen „linearen Complex"; eine Gerade der Eigenschaft, dass zwei auf ihr gelegene Punkte ξ, η — und infolgedessen *irgend* zwei ihrer Punkte — eine dieser bilinearen Gleichungen erfüllen, heisst eine „Gerade des zugehörigen Complexes"; die gemeinsamen Geraden der K Complexe nennen wir „die K-gliedrige Congruenz $\mathfrak{C}$".

Wir sagen ferner: Eine μ_l, die durch die Gleichungen

$$(10) \qquad \mu_{1s}\xi_1 + \cdots + \mu_{ms}\xi_m = 0 \quad (s = 1, \cdots m - l - 1)$$

definirt sei, „genügt" einem linearen Complex, oder ist eine „Complex-μ_l", wenn jede auf ihr gelegene Gerade dem Complex angehört. Genügt die μ_l allen Complexen $\mathfrak{C}$, so nennen wir sie eine *„l-dimensionale Congruenzmannigfaltigkeit"* oder kurz eine *„Congruenz-μ_l"* von $\mathfrak{C}$. Eine solche μ_l ist durch jede der beiden folgenden Eigenschaften charakterisirt: 1) Irgend $l+1$ auf ihr gelegene linear unabhängige Punkte

$$\xi_1^{(s)}, \cdots \xi_m^{(s)} \qquad (s = 1, 2, \cdots l+1)$$

erfüllen die Relationen

$$\sum\sum \alpha_{ikh} \xi_i^{(s)} \xi_k^{(t)} = 0 \qquad (s, t = 1, \cdots l+1)$$

2) Vermöge des Gleichungssystems (10) und der dazu congruenten Relationen sind alle Bilinearformen (9) identisch Null.

5. Setzen wir

$$m - \sigma = n - \tau = \nu,$$

so müssen, falls das System $\mathfrak{A}$ eine Darstellung $\mathfrak{B}$ gestatten soll, nach Nr. 3 die Relationen (5) *eine $\nu - 1$-dimensionale Mannigfaltigkeit der Congruenz* $\mathfrak{C}$ definiren; und umgekehrt, repräsentiren die Gleichungen

$$(\Sigma) \qquad \mu_{1k}\xi_1 + \cdots + \mu_{mk}\xi_m = 0 \qquad (k = 1, 2, \cdots \sigma)$$

eine Congruenz-$\mu_{\nu-1}$ von $\mathfrak{C}$, und befriedigen die μ_{ik} noch die weitere Bedingung, dass die Pfaff'schen Gleichungen:

$$(11) \qquad dx_{m+h} = \sum{}^i a_{ih} dx_i; \quad \sum{}^i \mu_{ik} dx_i = 0$$
$$(h = 1, \cdots n - m;\ k = 1, 2, \cdots \sigma)$$

ein τ-gliedriges unbeschränkt integrables System bilden, so geben die Integrale $f_1, \cdots f_\tau$ des letzteren zu einer Darstellung $\mathfrak{B}$ Anlass.

Existiren für die Congruenz $\mathfrak{C}$ überhaupt $\nu - 1$-dimensionale Congruenzmannigfaltigkeiten, so werden die letzteren durch ein oder mehrere σ-gliedrige Relationensysteme der Form (Σ) dargestellt, worin die μ_{ik} ausser von den α_{ikh} noch von einer endlichen Zahl wesentlicher Parameter $\varrho_1, \cdots \varrho_\omega$ abhängen. Giebt es mehrere Schaaren von Congruenz-$\mu_{\nu-1}$, also mehrere Relationensysteme der Form (Σ), so bezeichnen wir diese mit $\Sigma, \Sigma', \Sigma'', \cdots$ und die zugehörigen Parameterzahlen mit $\omega, \omega', \omega'', \cdots$, ferner das Pfaff'sche System (11) mit S, und die analogen mittels der Gleichungensysteme $\Sigma', \Sigma'', \cdots$ gebildeten Pfaff'schen Systeme mit S', S'' etc.

Die Systeme $S, S', \cdots$ nennen wir auch die *„erweiterten Systeme*) von $\mathfrak{A}$“*; dieser Definition, die wie man sieht von der gewählten Zahl τ abhängt, liegt die Auffassung zu Grunde, dass die x *und die* ϱ unabhängige Variable bedeuten, so dass den Systemen $S, S', \cdots$ bezw. die Stufenzahlen:

$$n + \omega - \tau,\ n + \omega' - \tau, \cdots$$

zukommen.

Damit für das vorgelegte Pfaff'sche System $\mathfrak{A}$ eine Darstellung $\mathfrak{B}$ existire, ist nothwendig und hinreichend, dass sich wenigstens in einem der Systeme $S^{(i)}$, etwa in S, die Parameter $\varrho_1, \cdots \varrho_\omega$ derart als Functionen der x bestimmen lassen, dass das System S unbeschränkt integrabel wird, und die allgemeinste reducirte Form $\mathfrak{B}$ wird erhalten, wenn man für jedes der Systeme $S^{(i)}$ das allgemeinste Functionensystem ϱ_k ermittelt, welches die genannte Bedingung erfüllt.

6. In zwei Fällen ist die Lösung des soeben formulirten Problems unmittelbar gegeben. Ist für eines der Systeme $S^{(i)}$, etwa für S, die Parameterzahl $\omega = 0$, enthält S also nur die Variabeln $x_1, \cdots x_n$, so hat man für S die Bedingungen der unbeschränkten Integrabilität aufzustellen, und findet, falls die letzteren erfüllt sind, auf diesem Wege eine und wesentlich nur eine**) Darstellung $\mathfrak{B}$ des gegebenen Pfaff'schen Systems $\mathfrak{A}$. Ist $\omega = 1$, so führen die genannten Integrabilitätsbedingungen auf ein System partieller Differentialgleichungen erster Ordnung mit der *einen* unbekannten Function ϱ_1 und den Independenten $x_1, \cdots x_n$, und es ist eine wohlbekannte Aufgabe, ein solches Differentialsystem auf seine

*) An diese Definition knüpft sich eine wichtige Verallgemeinerung des Begriffs „Flächenelement“; vgl. „III“ pag. 186 u. f.

**) Zwei reducirte Formen mit den Differentialelementen df_i bezw. df_i' gelten als nicht wesentlich verschieden, wenn sich die f_i als Functionen der f_i' und umgekehrt die letzteren als Functionen der ersteren ausdrücken lassen.

Integrabilität hin zu untersuchen, bezw. die allgemeinste ihm genügende Function ϱ_1 zu ermitteln*).

Noch zwei andere wichtige Fälle, in denen wenigstens eine Reduction unseres Problems auf Pfaff'sche Systeme kleinerer Stufenzahl möglich ist, wollen wir hier vorwegnehmen.

7. Der erste dieser Fälle ist dadurch charakterisirt, dass alle $\nu-1$-dimensionalen Congruenzmannigfaltigkeiten, die durch die Relationen Σ definirt werden, auf einer *linearen* Mannigfaltigkeit M der Dimension l liegen, die durch die *von den* ϱ_i *freien* Gleichungen:

$$\mathsf{M}_1^{(k)}\xi_1+\cdots+\mathsf{M}_m^{(k)}\xi_m=0 \quad (k=1,2,\cdots m-l-1)$$

dargestellt werde, dass sich also aus den Gleichungen Σ durch Elimination der ϱ_i die Beziehungen $\mathsf{M}_{dx}^{(k)}=0$ ergeben. Bedeuten dann die $f_1,\cdots f_\tau$ die Differentialelemente einer reducirten Form $\mathfrak{B}$, die nach der Methode der Nr. 5 mittels des Relationensystems Σ erhalten wurde, so sind die df_i auch die Differentialelemente einer τ-gliedrigen reducirten Form des Pfaff'schen Systems

$$\begin{cases} dx_{m+h}=\sum_1^m{}_i\, a_{ih}dx_i & (h=1,\cdots n-m), \\ \mathsf{M}_1^{(k)}dx_1+\cdots+\mathsf{M}_m^{(k)}dx_m=0 & (k=1,\cdots m-l-1), \end{cases}$$

und umgekehrt. Damit ist unser Problem auf die Reduction eines Pfaff'schen Systems der Stufe $l+1$ zurückgeführt.

8. Genügt das Functionensystem $\xi_1,\cdots\xi_m$ allen $m\cdot\mathsf{K}$ linearen Gleichungen:

$$\sum_1^m{}_k\,\alpha_{ikh}\xi_k=0 \qquad (i=1,\cdots m;\ h=1,\cdots\mathsf{K}), \tag{12}$$

so nennen wir $\xi_1,\cdots\xi_m$ einen „singulären Punkt" der Congruenz $\mathfrak{C}$. Besitzen die Gleichungen (12) genau s und nicht mehr linear unabhängige Lösungensysteme:

$$\xi_1^{(i)},\ \xi_2^{(i)},\ \cdots\xi_m^{(i)} \qquad (i=1,\cdots s),$$

so nennen wir die durch diese s Punkte definirte μ_{s-1} die „singuläre Mannigfaltigkeit" der Congruenz $\mathfrak{C}$; in analogem Sinne sprechen wir von einem singulären Punkt bezw. der singulären Mannigfaltigkeit eines einzelnen Complexes.

Das Pfaff'sche System $\mathfrak{A}$ „gestattet" die s unabhängigen infinitesimalen Transformationen**)

*) Einen solchen Fall habe ich in „I" pag. 292 ff. studirt.

**) Vgl. meine Arbeit: „Zur Invariantentheorie der Systeme Pfaff'scher Gleichungen", Leipz. Ber. 1898, p. 207.

$$X^{(i)}f \equiv \sum_1^m {}^k \zeta_k^{(i)} \mathsf{A}_k f,$$

und die Gleichungen

(13) $$X^{(1)}f = 0, \cdots X^{(s)}f = 0$$

bilden ein s-gliedriges *vollständiges* System*). Sind

$$y_{s+1}, y_{s+2}, \cdots y_n$$

irgend $n - s$ unabhängige Lösungen desselben, und führt man die y nebst s beliebigen anderen Functionen als neue Veränderliche in $\mathfrak{A}$ ein, so erhält dies System die Gestalt

($\mathfrak{A}'$) $$dy_{m+h} = \sum_{s+1}^m {}^i b_{ih}(y_{s+1}, \cdots y_n)\, dy_i \qquad (h = 1, \cdots n - m),$$

hängt also nur mehr von den $n - s$ Variabeln y ab. Wählt man für die y insbesondere die Hauptintegrale des vollständigen Systems (13) hinsichtlich $x_1 = x_1^0, \cdots x_s = x_s^0$, so hat man, wie leicht zu sehen, identisch:

(14) $$b_{ih}(y_{s+1}, \cdots y_n) \equiv a_{ih}(x_1^0, \cdots x_s^0, y_{s+1}, \cdots y_n)$$
$$(i = s + 1, \cdots m;\ h = 1, \cdots n - m).$$

Wir nehmen nun an, dass alle $\nu - 1$-dimensionalen Congruenzmannigfaltigkeiten der durch Σ definirten Schaar die singuläre Mannigfaltigkeit der Congruenz $\mathfrak{C}$ enthalten; sind dann $df_1, \cdots df_\tau$ die Differentialelemente einer mittels Σ gewonnenen reducirten Form $\mathfrak{B}$, so gelten nach dem eben gesagten und nach Nr. 3 die Beziehungen

$$\sum_1^m {}^k \mathsf{A}_k f_l \cdot \zeta_k^{(i)} = 0 \qquad (i = 1, \cdots s;\ l = 1, \cdots \tau),$$

d. h. die f_i sind Functionen der $y_{s+1}, \cdots y_n$ und die df_i sind sonach auch die Differentialelemente einer τ-gliedrigen reducirten Form des Pfaff'schen Systems $\mathfrak{A}'$, wenn darin nur die y als Variable betrachtet werden. Man gewinnt sonach die allgemeinste reducirte Form $\mathfrak{B}$, die mit Hilfe des Gleichungensystems Σ erhalten werden kann, indem man das Pfaff'sche System $\mathfrak{A}'$ der Stufe $m - s$ in allgemeinster Weise auf eine τ-gliedrige Form bringt. Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Möglichkeit einer solchen Darstellung erhält man zunächst in Form von Relationen zwischen den b_{ih} und ihren Ableitungen, die sich aber wegen (14) sofort in Beziehungen zwischen den a_{ih} und ihren Ableitungen umsetzen lassen.

Analoges gilt, wenn die Congruenzmannigfaltigkeiten der Schaar Σ zwar nicht die ganze singuläre μ_{s-1}, aber doch einen singulären Punkt

*) a. a. O. p. 209 u. f.

$\xi_1, \cdots \xi_m$ der Congruenz $\mathfrak{C}$ gemein haben. Dann lässt sich nämlich das Pfaff'sche System $\mathfrak{A}$, wenn man die Lösungen $y_2, \cdots y_n$ der partiellen Differentialgleichung

$$\xi_1 \mathsf{A}_1 f + \cdots + \xi_m \mathsf{A}_m f = 0$$

als neue Variable einführt, auf eine Form $\mathfrak{A}'$ bringen, die nur mehr von den Variabeln y abhängt, und man zeigt ebenso wie vorhin, dass die allgemeinste mittels Σ erhältliche Darstellung $\mathfrak{B}$ auch dadurch gewonnen werden kann, dass man für das System $\mathfrak{A}'$, das die Stufe $m-1$ besitzt, die allgemeinste reducirte Form mit τ Differentialelementen aufstellt.

Die Sätze dieser und der vorigen Nr. gehören zu den wichtigsten Hilfsmitteln, die uns bei der Reduction Pfaff'scher Systeme zur Verfügung stehen.

§ 3.

Die Pfaff'schen Systeme vom Range zwei.

9. Nächst den unbeschränkt integrabeln Systemen sind die beiden einfachsten Typen Pfaff'scher Systeme einmal die vom Charakter $\mathsf{K} = 1$, sodann die vom Range $2r = 2$. Die ersteren habe ich in der in Nr. 8 citirten Arbeit ausführlich behandelt; in diesem Paragraphen wollen wir die Reductionstheorie der Systeme vom Range zwei entwickeln.

Wenn der „Rang" des linearen Complexes

$$\sum_1^m \sum_1^m \alpha_{ik1} \xi_i \eta_k = 0, \tag{1}$$

d. h. also der Rang der Matrix $\|\alpha_{ik1}\|$ gleich zwei ist, so besitzen die linearen Gleichungen:

$$\sum^k \alpha_{ik1} \xi_k = 0 \qquad (i = 1, \cdots m)$$

genau $m-2$ lineare Lösungensysteme, die zusammen die „singuläre μ_{m-3}" des Complexes (1) definiren; dieser besteht dann aus allen Geraden des R_{m-1}, die mit der μ_{m-3} wenigstens *einen* Punkt gemein haben, und ist durch Angabe dieser μ_{m-3} eindeutig bestimmt.

Besitzt auch die Matrix

$$\| \lambda_1 \alpha_{ik1} + \lambda_2 \alpha_{ik2} \| \qquad (i, k = 1, \cdots m)$$

den Rang zwei, so haben die $2m$ linearen Gleichungen:

$$\sum^k \alpha_{ik1} \xi_k = 0, \quad \sum^k \alpha_{ik2} \xi_k = 0 \qquad (i = 1, \cdots m),$$

wie die Theorie der Elementartheiler*) lehrt, genau $m-3$ Lösungen

*) S meine Arbeit „Ueber Schaaren von Bilinearformen", Münch. Ber. XXVIII, p. 374, Gleichung (11), (1898).

gemein, d. h. die vorgelegte zweigliedrige Congruenz besitzt eine singuläre μ_{m-4}, die wir π nennen. Sind m_1 und m_2 die singulären μ_{m-3} der beiden Complexe α_{ik1} bezw. α_{ik2}, so schneiden sie sich nach der Mannigfaltigkeit π und liegen daher in derselben Ebene, die wir mit M bezeichnen.

Besitzen nun auch alle Complexe der Schaar:

$$\sum\sum(\lambda_1\alpha_{ik1}+\lambda_2\alpha_{ik2}+\lambda_3\alpha_{ik3})\xi_i\eta_k=0 \tag{2}$$

den Rang zwei, und ist m_3 die singuläre Mannigfaltigkeit des Complexes α_{ik3}, so muss m_3 jede der Mannigfaltigkeiten m_1 und m_2 nach je einer μ_{m-4} schneiden, sie enthält also entweder π oder ist auf M gelegen.

10. Im ersten Fall und nur in diesem besitzt die dreigliedrige Congruenz (2) eine $m-4$-fach ausgedehnte singuläre Mannigfaltigkeit π, und es giebt auch keine mehr als dreigliedrige Congruenz dieser Art, da durch eine μ_{m-4} nur drei linear unabhängige μ_{m-3} gehen. Soll also eine K-gliedrige Congruenz ($\mathsf{K}\geqq 4$) den Rang zwei besitzen, so müssen die singulären μ_{m-3} aller Complexe dieser Congruenz in einer Ebene M liegen; offenbar ist $\mathsf{K}\leqq m-1$.

Die Pfaff'schen Systeme vom Range zwei zerfallen demnach in drei Kategorien:

a) $\mathsf{K}=3$; die Congruenz $\mathfrak{C}$ besitzt eine singuläre $m-4$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit π*).

b) $m-1\geqq\mathsf{K}\geqq 3$; die singulären Mannigfaltigkeiten μ_{m-3} der ∞^{K-1} Complexe von $\mathfrak{C}$ liegen in derselben Ebene M:

$$p_1\xi_1+\cdots+p_m\xi_m=0. \tag{3}$$

c) $\mathsf{K}=2$; die ∞^1 singulären μ_{m-3} enthalten dieselbe $m-4$-dimensionale Mannigfaltigkeit π und liegen in derselben Ebene M, die auch hier durch (3) definirt sei.

Die p_i sind leicht zu bildende rationale Ausdrücke in den α_{ikh}.

11. Im Falle a) besteht die Congruenz $\mathfrak{C}$ aus allen Geraden, die π treffen; es giebt keine Congruenz-μ_{m-2}; die Congruenz-μ_{m-3} sind identisch mit den zweifach unendlich vielen durch π gehenden μ_{m-3}. Jede $\mu_k(k<m-3)$ die mit π wenigstens eine μ_{k-1} gemein hat, ist eine Congruenz-μ_k, und umgehehrt. Daraus folgt:

Eine reducirte Form mit $n-m+1$ Termen ist im Falle a) unmöglich. Man erhält die allgemeinste Darstellung mit $n-m+2$ Termen, indem man das Pfaff'sche System $\mathfrak{A}$ nach Nr. 8 auf eine Form $\mathfrak{A}'$ mit nur $n-m+3$ Variabeln, d. h. also auf ein System dritter Stufe reducirt, und dann für $\mathfrak{A}'$ die allgemeinste Form mit $n-m+2$ Termen ermittelt.

*) Eine μ_0 ist ein einzelner Punkt.; für $m=4$ reducirt sich π auf eine μ_0.

Diese letztere Aufgabe ist trivial (Nr. 1, Anm.); die erstere verlangt die Integration des vollständigen Systems:

(4) $$\xi_1^{(i)}\mathsf{A}_1 f + \cdots + \xi_m^{(i)}\mathsf{A}_m f = 0\text{*)} \qquad (i = 1, \cdots m-3),$$

worin die $\xi_k^{(i)}$ die Lösungen der linearen Gleichungen

$$\sum\nolimits^k \alpha_{ikh}\xi_k = 0 \qquad (i = 1, \cdots m;\ h = 1, \cdots \mathsf{K})$$

bedeuten.

Fügt man dem Pfaff'schen System $\mathfrak{A}$ irgend $l (\leqq m-4)$ exakte Gleichungen

(5) $$d\varphi_1 = 0, \cdots d\varphi_l = 0$$

hinzu, so erhält man ein System $\overline{\mathfrak{A}}$ $m - l^{\text{ter}}$ Stufe vom Charakter $\overline{\mathsf{K}} \leqq 3$, das wiederum dem Typus a) (oder c)) angehört, dessen zugehörige Congruenz also eine singuläre μ_{m-l-4}**) besitzt. Reducirt man $\overline{\mathfrak{A}}$ nach dem eben Gesagten auf $n - m + l + 2$ Terme, so erhält man für $\mathfrak{A}$ eine reducirte Form derselben Gliederzahl, und jede solche Form wird, wie man leicht erkennt, auf dem angegebenen Wege erhalten.

12. Im Falle b) besitzt die Congruenz $\mathfrak{C}$ eine auf M gelegene singuläre Mannigfaltigkeit π', deren Dimensionszahl λ gleich $m - 2 - \mathsf{K}$ ist**); ist $K = m - 1$, so giebt es eine solche Mannigfaltigkeit überhaupt nicht.

Die Congruenz besteht jetzt einmal aus allen in M liegenden Geraden, sodann aus allen Geraden, die π' schneiden. Es giebt eine einzige Congruenz-μ_{m-2}, nämlich M. Ist daher das Pfaff'sche System

$$(\mathfrak{A}_1) \qquad \begin{aligned} dx_{m+h} &= \sum\nolimits^i a_{ih}\,dx_i \qquad (h = 1, \cdots n-m), \\ p_1 dx_1 + \cdots &+ p_m dx_m = 0 \end{aligned}$$

unbeschränkt integrabel, d. h. ist der Rang 2ϱ der $m+1$-zeiligen Matrix

(6) $$\begin{Vmatrix} p_{ik}, & p_i \\ p_k, & 0 \end{Vmatrix} \qquad \begin{pmatrix} i, k = 1, 2, \cdots m; \\ p_{ik} = \mathsf{A}_i p_k - \mathsf{A}_k p_i \end{pmatrix}\text{***)}$$

gleich 2, dann und nur dann existirt für $\mathfrak{A}$ eine (und wesentlich nur eine) Darstellung in $n - m + 1$-Termen.

---

*) Sind $df_1 \cdots df_{n-m+2}$ die Differentialelemente einer reducirten Form von $\mathfrak{A}$, so ist jede $m-2$-dimensionale Integralmannigfaltigkeit, die durch ein Gleichungensystem der Form

$$f_i = \text{const.} \qquad (i = 1, \cdots n-m+2)$$

definirt wird, erzeugt von ∞^1 „Charakteristiken" des vollständigen Systems (4), und durch eine beliebige Integralcurve von $\mathfrak{A}$ geht eine und nur eine solche Integralmannigfaltigkeit hindurch.

**) Vgl. die Anm. zu Nr. 10.

***) Wir gebrauchen im Folgenden für *geränderte* Matrices häufig diese abgekürzte Schreibweise.

Im entgegengesetzten Fall ist der Charakter des Pfaffschen Systems $\mathfrak{A}_1$ gleich 1, da die K Bilinearformen der Congruenz $\mathfrak{C}$ vermöge (3) und der dazu congruenten Relation alle verschwinden. Nach meinen oben citirten Untersuchungen*) lässt sich, wenn 2ϱ den Rang der Matrix (6) bedeutet, das Pfaff'sche System $\mathfrak{A}_1$ auf eine Normalform mit $n - m + \varrho$ (und nicht weniger) Differentialelementen bringen, und eine reducirte Form mit dieser Termenzahl ergiebt sich also auch für $\mathfrak{A}$. Fügt man zu $\mathfrak{A}$ irgend l exakte Gleichungen (5) hinzu, so besitzt das so entstehende $n - m + l$-gliedrige Pfaff'sche System wieder den Charakter 1, und man erhält nach dem vorhin Gesagten für dies System, mithin auch für $\mathfrak{A}$, reducirte Formen mit $n - m + \varrho + l$ Termen.

13. Die oben definirte Zahl ϱ genügt der Ungleichung:

$$2\varrho \leqq \mathsf{K} + 2. \tag{7}$$

In der That, das Pfaff'sche System $\mathfrak{A}_1$ ist gegenüber beliebigen Variabelntransformationen mit $\mathfrak{A}$ offenbar *invariant verknüpft*, und 2ϱ ist eine Invariante von $\mathfrak{A}_1$, mithin auch von $\mathfrak{A}$. Andererseits kann man im Falle $\mathsf{K} \leqq m - 2$ das Pfaff'sche System $\mathfrak{A}$ nach Nr. 8 durch Einführung neuer Variabeln auf eine Form $\mathfrak{A}'$ bringen, die nur noch von

$$n - \lambda - 1 = n - m + \mathsf{K} + 1$$

Variabeln abhängt, da ja die Congruenz $\mathfrak{C}$ eine singuläre μ_λ besitzt (Nr. 12); für $\mathfrak{A}'$ sind die Zahlen K, ϱ dieselben wie für $\mathfrak{A}$. Das System $\mathfrak{A}_1'$, das zu $\mathfrak{A}'$ in derselben Beziehung steht wie $\mathfrak{A}_1$ zu $\mathfrak{A}$, ist identisch mit dem Pfaff'schen System, in das sich $\mathfrak{A}_1$ vermöge der genannten Variabelntransformation verwandelt, und enthält natürlich keine andern Variabeln als $\mathfrak{A}'$. Die Matrix, die für $\mathfrak{A}_1'$ analog gebildet wird wie das Schema (6) für $\mathfrak{A}_1$, besteht daher nur aus

$$(m - \lambda - 1) + 1 = \mathsf{K} + 2$$

Zeilen, besitzt aber andererseits ebenfalls den Rang 2ϱ, sodass in der That die Ungleichung (7) stattfindet.

14. Ist $\mathsf{K} = m - 1$, so gewinnt man durch das Verfahren der Nr. 12 alle überhaupt möglichen reducirten Formen für $\mathfrak{A}$, da in diesem Falle für jedes $\varkappa$ die Congruenz-$\mu_\varkappa$ identisch sind mit dem Inbegriff aller in M liegenden $\mu_\varkappa$ (Nr. 7). Ist aber $\mathsf{K} \leqq m - 2$, also $\lambda \geqq 0$, so giebt es für $\varkappa \leqq \lambda + 1$ noch eine zweite Kategorie von Congruenz-$\mu_\varkappa$, bestehend aus allen denjenigen Mannigfaltigkeiten $\mu_\varkappa$, die mit der singulären Mannigfaltigkeit π' mindestens je eine $\mu_{\varkappa-1}$ gemein haben, also insbesondere eine zweite Kategorie von Congruenz-$\mu_{\lambda+1}$, bestehend aus allen denjenigen $\mu_{\lambda+1}$, welche die Mannigfaltigkeit π' selbst enthalten.

*) Leipz. Ber. 1898, pag. 214 u. f.

Dementsprechend (Nr. 8) erhält man für das System $\mathfrak{A}$ Darstellungen mit $n - m + \mathsf{K}$ Differentialelementen, indem man nach der Vorschrift der vorigen Nr. das System zunächst auf eine Form $\mathfrak{A}'$ mit $n - m + \mathsf{K} + 1$ Variabeln bringt, und für $\mathfrak{A}'$ dann die allgemeinste reducirte Form mit $n - m + \mathsf{K}$ Termen ermittelt, was auf eine triviale Aufgabe führt (Nr. 1, Anm.). Ganz ähnlich wie in Nr. 11 findet man für $\mathfrak{A}$ weiterhin Darstellungen mit mehr als $n - m + \mathsf{K}$ Differentialelementen.

15. Offenbar hat man mit Rücksicht auf die Ungleichung (7) im vorliegenden Falle b) immer $\mathsf{K} > \varrho$, also ist $n - m + \varrho$ die *Minimalzahl* von Termen, auf die ein Pfaff'sches System dieses Typus reducirt werden kann, und die reducirten Formen dieser Art werden alle durch die Methode der Nr. 12 gefunden.

Ist $\mathsf{K} = 2$, liegt also der Fall c) der Nr. 10 vor, so ist wieder $n - m + \varrho$ die Minimalzahl von Termen, auf welche $\mathfrak{A}$ gebracht werden kann, wenn 2ϱ den Rang des Schema's (6) bedeutet. Für $\varrho = 1$ giebt es, wie in Nr. 11 gezeigt wurde, höchstens *eine* $n - m + 1$-gliedrige Darstellung. *Dagegen existiren jetzt wegen* $\varrho \leqq 2$ *immer zwei wesentlich verschiedene Kategorien von* $n - m + 2$*-gliedrigen reducirten Formen:* denn es giebt im Falle c) zwei getrennte Schaaren von Congruenz-μ_{m-3}: die Mannigfaltigkeiten der einen Schaar liegen alle in M, die der andern enthalten die singuläre μ_{m-4} der Congruenz $\mathfrak{C}$. Die $n - m + 2$-gliedrigen reducirten Formen der ersten Kategorie werden alle nach Nr. 12, die der zweiten nach Nr. 14 gefunden.

Es sei noch ausdrücklich hervorgehoben, dass alle in diesem Paragraphen besprochenen Reductionen *lediglich die Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen erfordern.*

§4.

Das Differentialsystem $\mathfrak{D}$.

16. Wir nehmen nunmehr die allgemeine Theorie des § 2 wieder auf. Ist eine τ-gliedrige reducirte Form $\mathfrak{B}$ des Pfaff'schen Systems $\mathfrak{A}$ vorgelegt, so können wir die Gleichungen:

$$f_1 = \text{const.}, \cdots f_\tau = \text{const.} \tag{1}$$

im Raume R_n mit den Punktcoordinaten $x_1, \cdots x_n$ als eine Schaar von τ-fach unendlich vielen ν-dimensionalen*) Integralmannigfaltigkeiten des Systems $\mathfrak{A}$ deuten; durch einen beliebigen Punkt $P(x_1^0, \cdots x_n^0)$ geht eine und nur eine dieser Integral-μ_ν hindurch. Eine einzelne derselben werde durch die Relationen:

$$x_i = \varphi_i(u_1, u_2, \cdots u_\nu) \qquad (i = 1, 2, \cdots n) \tag{2}$$

*) $\nu = n - \tau = m - \sigma$.

definirt, worin die u wesentliche Parameter bezeichnen. Dann befriedigen die so definirten Functionen x das Differentialsystem:

$$(3)\qquad \frac{\partial x_{m+h}}{\partial u_s} = \sum_1^m {}^i a_{ih} \frac{\partial x_i}{\partial u_s}; \qquad (h=1,\cdots n-m),$$

$$(4)\qquad \sum_1^m {}^i \sum_1^m {}^k a_{ikl} \frac{\partial x_i}{\partial u_s} \frac{\partial x_k}{\partial u_t} = 0 \quad (s,t=1,\cdots \nu;\ l=1,\cdots K),$$

welches wir $\mathfrak{D}$ nennen wollen. Die Gleichungen (4) entstehen aus (3) durch Differentiationen nach $u_1, \cdots u_\nu$ und geeignete Subtractionen. Es sei $\mathfrak{D}_q$ das „erweiterte" System q^{ter} Ordnung, das aus $\mathfrak{D}$ entsteht, wenn man diesen Relationen alle durch wiederholte Derivationen nach $u_1, \cdots u_\nu$ daraus folgenden Gleichungen bis zur q^{ten} Ordnung einschliesslich hinzufügt; dann gilt der Satz:

Damit für das Pfaff'sche System $\mathfrak{A}$ eine τ-gliedrige reducirte Form existire, ist nothwendig und hinreichend, dass das System $\mathfrak{D}_q$, wie gross auch der Index q gewählt werden mag, niemals das Verschwinden aller ν-reihigen Determinanten der Matrix:

$$(5)\qquad \left\| \begin{matrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1}, & \frac{\partial x_2}{\partial u_1}, & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_\nu}, & \frac{\partial x_2}{\partial u_\nu}, & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_\nu} \end{matrix} \right\|$$

noch auch eine Gleichung zwischen den $x_1, \cdots x_n$ allein zur Folge habe.

17. Dass die genannte Bedingung nothwendig ist, folgt daraus, dass andernfalls entweder überhaupt keine Integral-M_ν existirte, oder wenigstens nicht durch jeden Punkt P des R_n eine solche hindurchgehen könnte. Dass aber unsere Bedingung auch hinreicht, zeigt die allgemeine Theorie der Differentialsysteme; man kann dann nämlich q so gross wählen, dass $\mathfrak{D}_q$ durch Auflösung nach gewissen Ableitungen der x in ein *„passives"* Differentialsystem $\mathfrak{D}'$ übergeht*); dieses letztere ist dann folgendermassen charakterisirt:

1) $\mathfrak{D}'$ besitzt die „canonische Form", d. h. es besteht aus lauter Relationen der Form

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_\nu} x_i}{\partial u_1^{\alpha_1} \partial u_2^{\alpha_2} \cdots \partial u_\nu^{\alpha_\nu}} = \varphi_{i,\alpha_1,\cdots\alpha_\nu}\left(x_1, \cdots x_n, \cdot \cdot \frac{\partial^{\beta_1+\cdots+\beta_\nu} x_k}{\partial u_1^{\beta_1} \cdots \partial u_\nu^{\beta_\nu}} \cdots\right)$$

---

*) C. Riquier, Ann. éc. norm. 1893; A. Tresse, Acta math. 18 (1894); vgl. meinen Artikel in der „Encyclopädie" II A 5 Nr. 2, und die Arbeit „I" p. 278 ff.

mit folgenden Eigenschaften: Keine der links vorkommenden Ableitungen tritt auf einer der rechten Seiten auf; für jede in $\varphi_{i,\alpha_1,\cdots\alpha_\nu}$ vorkommende Ableitung $\frac{\partial^{\beta_1+\cdots+\beta_\nu} x_k}{\partial u_1^{\beta_1}\cdots\partial u_\nu^{\beta_\nu}}$ ist $\Sigma\beta \leqq \Sigma\alpha$; gilt das Gleichheitszeichen, so ist $k \leqq i$, und im Falle $k = i$ die erste nicht verschwindende der Differenzen $\beta_1 - \alpha_1, \beta_2 - \alpha_2, \cdots$ positiv.

2) Bezeichnet man die Ableitungen, die auf den linken Seiten von $\mathfrak{D}'$ vorkommen, sowie alle unendlich vielen Ableitungen, die aus ihnen durch unbegrenzte Differentiation nach $u_1 \cdots u_\nu$ erhalten werden, als *„principale"*, die x selbst und alle noch übrigen Ableitungen der x als *„parametrische"* Grössen des Differentialsystems $\mathfrak{D}'$, so lässt sich mittels $\mathfrak{D}'$ und der Gleichungen, die daraus durch Differentiationen nach den u folgen, *jede* principale Ableitung auf *eine und nur eine* Weise durch die parametrischen Grössen *allein* darstellen.

Versteht man unter

$$(6)\qquad \frac{\partial^{\lambda_1+\cdots+\lambda_\nu} x_i}{\partial u_1^{\lambda_1}\cdots\partial u_\nu^{\lambda_\nu}};\quad \frac{\partial^{\mu_1+\cdots+\mu_\nu} x_i}{\partial u_1^{\mu_1}\cdots\partial u_\nu^{\mu_\nu}}$$

irgend zwei verschiedene principale Ableitungen derselben Function x_i, und ist $\varkappa_h$ die grössere der beiden Zahlen λ_h und μ_h, so heisst nach Riquier*) die Grösse

$$\frac{\partial^{\varkappa_1+\cdots+\varkappa_\nu} x_i}{\partial u_1^{\varkappa_1}\partial u_2^{\varkappa_2}\cdots\partial u_\nu^{\varkappa_\nu}}$$

die zu den Ableitungen (6) gehörige „cardinale" Ableitung. Damit dann ein Differentialsystem $\mathfrak{D}'$, das die Forderung 1) erfüllt, auch die Bedingung 2) befriedige, ist nothwendig und hinreichend, dass sich aus $\mathfrak{D}'$ und den durch Derivationen daraus folgenden Gleichungen für jede cardinale Ableitung je eine einzige Darstellung in den parametrischen Grössen allein ergebe. Entsteht z. B. $\mathfrak{D}'$, indem man $\mathfrak{D}$ in gewisser Weise nach ersten Ableitungen der x auflöst, so kommt die Forderung 2) darauf hinaus, dass mittels $\mathfrak{D}'$ jede principale *zweite* Ableitung auf eine und nur eine Weise durch die parametrischen Grössen ausgedrückt werden kann.

Das passive System $\mathfrak{D}'$ besitzt ein und nur ein an der Stelle

$$u_1 = 0, \cdots u_\nu = 0$$

reguläres Integralsystem (2) derart, dass die x und ihre sämmtlichen parametrischen Ableitungen an der genannten Stelle in willkürlich vorgeschriebene Anfangswerthe:

*) Ann. éc. norm. 1893, p. 77 ff.

$$(7) \qquad x_1^0, \cdots x_n^0, \cdots \left(\frac{\partial^{\beta_1+\cdots+\beta_\nu} x_i}{\partial u_1^{\beta_1} \cdots \partial u_\nu^{\beta_\nu}}\right)_0$$

übergehen; Voraussetzung ist dabei nur, dass die rechten Seiten des Differentialsystems $\mathfrak{D}'$ für diese Anfangswerthe regulär sind, und die m Potenzreihen:

$$\sum \left(\frac{\partial^{\beta_1+\cdots+\beta_\nu} x_i}{\partial u_1^{\beta_1} \cdots \partial u_\nu^{\beta_\nu}}\right)_0 u_1^{\beta_1} u_2^{\beta_2} \cdots u_\nu^{\beta_\nu}, \qquad (i=1, \cdots m)$$

worin die Summation sich auf alle *parametrischen* Ableitungen von x_i erstreckt, einen gemeinsamen ν-dimensionalen Convergenzbezirk besitzen. Die Anfangswerthe sind also nur durch Ungleichungen eingeschränkt. Da ferner die ν-reihigen Determinanten von (5) vermöge $\mathfrak{D}'$ nicht alle verschwinden, so kann man die Werthe (7) so wählen, dass die Gleichungen (2) wirklich eine ν-dimensionale Punktmannigfaltigkeit des R_n darstellen; dazu ist nur nöthig, dass die Grössen (7) gewisse *Gleichungen* nicht erfüllen. Durch jeden Punkt $(x_1^0, \cdots x_n^0)$ eines im R_n enthaltenen n-dimensionalen Gebiets geht also unter unseren Annahmen mindestens *eine* Integral-M_ν, und es giebt infolgedessen mindestens *eine* $n-\nu$-fach ausgedehnte Schaar solcher Integralmannigfaltigkeiten, was zu zeigen war.

Das allgemeine Integral des Differentialsystems $\mathfrak{D}$ können wir auch als *„das allgemeine ν-dimensionale Integral des Pfaff'schen Systems $\mathfrak{A}$"* bezeichnen; die Formeln (1) definiren dann ein *ν-dimensionales „vollständiges" Integral* von $\mathfrak{A}$.

18. Sind die Zahlen ν und $\varkappa$ gegeben, so erfüllt das Differentialsystem $\mathfrak{D}$ entweder an sich schon die Forderungen der Nr. 16, d. h. die a_{ik}, a_{ikh} unterliegen gar keinen Bedingungsgleichungen; oder es lassen sich aus $\mathfrak{D}$ und den daraus abgeleiteten Gleichungen mit Rücksicht darauf, dass die Determinanten (5) nicht alle verschwinden sollen, alle Ableitungen der x eliminiren. Unter der letzteren Annahme ergeben sich im Allgemeinen mehrere distincte Fälle, deren jeder durch ein Relationssystem zwischen den a_{ik} und ihren nach den x genommenen partiellen Ableitungen charakterisirt ist, und die Forderung, dass wenigstens *eines* dieser Relationssysteme identisch, d. h. für jedes Werthsystem $x_1, \cdots x_n$ erfüllt sei, ist dann äquivalent mit der andern, dass das System $\mathfrak{A}$ sich auf eine Form mit τ Differentialelementen bringen lasse.

19. Deuten wir die ν Werthsysteme

$$\frac{\partial x_1}{\partial u_s}, \frac{\partial x_2}{\partial u_s}, \cdots \frac{\partial x_\nu}{\partial u_s} \qquad (s=1, \cdots \nu)$$

als Coordinaten ebenso vieler Punkte des Raums R_{m-1}, so sagen die

Beziehungen (4) aus, dass diese Punkte zusammen eine $\nu - 1$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit der Congruenz $\mathfrak{C}$ definiren (Nr. 4, 5). Verstehen wir also unter den μ_{ik} die von $x_1, \cdots x_n, \varrho_1, \cdots \varrho_\omega$ abhängenden Coefficienten des Gleichungssystems Σ (Nr. 5), bezeichnen wir ferner mit D das Differentialsystem

$$(8) \qquad \frac{\partial x_{m+h}}{\partial u_s} = \sum_1^m {}^i a_{ih} \frac{\partial x_i}{\partial u_s} \qquad (h = 1, \cdots n - m),$$

$$(9) \qquad \sum_1^m {}^i \mu_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial u_s} = 0 \quad (k = 1, 2, \cdots \sigma;\ s = 1, 2, \cdots \nu),$$

und mit $D', D'', \cdots$ die Gleichungssysteme, die in analoger Weise aus $\Sigma', \Sigma'', \cdots$ hervorgehen, so besteht zwischen den Differentialsystemen $D^{(i)}$ einerseits und $\mathfrak{D}$ andererseits folgender Zusammenhang: Jedes Integralsystem $x_1, \cdots x_n$ von $\mathfrak{D}$ befriedigt mindestens eines der Differentialsysteme $D^{(i)}$, wenn darin unter den ϱ_k bestimmte Functionen der u verstanden werden; umgekehrt, sind $x_1, \cdots x_n\ \varrho_1, \varrho_2, \cdots$ Integralfunctionen eines der Systeme $D^{(i)}$, so befriedigen die n ersten dieser Functionen das Differentialsystem $\mathfrak{D}$.

Nach Nr. 16 existirt also für das gegebene Pfaff'sche System $\mathfrak{A}$ eine τ-gliedrige reducirte Form dann und nur dann, wenn wenigstens *eines* der Differentialsysteme $D^{(i)}$ die Eigenschaft besitzt, dass aus ihm und aus den Gleichungen, die durch unbegrenzte Derivation nach den u daraus folgen, niemals eine Relation in den x allein noch auch das Verschwinden aller ν-reihigen Determinanten der Matrix (5) hervorgeht.

§ 5.

Formulirung eines allgemeinen Reductionsprincips.

20. Das Differentialsystem D (Nr. 19) steht zu dem ersten erweiterten System S

$$(1) \qquad dx_{m+h} = \sum {}^i a_{ih}\, dx_i \qquad (h = 1, \cdots n - m),$$

$$(2) \qquad \sum_1^m {}^i \mu_{il}\, dx_i = 0 \qquad (l = 1, \cdots \sigma)$$

in derselben Beziehung, wie die Relationen (3) Nr. 16 zu dem gegebenen Pfaff'schen System $\mathfrak{A}$.

Da die Bilinearformen

$$(3) \qquad \sum {}^i \sum {}^k \alpha_{ikh}\, dx_i\, \delta x_k \qquad (h = 1, \cdots K)$$

vermöge (2) und der Gleichungen

$$(2)' \qquad \sum_1^m {}^i \mu_{il}\,\delta x_i = 0 \qquad (l = 1, \cdots \sigma)$$

alle verschwinden, so sind die bilinearen Covarianten des Pfaff'schen Systems S die folgenden:

$$(4) \qquad 0 = \sum_1^m {}^i \sum_1^m {}^k \mu_{ikl}\,dx_i\,\delta x_k + \sum_1^m {}^i \sum_1^\omega {}^s \frac{\partial \mu_{il}}{\partial \varrho_s}(dx_i\,\delta\varrho_s - \delta x_i\,d\varrho_s),$$

worin gesetzt wurde:

$$\mu_{ikl} \equiv A_i \mu_{kl} - A_k \mu_{il};$$

man kann sich hieraus σ von den Differentialen dx_i und die entsprechenden δx_i mittels (2) und (2)' eliminirt denken. *Der Charakter des erweiterten Systems S ist also höchstens gleich σ*; seine Stufe ist $m - \sigma + \omega$.

21. Wir fragen nun nach den Bedingungen dafür, dass das System S, wenn darin die x und ϱ als unabhängige Variable betrachtet werden, sich auf eine reducirte Form mit $\tau + \omega$ Differentialelementen:

$$(5) \qquad \sum_1^{\tau+\omega} {}^i F_{ih}(x, \varrho)\,d\varphi_i(x, \varrho) = 0 \quad (h = 1, \cdots n - m + \sigma)$$

bringen lasse, und zwar derart, dass ω der Gleichungen $\varphi_i =$ const., etwa die folgenden:

$$(6) \qquad \varphi_{\tau+1} = \text{const.}, \cdots \varphi_{\tau+\omega} = \text{const.},$$

sich nach $\varrho_1, \cdots \varrho_\omega$ auflösen lassen. Diese Bedingungen lassen sich nach Nr. 5 so ausdrücken: Erstens müssen überhaupt ω Relationenpaare

$$(7) \qquad d\varrho_i = \sum_1^m {}^k \varrho_{ik}\,dx_k,$$

$$(7)' \qquad \delta\varrho_i = \sum_1^m {}^k \varrho_{ik}\,\delta x_k \qquad (i = 1, \cdots \omega)$$

existiren, derart dass die bilinearen Covarianten (4) vermöge (2) (2)' (7) (7)' verschwinden, und zweitens müssen sich die ϱ_{ik} so als Functionen der x und ϱ bestimmen lassen, dass das $\tau + \omega$-gliedrige Pfaff'sche System (1) (2) (7) unbeschränkt integrabel wird; bedeuten dann nämlich die Relationen $\varphi_i =$ const. die allgemeinen Integralgleichungen des letzteren, so sind ω derselben nach $\varrho_1, \cdots \varrho_\omega$ auflösbar, wie aus der Form des Systems hervorgeht.

Aus jeder Darstellung (5) *ergiebt sich dann für das Pfaff'sche System* $\mathfrak{A}$ *eine Form mit* τ *Differentialelementen, indem man die* ϱ_k *als Functionen der* x *aus* (6) *berechnet und in den Ausdruck* (5) *einsetzt.*

22. Die Bedingungen der vorigen Nr. können wir aber auch so formuliren: Das Differentialsystem D der Nr. 19 und die unbegrenzt vielen daraus abgeleiteten Gleichungen dürfen weder das Verschwinden aller ν-reihigen Determinanten der Matrix (5) Nr. 16, noch auch eine Relation zwischen den $n + \omega$ Variabeln x, ϱ allein zur Folge haben. Nach Nr. 18 sind, wenn diese Forderung erfüllt ist, zwei Fälle zu unterscheiden:

1) Die a_{ik}, μ_{il} unterliegen keinen Bedingungsgleichungen.

2) Es giebt eine endliche Zahl von Relationensystemen $G_1, G_2, \cdots$ zwischen den a_{ik}, μ_{il} und ihren nach den x und den ϱ genommenen partiellen Ableitungen; damit S auf die Form (5) gebracht werden könne, ist nothwendig und hinreichend, dass wenigstens *eines* dieser Relationensysteme für jedes beliebige Werthsystem x, ϱ befriedigt sei.

Es seien nun andererseits $\varrho_1, \varrho_2, \cdots \varrho_\omega$ solche Functionen der x, dass das Pfaff'sche System S unbeschränkt integrabel wird, wenn man für die ϱ_i ihre Ausdrücke einsetzt; sind dann

$$(8) \qquad f_1 = \text{const.}, \cdots f_\tau = \text{const.}$$

die allgemeinen Integralgleichungen dieses unbeschränkt integrabeln Systems, und stellt man eine der ν-fach ausgedehnten Integralmannigfaltigkeiten, die durch (8) definirt sind, in der Form

$$(9) \qquad x_i = \varphi_i(u_1, u_2, \cdots u_\nu) \qquad (i = 1, \cdots n)$$

dar, so werden auch die ϱ_k gewisse Functionen der u, und die so definirten $n + \omega$ Functionen x, ϱ genügen identisch dem Differentialsystem D und den daraus abgeleiteten Gleichungen.

Man erhält sonach eine erste Kategorie von Functionen

$$(10) \qquad \varrho_1(x_1, \cdots x_n), \cdots \varrho_\omega(x_1, \cdots x_n),$$

die das Pfaff'sche System S unbeschränkt integrabel machen, indem man S, falls dies möglich ist, in allgemeinster Weise auf eine solche reducirte Form mit $\tau + \omega$ *Termen* $d\varphi_1, \cdots d\varphi_{\tau+\omega}$ *bringt, dass sich* ω *von den Gleichungen* $\varphi_i =$ const. *nach* $\varrho_1, \cdots \varrho_\omega$ *auflösen lassen. Jedes andere Functionensystem* (10) *der genannten Beschaffenheit genügt identisch wenigstens* e i n e m *derjenigen Gleichungensysteme* $G_1, G_2, \cdots$ *die nicht für beliebige Werthe von* $x_1, \cdots x_n, \varrho_1, \cdots \varrho_\omega$ *erfüllt sind.*

In der That erhält man ja aus D und den daraus abgeleiteten Gleichungen durch passende Eliminationen der partiellen Ableitungen der x und ϱ gerade die Relationensysteme G_i und keine andern.

23. Es sei G_1 eines der Gleichungssysteme, die nicht für beliebige x, ϱ stattfinden; lässt sich dann G_1 in der Form

$$\varrho_i = \psi_i(x_1, \cdots x_n, \varrho_1, \cdots \varrho_{\varpi})$$
$$(i = \varpi + 1, \varpi + 2, \cdots \omega; \ 0 \leqq \varpi < \omega)$$

auflösen, so geht S durch Substitution dieser Ausdrücke über in ein Pfaff'sches System S_1 mit nur $n + \varpi$ unabhängigen Variabeln. Auf S_1 kann man jetzt genau dieselbe Schlussweise anwenden, die wir in der vorigen Nr. für das Pfaff'sche System S durchgeführt haben, m. a. W.: das Problem, die allgemeinsten Functionen $\varrho_1, \cdots \varrho_{\varpi}$ der Variabeln x zu ermitteln, die in S_1 substituirt dies System unbeschränkt integrabel machen, kommt zurück auf die Frage nach den nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass sich S_1 auf eine reducirte Form mit $\tau + \varpi$ Differentialelementen

$$d\chi_i(x_1, \cdots x_n, \varrho_1, \cdots \varrho_{\varpi}) \qquad (i = 1, \cdots 1 + \varpi)$$

bringen lasse, derart dass ϖ der Gleichungen $\chi_i = \text{const.}$ nach $\varrho_1, \cdots \varrho_{\varpi}$ auflösbar sind, u. s. w. f.

Dieselbe Ueberlegung ist natürlich für jedes nicht identisch befriedigte Gleichungssystem $G_1, G_2, \cdots$ durchzuführen. Man gelangt so in allen Fällen entweder zu dem allgemeinsten Functionensystem $\varrho_1, \cdots \varrho_{\omega}$ der Variabeln x, welches S in ein unbeschränkt integrables System verwandelt, oder zu dem Nachweis, dass ein solches Functionensystem nicht existirt. Dieser Nachweis ist sofort erbracht in dem Specialfall, dass keines der Gleichungssysteme G_i identisch erfüllt ist, und aus jedem durch Elimination der ϱ_k eine Gleichung zwischen den x allein hervorgeht.

Für die übrigen erweiterten Systeme $S', S'', \cdots$ gilt natürlich genau dieselbe Schlussweise.

24. Wenn es sich darum handelt, für ein Pfaff'sches System $\mathfrak{A}$ der m^{ten} Stufe das in § 1 formulirte Problem zu lösen, so können wir die analoge Aufgabe für Pfaff'sche Systeme kleinerer Stufe als bereits erledigt betrachten. Ist nun $\omega < \sigma$, so ist die Stufenzahl $m - \sigma + \omega$ des Pfaff'schen Systems S kleiner als m, und da

$$\sigma = \tau - n + m; \quad \nu = m - \sigma = n - \tau,$$

so folgt aus den bisherigen Entwickelungen dieses Paragraphen:

Die Aufgabe, ein Pfaff'sches System m^{ter} Stufe in allgemeinster Weise auf eine Form mit τ Differentialelementen zu bringen, lässt sich immer dann auf das entsprechende Problem für Pfaff'sche Systeme kleinerer Stufenzahl reduciren, wenn die Congruenz $\mathfrak{C}$ nicht mehr als $(\tau - n + m - 1)$-

fach unendlich viele Congruenzmannigfaltigkeiten $n-\tau-1^{\text{ter}}$ Dimension besitzt).*

Aber auch für den Fall $\omega \geqq \sigma$ ist die vorstehende Methode von grossem Nutzen. Denn in vielen Fällen hängen die μ_{il} von den ϱ_k in sehr einfacher Weise ab, und es ist aus diesem Grunde das Reductionsproblem für die erweiterten Systeme $S, S', \cdots$ oft viel leichter zu erledigen als für das gegebene Pfaff'sche System $\mathfrak{A}$.

§ 6.

Reduction eines Pfaff'schen Systems in n Variabeln auf $n-2$ Terme.

25. Wird $\tau = n-2$ vorausgesetzt, so nimmt das Differentialsystem $\mathfrak{D}$ (Nr. 16) folgende Form an:

$$\text{(1)} \qquad \frac{\partial x_{m+h}}{\partial u_s} = \sum_1^m {}_i\, a_{ih} \frac{\partial x_i}{\partial u_s} \qquad (h=1, \cdots n-m;\ s=1,2),$$

$$\text{(2)} \qquad \sum \sum \alpha_{ikh} \frac{\partial x_i}{\partial u_1} \frac{\partial x_k}{\partial u_2} = 0 \qquad (h=1,2,\cdots K).$$

Wir betrachten zunächst den Fall, dass in der K-zeiligen Matrix:

$$\text{(3)} \qquad \left\| \begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum\limits_{i=1}^m \alpha_{i1h} \dfrac{\partial x_i}{\partial u_1}, & \sum\limits_{i=1}^m \alpha_{i2h} \dfrac{\partial x_i}{\partial u_1}, & \cdots & \sum\limits_{i=1}^m \alpha_{imh} \dfrac{\partial x_i}{\partial u_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix} \right\|$$

$$(h=1,2,\cdots K)$$

alle $m-1$-reihigen, aber nicht alle $m-2$-reihigen Determinanten für beliebige Werthe der Grössen:

$$\text{(4)} \qquad x_1, \cdots x_n, \frac{\partial x_1}{\partial u_1}, \frac{\partial x_2}{\partial u_1}, \cdots \frac{\partial x_m}{\partial u_1}$$

verschwinden; dies setzt natürlich $K \geqq m-2$ voraus. Dann reduciren sich die Gleichungen (2), wenn man darin die $\frac{\partial x_i}{\partial u_2}$ als Unbekannte betrachtet, auf $m-2$ linear unabhängige, besitzen also zwei Lösungssysteme, von denen das eine aus den $\frac{\partial x_i}{\partial u_1}$ besteht. Wir dürfen annehmen, dass sich das System (2) nach den Ableitungen:

$$\frac{\partial x_3}{\partial u_2}, \frac{\partial x_4}{\partial u_2}, \cdots \frac{\partial x_m}{\partial u_2}$$

*) Ich habe dies allgemeine Princip in der Theorie der Pfaff'schen Systeme vierter und fünfter Stufe wiederholt verwerthet, vgl. „I“ p. 292—297, „II“ p. 430 ff.

auflösen lasse; setzen wir die so erhaltenen Ausdrücke in (1) ein, so verwandelt sich $\mathfrak{D}$ in ein Differentialsystem $\mathfrak{D}'$, das die canonische Form (Nr. 17) besitzt; die *cardinalen* Ableitungen des Systems sind diese:

$$\frac{\partial^2 x_{m+h}}{\partial u_1 \partial u_2} \qquad (h=1,2,\cdots n-m),$$

und dass sich für jede derselben aus $\mathfrak{D}'$ und den daraus abgeleiteten Gleichungen nur *eine* Darstellung in den parametrischen Grössen ergiebt, folgt unmittelbar aus der Entstehung des Systems $\mathfrak{D}$. Die parametrischen Grössen sind hier, ausser den x selbst, *alle* Ableitungen von x_1 und x_2, sodann *alle* nach u_1 genommenen Ableitungen von $x_3, \cdots x_m$.

Ist also durch die Formeln

$$(5) \qquad x_i = \psi_i(u_1) \qquad (i=1,\cdots n)$$

eine „Integralcurve" des Pfaff'schen Systems $\mathfrak{A}$, m. a. W. ein Integralsystem der gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$\frac{dx_{m+h}}{du_1} = \sum_1^m {}_i\, a_{ih} \frac{dx_i}{du_1} \qquad (h=1,\cdots n-m)$$

definirt, so besitzt $\mathfrak{D}$ ein und nur ein Integralsystem $x_1, \cdots x_n$ der Eigenschaft, dass die x_i vermöge $u_2 = 0$ in die Functionen $\psi_i(u_1)$ übergehen, während x_1 und x_2 im übrigen willkürliche Functionen von u_1 und u_2 bedeuten; durch jede Integralcurve des Pfaff'schen Systems geht also eine und, wie man leicht einsieht*), auch *nur* eine Integral-M_2 hindurch.

Diese Schlussweise erleidet nur dann eine Modification, wenn die Integralcurve (5) alle diejenigen Differentialgleichungen erfüllt, die sich durch Nullsetzen sämmtlicher $m-2$-reihiger Determinanten des Schemas (3) ergeben**); eine solche besondere Integralcurve kann man eine Charakteristik des Pfaff'schen Systems $\mathfrak{A}$ oder des Differentialsystems $\mathfrak{D}$ nennen. Man erkennt leicht, dass eine derartige Curve auf unbegrenzt vielen Integral-M_2 gelegen ist.

Verschwinden die $m-2$-reihigen Determinanten der Matrix (3) alle identisch, was für $K < m-2$ immer, für $K \geq m-2$ nur in besonderen Fällen***) eintritt, so werden die Gleichungen (2) von einander abhängig, und es gehen durch jede *beliebige* Integralcurve unbegrenzt viele Integral-M_2 hindurch.

---

*) Vgl. „III" pag. 200, 203.

**) Dieses Gleichungssystem wird gelegentlich von Herrn F. Engel betrachtet, Leipz. Ber. 1890, pag. 196.

***) Vgl. das in „II" pag. 410 behandelte Beispiel.

Damit also ein Pfaff'sches System m^{ter} Stufe sich auf eine Form mit $n-2$ Differentialelementen reduciren lasse, ist **hinreichend**, *dass sein Charakter K nicht grösser als $m-2$ sei.*

26. Das Pfaff'sche System S (§ 2) hat unter der Annahme $\tau = n-2$ die Form:

$$dx_{m+h} = \sum^i a_{ih}\, dx_i \qquad (h = 1, \cdots n-m); \tag{6}$$

$$\sum^i \mu_{il}\, dx_i = 0 \qquad (l = 1, 2, \cdots m-2), \tag{7}$$

worin die μ_{il} ausser von den x noch von den Variabeln $\varrho_1, \cdots \varrho_\omega$ abhängen. Haben die Zahlen n', m', K' für S dieselbe Bedeutung wie die Zahlen n, m, K für $\mathfrak{A}$, so gelten nach Nr. 5 und 20 die folgenden Beziehungen:

$$n' = n + \omega; \quad m' = \omega + 2; \quad K' \leqq m-2. \tag{8}$$

Ist also $\omega \geqq m-2$, so folgt hieraus:

$$K' \leqq m' - 2,$$

und nach dem vorhin bewiesenen Satz existiren also für das System S unbegrenzt viele reducirte Formen mit $n'-2$ Differentialelementen. Um also zu zeigen, dass für das Pfaff'sche System $\mathfrak{A}$ unbegrenzt viele Darstellungen in $n-2$ Termen vorhanden sind, haben wir nach Nr. 21 und 22 nur nachzuweisen, dass das Differentialsystem D:

$$\frac{\partial x_{m+h}}{\partial u_s} = \sum_1^m{}^i a_{ih} \frac{\partial x_i}{\partial u_s} \qquad (s = 1, 2;\ h = 1, \cdots n-m); \tag{9}$$

$$\sum_1^m{}^i \mu_{il} \frac{\partial x_i}{\partial u_s} = 0 \qquad (s = 1, 2;\ l = 1, \cdots m-2), \tag{10}$$

und die Gleichungen die durch unbegrenzte Differentiationen nach u_1, u_2 daraus entstehen, niemals das Verschwinden aller zweireihigen Determinanten:

$$\frac{\partial x_i}{\partial u_1}\frac{\partial x_k}{\partial u_2} - \frac{\partial x_i}{\partial u_2}\frac{\partial x_k}{\partial u_1} \qquad (i, k = 1, \cdots m) \tag{11}$$

zur Folge haben. Durch Differentiationen und Subtraktionen folgt nun aus (10):

$$\sum_1^m{}^i \sum_1^m{}^k \mu_{ikl} \frac{\partial x_i}{\partial u_1}\frac{\partial x_k}{\partial u_2} + \sum_1^m{}^i \sum_1^\omega{}^s \frac{\partial \mu_{il}}{\partial \varrho_s}\left(\frac{\partial x_i}{\partial u_1}\frac{\partial \varrho_s}{\partial u_2} - \frac{\partial x_i}{\partial u_2}\frac{\partial \varrho_s}{\partial u_1}\right) = 0 \tag{12}$$

$$(l = 1, 2, \cdots m-2);$$

(vgl. Nr. 20). Bezeichnen wir jetzt die linken Seiten der Gleichungen (7) mit $\Delta_1, \Delta_2, \cdots \Delta_{m-2}$, so verschwinden in der Matrix:

$$\text{(13)} \quad \left\| \begin{matrix} \frac{\partial \Delta_1}{\partial \varrho_1}, & \frac{\partial \Delta_1}{\partial \varrho_2}, & \cdots & \frac{\partial \Delta_1}{\partial \varrho_\omega} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \Delta_{m-2}}{\partial \varrho_1}, & \frac{\partial \Delta_{m-2}}{\partial \varrho_2}, & \cdots & \frac{\partial \Delta_{m-2}}{\partial \varrho_\omega} \end{matrix} \right\|$$

vermöge (7) nicht alle $m-2$-reihigen Determinanten identisch, da sonst die Parameter $\varrho_1, \cdots \varrho_\omega$ in dem Gleichungssystem (7) nicht alle wesentlich wären, sondern vielmehr auf eine kleinere Anzahl reducirt werden könnten. Betrachten wir andererseits die Relationen (12) als lineare Gleichungen mit den ω Unbekannten $\frac{\partial \varrho_s}{\partial u_2}$, so erhält man die aus den Coefficienten dieser Unbekannten gebildete Matrix, indem man in (13) die dx_i durch $\frac{\partial x_i}{\partial u_1}$ ersetzt. Wir können also die Gleichungen (12) nach $m-2$ von den Grössen $\frac{\partial \varrho_s}{\partial u_2}$ auflösen; ferner dürfen wir annehmen, dass die Gleichungen (10) nach den Ableitungen

$$\frac{\partial x_l}{\partial u_1}, \quad \frac{\partial x_l}{\partial u_2} \qquad (l = 3, 4, \cdots m)$$

auflösbar seien. Substituirt man diese Ausdrücke in (9), so erhält man an Stelle von (9), (10), (12) ein canonisches Differentialsystem $\overline{D}$, welches zu S in derselben Beziehung steht wie $\mathfrak{D}'$ zu dem gegebenen System $\mathfrak{A}$ (Nr. 25), und in welchem

$$\frac{\partial^2 x_q}{\partial u_1 \, \partial u_2} \qquad (q = 3, 4, \cdots n-1, n)$$

die cardinalen Ableitungen sind. Dass sich nun für jede der letzteren aus $\overline{D}$ und den daraus abgeleiteten Gleichungen nur je eine Darstellung in den parametrischen Grössen ergiebt, folgt wieder aus der Entstehungsweise der Relationen (10) und (12). Also ist $\overline{D}$ passiv, und da u. a. *alle* Ableitungen der Functionen x_1 und x_2 parametrisch sind, so verschwindet jedenfalls die Determinante

$$\frac{\partial x_1}{\partial u_1} \frac{\partial x_2}{\partial u_2} - \frac{\partial x_1}{\partial u_2} \frac{\partial x_2}{\partial u_1}$$

nicht vermöge D und der durch Differentiationen daraus folgenden Gleichungen, was zu zeigen war.

27. Schliesslich können wir also das Theorem aussprechen:

Damit für ein Pfaff'sches System m^{ter} Stufe in n Veränderlichen reducirte Formen mit $n-2$ Differentialelementen existiren, ist hinreichend, dass $\omega \geqq m-2$ sei, dass also die Congruenz $\mathfrak{C}$ mindestens $m-2$-fach unendlich viele Geraden enthalte.

Dieser Satz umfasst denjenigen der Nr. 25 als Specialfall; denn da es ∞^{2m-4} Gerade im R_{m-1} giebt, so haben K linear unabhängige Complexe mindestens ∞^{2m-4-K} Gerade gemein.

In allen Fällen, wo der obige Satz versagt, tritt die Schlussweise der Nr. 24 in Kraft, d. h. das Problem der Reduction des Systems $\mathfrak{A}$ auf $n-2$ Terme lässt sich zurückführen auf die analoge Frage, unter welchen Bedingungen das System S, dessen Stufe m' kleiner als m und dessen Variabelnzahl n' ist, reducirte Formen mit $n'-2$ Differentialelementen besitzt.

Wir dürfen sonach das Problem des § 1 für den Fall $\tau = n - 2$ als erledigt betrachten.

§ 7.

Lineare Complexe im R_5; Pfaff'sche Systeme sechster Stufe vom Charakter 2.

28. Um die bisher entwickelten Begriffe und Sätze für Pfaff'sche Systeme sechster Stufe verwerthen zu können, müssen wir vor allem auf die Geometrie der R_5-Complexe genauer eingehen.

Wir verstehen unter $\xi_1, \cdots \xi_6$ und ebenso unter $\eta_1, \cdots \eta_6$ etc. homogene Punktcoordinaten des R_5 und sprechen demnach von dem „Punkt ξ", dem „Punkt η" u. s. w. Mit μ_k bezeichnen wir wie früher eine k-fach ausgedehnte ebene Punktmannigfaltigkeit des R_5; eine μ_1 bezw. μ_4 heisst „Gerade" bezw. „Ebene". Jede μ_k ist durch Angabe von $k+1$ linear unabhängigen Punkten eindeutig bestimmt, z. B. eine μ_3 durch zwei sich nicht schneidende Gerade. Sind g, g' zwei solche Gerade, so gebrauchen wir für die sie verbindende μ_3 die Bezeichnung $\mu_3(g, g')$; ebenso bedeute $\mu_2(P, g)$ diejenige μ_2, die den Punkt P und die nicht durch ihn gehende Gerade g enthält, u. s. w.

Ein *„linearer Complex"* des R_5 ist durch eine bilineare Gleichung der Form

$$\sum_1^6{}^i \sum_1^6{}^k \alpha_{ik}\,\xi_i\,\eta_k = 0 \tag{1}$$

definirt; wir wollen diesen Complex mit α bezeichnen. Derselbe heisst *„allgemein"* *„einfach speciell"* oder *„zweifach speciell"*, je nachdem der Rang der alternirenden Matrix

$$\|\alpha_{ik}\| \qquad (i, k = 1, 2, \cdots 6) \tag{2}$$

gleich 6 oder 4 oder 2 ist.

29. Wir setzen α zunächst als allgemein voraus. Jedem Punkt η wird dann durch die Gleichung (1), worin die ξ laufende Coordinaten

bedeuten, eine durch ihn gehende Ebene „*zugewiesen*", und auch umgekehrt jeder Ebene $u_\xi = 0$ ein und nur ein auf ihr liegender Punkt η.

Ist h eine beliebige Gerade, so ist jedem ihrer Punkte P eine Ebene zugewiesen, und diese ∞^1 Ebenen enthalten dieselbe μ_3. Diese μ_3 und die Gerade h heissen „*conjugirt*"; h ist also der Ort der Punkte, die den ∞^1 durch die μ_3 gehenden Ebenen zugewiesen ist, und alle ∞^3 Ebenen, die bezw. den Punkten der μ_3 zugewiesen sind, gehen durch h.

Ist h keine Complexgerade, so schneidet sie die conjugirte μ_3 nicht. Gehört h dem Complex α an, so liegt sie auf der conjugirten μ_3.

Alle ∞^2 Gerade, die eine Complexgerade h treffen und auf der conjugirten μ_3 liegen, sind Complexgerade; eine μ_3, die einer Complexgeraden h conjugirt ist, wird also durch die Eigenschaft charakterisirt, dass die Determinante

$$(3) \qquad \begin{Vmatrix} \alpha_{ik} & u_i & v_i \\ u_k & 0 & 0 \\ v_k & 0 & 0 \end{Vmatrix} \qquad (i, k = 1, \cdots 6)$$

verschwindet, oder geometrisch zu reden, dass der gewöhnliche R_3-Complex, den die auf der μ_3 liegenden Geraden von α bilden, *speciell* ist; die Direktrix dieses speciellen Complexes ist die der μ_3 conjugirte Complexlinie h.

Eine *Complex*-μ_2 (Nr. 4) ist dadurch charakterisirt, dass alle auf ihr liegenden Geraden dem Complex α angehören. Jede μ_2, die eine Complexgerade h enthält, und in der dazu conjugirten μ_3 liegt, ist eine Complex-μ_2, und alle Complex-μ_2 werden so erhalten; es giebt deren ∞^6.

Alle Complex-μ_2, die auf einer Ebene Π liegen, gehen durch den Punkt, welcher der Ebene Π zugewiesen ist.

Ist π eine μ_2 des Complexes α, so ist jede der zweifach unendlich vielen durch π gehenden μ_3 einer und nur einer auf π liegenden Geraden conjugirt, so dass zwischen diesen ∞^2 Geraden und jenen ∞^2 Mannigfaltigkeiten μ_3 eine *projective Beziehung* obwaltet; und zwar gehört zu der $\mu_3(P, \pi)$ die Gerade, welche von der dem Punkte P zugewiesenen Ebene auf π ausgeschnitten wird.

30. In dieser und der folgenden Nummer wird α als einfach speciell vorausgesetzt. Die linearen Gleichungen

$$(4) \qquad \sum^k \alpha_{ik}\, \xi_k = 0 \qquad (i = 1, \cdots 6)$$

besitzen jetzt zwei Lösungssysteme ξ', ξ''; die Verbindungslinie g dieser Punkte heisst die *singuläre Gerade* von α. Jede Gerade, die g trifft, gehört dem Complex α an. Jede Ebene, die einem Punkt P mit den Coordinaten η durch die Gleichung (1) zugewiesen wird, enthält g, und jedem Punkte der $\mu_2(P, g)$ ist dieselbe Ebene zugewiesen.

Ist Π eine beliebige durch g gehende Ebene, π eine durch g gehende μ_2, so besteht zwischen den ∞^3 Ebenen Π und den ∞^3 Mannigfaltigkeiten π eine durchweg eineindeutige (projective) Beziehung, derart dass jede Ebene Π die ihr zugeordnete π enthält.

Trifft die Complexgerade h die g nicht, so genügen alle in der $\mu_3(g, h)$ liegenden Geraden dem Complex α; diese μ_3 ist also eine *Complex*-μ_3 von α, d. h. sind $u_\xi = v_\xi = 0$ ihre Definitionsgleichungen, so verschwinden in der Matrix (3) alle 6-reihigen Determinanten. Eine Complex-μ_3 existirt natürlich nur dann, wenn α (einfach oder zweifach) *speciell* ist.

Es giebt zwei Kategorien von Complex-μ_2: die einen, ∞^3 an Zahl, enthalten g; die andern sind identisch mit dem Inbegriff aller in einer Complex-μ_3 liegenden Mannigfaltigkeiten μ_2, und es giebt ihrer ∞^6. Durch jede Complexgerade h, die die Gerade g nicht schneidet, gehen einfach unendlich viele Complex-μ_2, die g in je einem Punkte treffen; schneidet h die g, so giebt es ∞^2 durch h gehende Complex-μ_2.

Jede Complex-μ_2 hat also mit g wenigstens einen Punkt gemein.

31. Es sei h eine Gerade, die dem einfach speciellen Complex α nicht angehört, m die Mannigfaltigkeit $\mu_3(g, h)$, endlich P, P' zwei auf h liegende Punkte. Dann schneiden sich die Ebenen Π, Π', die bezw. den Punkten P, P' durch die Gleichung (1) zugewiesen sind, in einer μ_3, die wir m' nennen. Diese letztere hat mit m *nur* die Gerade g gemein; denn schnitten sich m und m' nach einer μ_2, so müsste die letztere die Gerade h in einem Punkte Q treffen, also enthielten Π und Π' je zwei Punkte P, Q bezw. $P'Q$ der Geraden h, und diese wäre also eine Complexgerade.

Ist R ein beliebiger Punkt von m, so geht durch ihn eine Gerade, die h und g in je einem Punkte S, S' trifft. Da durch die Gleichung (1) den Punkten R und S dieselbe Ebene zugewiesen wird, so schliesst man: *alle* Ebenen, die bezw. den Punkten von m zugewiesen sind, gehen durch m'.

Die Mannigfaltigkeiten μ_3, die durch die singuläre Gerade eines einfach speciellen Complexes α gehen, sind also paarweise conjugirt, in dem Sinne dass jede Gerade von α, die eine von zwei conjugirten Mannigfaltigkeiten m, m' trifft, auch die andere schneidet. Je zwei conjugirte μ_3 haben nur die Gerade g gemein; eine Complex-μ_3 (und nur eine solche) ist sich selbst conjugirt.

32. Ist der Complex α zweifach speciell, so besitzen die linearen Gleichungen (4) *vier* Lösungssysteme; die so definirte dreidimensionale Mannigfaltigkeit m nennen wir die „*singuläre* μ_3“ von α. Dieser Complex besteht jetzt aus allen ∞^7 Geraden, die die Mannigfaltigkeit m schneiden. Jede μ_2, die mit m mindestens eine Gerade gemein hat, ist eine Complex-μ_2 und umgekehrt. Jede μ_3, die m nach einer μ_2 schneidet, ist eine

Complex-μ_3 und umgekehrt. Ferner ist jede Ebene $u_\xi = 0$, die m enthält, eine *Complex*-μ_4, und umgekehrt, d. h. in der Matrix

$$\tag{5} \begin{Vmatrix} \alpha_{ik} & u_i \\ u_k & 0 \end{Vmatrix} \qquad (i, k = 1, \cdots 6)$$

sind alle vierreihigen Determinanten Null, und die Gleichung (1) kann in der Form

$$u_\xi v_\eta - u_\eta v_\xi = 0$$

geschrieben werden. Eine solche μ_4 kann natürlich nur dann existiren, wenn α zweifach speciell ist.

Die Ebene, die einem beliebigen Punkt $P(\eta_1, \cdots \eta_6)$ durch die Gleichung (1) zugewiesen wird, ist identisch mit der $\mu_4(P, m)$, und jedem Punkte der letzteren ist eben dieselbe μ_4 zugewiesen.

33. Wir wenden uns jetzt zur Theorie der zweigliedrigen Congruenzen des R_5 und der Pfaff'schen Systeme sechster Stufe vom Charakter 2. Das Pfaff'sche System

$$dx_{6+h} = \sum_1^6{}^i a_{ih} dx_i \qquad (h = 1, 2, \cdots n - 6)$$

nennen wir wieder $\mathfrak{A}$, und nehmen an, dass von den zugehörigen Bilinearformen:

$$\sum\sum \alpha_{ik1} \xi_i \eta_k, \quad \sum\sum \alpha_{ik2} \xi_i \eta_k, \cdots$$

die beiden ersten linear unabhängig, die übrigen aber Linearcombinationen dieser beiden sind. Doch wollen wir α_{ik} für α_{ik1} und β_{ik} für β_{ik2} schreiben, also die zu $\mathfrak{A}$ gehörige Schaar linearer Complexe in der Form:

$$\tag{$\mathfrak{C}$} \sum\sum (\lambda \alpha_{ik} + \mu \beta_{ik}) \xi_i \eta_k$$

zu Grunde legen. Es sei

$$\Omega = \Omega_{\alpha\alpha\alpha} \lambda^3 + \Omega_{\alpha\alpha\beta} \lambda^2 \mu + \Omega_{\alpha\beta\beta} \lambda \mu^2 + \Omega_{\beta\beta\beta} \mu^3$$

die binäre Form, deren Quadrat mit der alternirenden 6-reihigen Determinante

$$\tag{6} \| \lambda \alpha_{ik} + \mu \beta_{ik} \| \qquad (i, k = 1, \cdots 6)$$

identisch ist; ferner sei P die binäre quadratische Form, deren Quadrat der 8-reihigen alternirenden Determinante:

$$\tag{7} \begin{Vmatrix} \lambda \alpha_{ik} + \mu \beta_{ik}, & u_i, & v_i \\ u_k \quad , & 0, & 0 \\ v_k \quad , & 0, & 0 \end{Vmatrix} \qquad (i, k = 1, \cdots 6)$$

gleich ist; setzt man dann

$$P \equiv \sum \sum P_{ik} u_i v_k,$$

so haben die P_{ik} die Form:

$$P_{ik} \equiv \lambda^2 A_{ik} + \lambda\mu C_{ik} + \mu^2 B_{ik},$$

worin z. B. gesetzt ist:

$$A_{12} \equiv \alpha_{34}\alpha_{56} + \alpha_{35}\alpha_{64} + \alpha_{36}\alpha_{45},$$

$$C_{12} \equiv \sum \frac{\partial A_{12}}{\partial \alpha_{rs}} \beta_{rs} \text{ u. s. w.}$$

Die Theorie der Elementartheiler*) liefert nun zehn verschiedene Kategorien von zweigliedrigen Congruenzen $\mathfrak{C}$, die wir der Reihe nach mit I—X bezeichnen wollen, und es giebt ebensoviele Typen Pfaff'scher Gleichungen vom Charakter 2 und von der Stufe 6; jeder dieser Typen ist charakterisirt durch eine oder mehrere *rationale* Bedingungsgleichungen für die α_{ikh}, mit Ausnahme des „allgemeinen" Falles VII, in dem die α_{ikh} gar keinen Relationen unterworfen sind.

Mit $2r$ bezeichnen wir im Folgenden immer den Rang der Matrix (6).

Das Problem des § 1 wurde für den Fall $\tau = n - 2$ bereits in § 6 allgemein erledigt; da ferner die Annahme $\tau = n - 5$ nur für $2r = 2$ zulässig ist, und dieser Fall bereits in § 3 ausführlich behandelt wurde, so kommen für die nunmehr aufzuzählenden Typen Pfaff'scher Systeme nur noch $n - 3$- oder $n - 4$-gliedrige reducirte Formen in Frage.

Der Vollständigkeit halber stellen wir den Fall $2r = 2$ an die Spitze:

I. $2r = 2$; $\Omega \equiv P_{ik} \equiv 0$. Die Complexe α, β sind speciell; ihre singulären μ_3 schneiden sich in einer μ_2 und liegen in einer μ_4. Die Congruenz (α, β) besteht aus allen Geraden, die jene μ_2 schneiden oder in dieser μ_4 liegen.

34. Ist $2r = 4$, so besitzen die linearen Gleichungen

$$\sum^k \omega_k(\lambda\alpha_{ik} + \mu\beta_{ik}) = 0 \qquad (i = 1, \cdots 6)$$

zwei unabhängige Lösungssysteme ω_k und ω_k', bestehend aus binären Formen in λ, μ, die wir auf ihre Minimalgradzahlen n_1 und n_2 gebracht denken. Da nun die Gleichung:

$$6 = 2(n_1 + n_2) + 2 + 2k$$

stattfindet**), wo k den Grad des grössten gemeinsamen Divisors der Binärformen P_{ik} bedeutet, so ergeben sich für die Zahlen n_1, n_2, k folgende Möglichkeiten:

*) Vgl. meine Arbeit „Ueber Schaaren von Bilinearformen" Münch. Ber. XXVIII, p. 369 (1898).

**) a. a. O. p. 374.

$$0, 0, 2;\quad 0, 2, 0;\quad 0, 1, 1;\quad 1, 1, 0.$$

Die drei ersten Fälle betrachten wir unter II—IV, den letzten unter X.

II. $2r = 4$; $\Omega \equiv 0$; $n_1 = n_2 = 0$; die P_{ik} sind proportional. Das Pfaff'sche System $\mathfrak{A}$ gestattet zwei unabhängige infinitesimale Transformationen:

$$X^{(l)}f \equiv \sum^i \zeta_i^{(l)} A_i f \qquad (l = 1, 2),$$

lässt sich also auf eine Form $\mathfrak{A}'$ mit nur $n - 2$ Variabeln reduciren (Nr. 8). Die ∞^1 einfach speciellen Complexe der Congruenz $\mathfrak{C}$ haben alle ihre singuläre Gerade g gemein; diese ist die Verbindungslinie der Punkte $\zeta^{(1)}$ und $\zeta^{(2)}$. Es giebt in der Schaar $\mathfrak{C}$ zwei zweifach specielle Complexe, deren singuläre Mannigfaltigkeiten m und m' hinsichtlich jedes in $\mathfrak{C}$ enthaltenen einfach speciellen Complexes conjugirt sind (Nr. 31) und nur dann coincidiren, wenn m eine Congruenz-μ_3 *eines* und folglich *aller* Complexe der Schaar $\mathfrak{C}$ ist. Wir wollen die Annahme, dass die beiden zweifach speciellen Complexe der Schaar verschieden sind, als den Fall II a, den andern als den Fall II b unterscheiden.

Es giebt zweifach unendlich viele Congruenz-μ_3, die alle die Gerade g enthalten, und zwar geht durch jede Congruenzgerade h, die g nicht trifft, *eine* Congruenz-μ_3 hindurch, nämlich die $\mu_3(g, h)$. Nach Nr. 8 erhält man also für $\mathfrak{A}$ die allgemeinste reducirte Form mit $n - 4$ Termen, wenn man das System $\mathfrak{A}'$, das die Stufe 4 und den Charakter 2 besitzt, in allgemeinster Weise auf $n - 4$ Terme bringt, was nach § 6 stets möglich ist*), und man erkennt leicht, dass durch jede Integral-M_2 von $\mathfrak{A}$ eine und im allgemeinen nur eine Integral-M_4 hindurchgeht; diese letztere wird erzeugt von ∞^2 zweidimensionalen Charakteristiken des vollständigen Systems $X_1 f = 0$, $X_2 f = 0$. Die allgemeinste Darstellung mit $n - 3$ Differentialelementen wird gewonnen, indem man zu $\mathfrak{A}$ eine beliebige exakte Gleichung $d\varphi = 0$ hinzufügt, und das so entstehende Pfaff'sche System, das die Stufe 5 besitzt und offenbar ebenfalls zwei infinitesimale Transformationen zulässt, zunächst auf eine Form mit $n - 2$ Variabeln bringt, und für diese dann die allgemeinste n — 3-gliedrige Darstellung ermittelt, was nach Nr. 1 Anm. eine triviale Aufgabe ist.

III. $2r = 4$; $n_1 = 0$, $n_2 = 2$; $\Omega \equiv 0$, die P_{ik} sind ohne gemeinschaftlichen Divisor.

Das System $\mathfrak{A}$ gestattet eine infinitesimale Transformation:

$$(8)\qquad Xf \equiv \sum \zeta_i A_i f,$$

besitzt also eine Form $\mathfrak{A}'$ mit $n - 1$ Veränderlichen. Es giebt in der

---

*) Vgl. „I", pag. 288 f.

Congruenz (α, β) nur einfach specielle Complexe; die ∞^1 singulären Geraden $g, g', \cdots$ derselben liegen in einer μ_3, die wir M nennen, und bilden einen allgemeinen Kegel zweiten Grades mit der Spitze $P(\xi_1, \cdots \xi_6)$. Der Beweis für diese Behauptung wird am einfachsten geführt, indem man die Schnittfigur betrachtet, die unsere Congruenz $\mathfrak{C}$ auf einer beliebigen, nicht durch P gehenden vierdimensionalen ebenen Mannigfaltigkeit R_4 bestimmt. Diese Schnittfigur ist eine allgemeine R_4-Congruenz, und der Ort der singulären Punkte der letzteren, d. h. also die Schnittcurve des R_4 mit dem Ort der singulären Geraden $g, g', \cdots$ ist ein nichtzerfallender Kegelschnitt*).

Es giebt nur *eine* μ_3, die der Congruenz $\mathfrak{C}$ genügt, nämlich M, also nach Nr. 6 höchstens *eine* reducirte Form mit $n - 4$ Termen.

Da nach Nr. 30 jede Congruenz-μ_2 die singulären Geraden *aller* Complexe von $\mathfrak{C}$ treffen muss, so giebt es zwei Kategorien von Congruenz-μ_2: einmal die ∞^3 in M liegenden, sodann weitere ∞^4 durch P gehende, und dementsprechend unter Umständen zwei verschiedene Classen von $n-3$-gliedrigen reducirten Formen, bezw. von Integral-M_3 des Pfaff'schen Systems $\mathfrak{A}$. Ist M durch die Gleichungen $u_\xi = v_\xi = 0$ definirt, so werden die reducirten Formen der ersten Kategorie erhalten, indem man das Pfaff'sche System:

$$(9) \qquad dx_{6+h} = \sum a_{ih} dx_i; \; u_{dx} = 0, \; v_{dx} = 0,$$

dessen Stufe 4 und dessen Charakter $\leqq 2$**) ist, auf $n - 3$ Terme reducirt, was nur unter Hinzutritt weiterer Bedingungsgleichungen***) möglich ist. Die reducirten Formen der zweiten Kategorie existiren dagegen immer und werden erhalten, indem man $\mathfrak{A}'$, also ein System 5^{ter} Stufe vom Charakter 2 mit $n - 1$ Variabeln, in allgemeinster Weise auf $n - 3$ Terme bringt, was nach § 6 stets möglich ist. Aus der Thatsache, dass jede nicht durch P gehende Gerade h der Congruenz $\mathfrak{C}$ auf einer und nur einer Congruenz-μ_2 der zweiten Kategorie, nämlich auf der $\mu_2(h, P)$ gelegen ist, schliesst man ferner, dass durch eine Integral-M_2 von $\mathfrak{A}$ eine und nur eine Integral-M_3 der zweiten Art hindurchgeht, die von ∞^2 charakteristischen Curven der partiellen Differentialgleichung $Xf = 0$ erzeugt wird.

IV. $2r = 4$; $n_1 = 0$, $n_2 = 1$; $\Omega \equiv 0$, die P_{ik} haben einen Linearfactor gemein; das System $\mathfrak{A}$ gestattet wiederum eine infinitesimale Transformation (8).

---

*) „II" pag. 399 ff.

**) Vgl. die Schlussbemerkung der Nr. 20; das System gestattet übrigens gleichfalls die inf. Transf. Xf.

***) „I" pag. 285—288.

Die singulären Geraden der ∞^1 in $\mathfrak{C}$ enthaltenen einfach speciellen Complexe haben einen Punkt $P(\xi_1, \cdots \xi_6)$ gemein; sie liegen alle in einer μ_2, die wir π nennen, und bilden ein Strahlbüschel mit dem Centrum P. Die Complexschaar $\mathfrak{C}$ enthält ferner einen und nur einen zweifach speciellen Complex, dessen singuläre Mannigfaltigkeit m mit π eine durch P gehende Gerade gemein hat; m und π liegen also in derselben Ebene M.

In der That, es sei R_4 eine beliebige Ebene des R_5, die weder eine der ∞^1 singulären Geraden noch m enthält, also m nach einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit ω schneidet. Die im R_4 gelegenen Geraden eines beliebigen Complexes der Schaar bilden dann einen *allgemeinen* R_4-Complex, dessen singulärer Punkt auf der singulären Geraden des ersteren liegt, und wir erhalten so im R_4 eine Schaar von ∞^1 allgemeinen Complexen, die einen und nur einen speciellen Complex mit der singulären Mannigfaltigkeit ω enthält; die singulären Punkte jener allgemeinen Complexe erfüllen also*) eine Gerade l, die mit ω einen Punkt gemein hat. Die ∞^1 singulären Geraden der Complexschaar $\mathfrak{C}$ schneiden sonach den R_4 in den Punkten einer Geraden, die m trifft, und da R_4 beliebig gewählt war, so folgt die Richtigkeit unserer Behauptungen ohne weiteres.

Es sei hervorgehoben, dass die Ebene M und die Mannigfaltigkeit π hinsichtlich eines beliebigen einfach speciellen Complexes der Schaar einander im Sinne von Nr. 30 zugeordnet sind.

Da eine μ_3 der Congruenz $\mathfrak{C}$ die singulären Geraden aller Complexe der Schaar enthält (Nr. 30) und die Mannigfaltigkeit m nach einer μ_2 schneiden muss (Nr. 31), so folgt: *Es giebt einfach unendlich viele Congruenz-μ_3, die alle in M liegen und durch π gehen.* Nach Nr. 7 ist also die Herstellung der allgemeinsten reducirten Form mit $n-4$ Termen zurückgeführt auf das analoge Problem für das Pfaff'sche Sytem 5[ter] Stufe**):

$$(10) \qquad dx_{6+h} = \sum_1^6 {}^i a_{ih}\, dx_i; \quad u_{dx} = 0$$

wenn $u_\xi = 0$ die Ebene M definirt. Dieses System besitzt, wie man leicht einsieht, einen Charakter $\leqq 2$ und gestattet ebenso wie $\mathfrak{A}$ die infinitesimale Transformation Xf. Damit es auf $n-4$ Terme reducirbar sei, haben die u_i und ihre nach den x genommenen Ableitungen noch gewisse weitere Bedingungsgleichungen zu erfüllen***).

Es giebt zwei Kategorien von Congruenz-μ_2, und zwar ∞^4 in M liegende, deren jede mit π je eine Gerade gemein hat, und ebenso ∞^4

*) „II", pag. 400 ff.

**) „II", pag. 415 ff.

***) „II", pag. 417 f.

durch P gehende, von denen je eine auf einer beliebig gegebenen Congruenzgeraden gelegen ist. Dementsprechend giebt es zwei Classen von reducirten Formen mit $n-3$ Termen: die der ersten werden gefunden, indem man das Pfaff'sche System (10) auf $n-3$ Terme reducirt, was nach § 6 stets und zwar auf unendlich viele Arten möglich ist, da ja die Gleichungen (8) nach dem Obigen auf eine Form mit $n-1$ Veränderlichen, d. h. auf ein System 4ter Stufe mit einem Charakter $\leqq 2$ gebracht werden können. Für die reducirten Formen der zweiten Kategorie gelten dieselben Bemerkungen wie im Falle III.

35. Die Typen V—IX entsprechen der Annahme $2r=6$; die Congruenz $\mathfrak{C}$ besitzt in diesen Fällen überhaupt keine Congruenz-μ_3; d. h. es kommen für die Pfaff'schen Systeme dieser Kategorien überhaupt nur Darstellungen mit $n-3$ Differentialelementen in Betracht.

V. Die cubische Form Ω enthält einen einfach und einen doppelt zählenden Factor, welch' letzterer in allen Formen P_{ik} einfach zählend aufgeht.

VI. Die cubische Form Ω enthält einen dreifach zählenden Factor, der einfach zählend in allen P_{ik} aufgeht.

Im Falle V giebt es in der Congruenz $(\alpha\beta)$ einen einzigen zweifach speciellen Complex α' mit der singulären Mannigfaltigkeit m, und einen einzigen einfach speciellen Complex β' mit der singulären Geraden g, derart dass g und m sich nicht schneiden. Ist α ein allgemeiner Complex der Schaar $(\alpha\beta)$, so sind g und m hinsichtlich α conjugirt (Nr. 29), da jede Gerade, die g und m schneidet, in α enthalten ist. Daraus folgt leicht:

Man erhält das allgemeinste Complexpaar $(\alpha\beta)$ vom Typus V, indem man den allgemeinen Complex α und eine dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit m beliebig wählt, doch so, dass m keiner Geraden des Complexes α conjugirt ist, und dann unter β den zweifach speciellen Complex mit der singulären Mannigfaltigkeit m versteht. Die zu m innerhalb α conjugirte Gerade g ist die singuläre Gerade des einzigen in der Congruenz $(\alpha\beta)$ enthaltenen einfach speciellen Complexes.

Man erhält die allgemeinste Configuration VI, wenn man im Vorigen unter m eine solche μ_3 versteht, die einer (auf ihr liegenden) Geraden g des Complexes α conjugirt ist.

In beiden Fällen giebt es vierfach unendlich viele Congruenz-μ_2; von diesen geht je eine und nur eine durch jede beliebige Congruenzgerade, die weder g trifft noch in m liegt.

Denn ist h eine Congruenzgerade, so liegt sie entweder in m, und alle einfach unendlich vielen durch sie gehenden und in der $\mu_3(gh)$ liegenden Mannigfaltigkeiten μ_2 sind Congruenz-μ_2 (Nr. 31 und 32); oder sie schneidet die Mannigfaltigkeit m in einem Punkte P. Bedeutet nun

m' diejenige μ_3, die der Geraden h hinsichtlich des allgemeinen Complexes α conjugirt ist (Nr. 29), so schneiden sich m und m' entweder in einer ebenfalls durch P gehenden Gerade h', und es ist dann die $\mu_2(h, h')$ die einzige durch h gehende Congruenz-μ_2; oder m und m' haben eine μ_2 gemein; liegen also in derselben Ebene Π. Dieser letzteren ist dann durch den Complex α ein auf ihr liegender Punkt P' zugewiesen, der auf der vorhin definirten Geraden g (Nr. 29), andererseits aber auch auf h liegt, da ja Π durch m' hindurchgeht. Also schneidet h die g, und es giebt dann einfach unendlichviele durch sie gehende Congruenz-μ_2, nämlich alle diejenigen μ_2, die durch h gehen und in m' liegen.

Liegt h in m, und schneidet sie g (was nur im Fall VI möglich ist), so gehen durch h, wie aus Nr. 30 leicht folgt, ∞^2 Congruenz-μ_2.

36. Der soeben bewiesene Satz gestattet noch eine andere Formulirung: Bilden wir für ein Pfaff'sches System vom Typus V oder VI das Differentialsystem $\mathfrak{D}$:

$$\text{(10a)} \qquad \frac{\partial x_{6+h}}{\partial u_s} = \sum_1^6{}_i\, a_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial u_s} \qquad (h = 1, 2, \cdots n-6);$$

$$\text{(10b)} \qquad \Delta^h_{st} \equiv \sum\sum a_{ikh} \frac{\partial x_i}{\partial u_s}\frac{\partial x_k}{\partial u_t} = 0$$

$$(h = 1, 2;\ s, t = 1, 2, 3),$$

so besitzen die vier linearen Gleichungen mit den sechs Unbekannten $\dfrac{\partial x_i}{\partial u_3}$:

$$\text{(11)} \qquad \Delta^1_{13} = 0,\ \Delta^1_{23} = 0,\ \Delta^2_{13} = 0,\ \Delta^2_{23} = 0$$

drei linear unabhängige Lösungensysteme, sobald die zwölf Grössen $\dfrac{\partial x_i}{\partial u_1}, \dfrac{\partial x_i}{\partial u_2}$ den beiden Relationen $\Delta^1_{12} = 0$, $\Delta^2_{12} = 0$ genügen, reduciren sich also auf nur drei linear unabhängige Gleichungen. Wir dürfen daher die Relation $\Delta^2_{23} = 0$ als eine Folge der fünf übrigen Gleichungen $\Delta^h_{st} = 0$ betrachten und können uns diese letzteren nach den Ableitungen

$$\frac{\partial x_5}{\partial u_2},\ \frac{\partial x_6}{\partial u_2},\ \frac{\partial x_4}{\partial u_3},\ \frac{\partial x_5}{\partial u_3},\ \frac{\partial x_6}{\partial u_3}$$

aufgelöst denken; fügt man diese aufgelöste Form, die wir $\mathfrak{D}''$ nennen, den Relationen (10a) bei, so entsteht ein mit $\mathfrak{D}$ äquivalentes canonisches System $\mathfrak{D}'$, dessen cardinale Ableitungen die folgenden sind:

$$\text{a)} \quad \frac{\partial^2 x_{6+h}}{\partial u_s \partial u_t} \quad \left(h = 1, \cdots n-6;\ s, t = 1, 2, 3, s \gtrless t\right),$$

$$\text{b)} \quad \frac{\partial^2 x_5}{\partial u_2 \partial u_3};\ \frac{\partial^2 x_6}{\partial u_2 \partial u_3}.$$

Dass für jede Ableitung der Form a) aus $\mathfrak{D}'$ nur je eine Darstellung in

den parametrischen Grössen folgt, schliesst man aus der Entstehungsweise der Relationen (10b). Ferner bestehen die beiden Jacobi'schen Identitäten:

$$\frac{\partial \Delta_{12}^h}{\partial u_3} + \frac{\partial \Delta_{23}^h}{\partial u_1} + \frac{\partial \Delta_{31}^h}{\partial u_2} = 0 \qquad (h = 1, 2),$$

welche zur Folge haben, dass auch zwischen den Gleichungen, die aus $\mathfrak{D}''$ durch je einmalige Derivation nach u_1, u_2, u_3 hervorgehen, zwei lineare Identitäten stattfinden*), und dies kann offenbar nur dadurch eintreten, dass sich aus $\mathfrak{D}''$ für jede der beiden Ableitungen b) je zwei *übereinstimmende* Darstellungen in den parametrischen Grössen allein ergeben.

Also ist das System $\mathfrak{D}'$ *passiv*, und die Betrachtung seiner parametrischen Ableitungen zeigt, dass durch eine beliebige Integral-M_2 des Pfaff'schen Systems $\mathfrak{A}$ eine und im allgemeinen auch nur**) eine Integral-M_3 hindurchgeht.

Die Sätze, die wir für das Differentialsystem $\mathfrak{D}$ aufgestellt haben, besitzen auch in den Fällen III und IV unveränderte Geltung, da ja auch für diese Typen jede Congruenzgerade auf mindestens *einer* und im allgemeinen auch nur auf *einer* Congruenz-μ_2 gelegen ist. Da ferner, wie wir sehen werden, für die noch übrigen Kategorien VII—X blos ∞^3 Congruenz-μ_2 existiren, also nicht durch *jede* der ∞^6 Congruenzgeraden *eine* solche μ_2 hindurchgehen kann, so dürfen wir aus den bisherigen Resultaten dieses Paragraphen schliessen:

Damit durch jede Integral-M_2 eines Pfaff'schen Systems sechster Stufe vom Charakter zwei mindestens eine Integral-M_3 hindurchgehe, ist nothwendig und hinreichend, dass einer der Fälle I—VI stattfinde, dass also entweder das Pfaff'sche System $\mathfrak{A}$ eine infinitesimale Transformation gestatte, oder die binären Formen P_{ik} einen Linearfactor gemein haben.

37. Die Typen VII—X wollen wir zunächst geometrisch charakterisiren.

VII. Der „allgemeine" Fall: die cubische Form Ω enthält drei verschiedene Linearfactoren.

In der Congruenz $\mathfrak{C}$ giebt es drei einfach specielle Complexe; von den singulären Geraden g_1, g_2, g_3 der letzteren schneidet keine die μ_3, auf der die beiden andern liegen***). Bezeichnen wir also mit m_1, m_2, m_3 bezw. die drei Mannigfaltigkeiten:

$$\mu_3(g_2\, g_3), \quad \mu_3(g_3\, g_1), \quad \mu_3(g_1\, g_2),$$

so haben m_1 und m_2 nur die Gerade g_3 gemein u. s. w.

---

*) Für die genauere Darlegung des Beweises vgl. „III", pag. 202.

**) „III", pag. 203.

***) „III", pag. 193.

Alle Geraden, die zwei der Geraden g_i treffen, sind Congruenzgerade; also bilden die auf m_3 liegenden Geraden der Congruenz $\mathfrak{C}$ eine allgemeine R_3-Congruenz mit den beiden Directricen g_1 und g_2, und analoges gilt für m_1 und m_2. Dass in der That auf m_3 keine anderen Geraden von $\mathfrak{C}$ liegen als die angegebenen, sieht man so ein:

Es seien α, β die beiden einfach speciellen Complexe mit den singulären Geraden g_1 und g_2; dann hat man in der in Nr. 33 eingeführten Bezeichnungsweise:

$$\Omega_{\alpha\alpha\alpha} = 0, \quad \Omega_{\beta\beta\beta} = 0.$$

Nun ist m_3 keine Complex-μ_3 von α, da sonst $\Omega_{\alpha\beta\beta} = 0$ wäre, mithin Ω einen doppelt zählenden Factor besässe. Also sind nur diejenigen Geraden in m_3, welche die Gerade g_1 treffen, Cmplexgerade von α, und analoges gilt für β, womit unsere Behauptung erwiesen ist.

Jede μ_2, die mit den drei Geraden g_i je einen Punkt gemein hat, ist eine Congruenz-μ_2, und nach Nr. 30 giebt es keine andern; es existiren demnach dreifach unendlich viele Congruenz-μ_2, welche durch die Formeln:

$$\sum \mu_i^{(s)} \xi_i + \varrho_s \sum \nu_i^{(s)} \xi_i = 0 \qquad (s = 1, 2, 3) \tag{12}$$

definirt werden; darin bedeuten ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 willkürliche Parameter, und die Gleichungen

$$\sum \mu_i^{(s)} \xi_i = 0, \qquad \sum \nu_i^{(s)} \xi_i = 0$$

definiren die Mannigfaltigkeit m_s.

Durch jeden Punkt P, der auf keiner Mannigfaltigkeit m_s liegt, geht *eine*, durch jeden Punkt einer der Mannigfaltigkeiten m_s gehen ∞^1, durch jeden Punkt einer der Geraden g_i zweifach unendlich viele Congruenz-μ_2 hindurch.

Sind $\alpha' \beta' \gamma'$ die drei zweifach speciellen Complexe mit den singulären Mannigfaltigkeiten m_1, m_2, m_3, so genügen alle ∞^3 Congruenz-μ_2 auch der dreigliedrigen Congruenz $(\alpha' \beta' \gamma')$. Setzen wir:

$$\Omega'^2 \equiv | \lambda \alpha'_{ik} + \mu \beta'_{ik} + \nu \gamma'_{ik} | \qquad (i, k = 1, \cdots 6);$$

$$Q^2 \equiv \begin{vmatrix} \lambda \alpha'_{ik} + \mu \beta'_{ik} + \nu \gamma'_{ik}, & u_i, & v_i \\ u_k & 0 & 0 \\ v_k & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad (i, k = 1, \cdots 6);$$

$$Q \equiv \sum \sum Q_{ik} u_i v_k,$$

so haben die ternären Formen Ω', Q_{ik} folgende Gestalt:

$$\Omega' \equiv c \cdot \lambda \mu \nu,$$

$$Q_{ik} \equiv \varrho_{ik} \cdot \mu \nu + \sigma_{ik} \cdot \nu \lambda + \tau_{ik} \cdot \lambda \mu.$$

Umgekehrt, haben die Ω', Q_{ik} diese Form, so sind die Complexe α', β', γ' zweifach speciell, und je zwei ihrer singulären Mannigfaltigkeiten schneiden sich nach je einer Geraden. Eine solche Congruenz nennen wir *„ein verkettetes Tripel erster Art“*. Damit also drei Complexe α, β, γ ein solches Tripel bilden, ist nothwendig und hinreichend, dass die ternäre cubische Form Φ, die durch die Identität:

$$(13) \qquad \Phi^2 \equiv |\,\lambda\alpha_{ik} + \mu\beta_{ik} + \nu\gamma_{ik}\,| \qquad (i, k = 1, \cdots 6)$$

definirt ist, in drei linear unabhängige Linearfactoren zerfalle, und dass in dem Schema (13) alle vierreihigen Hauptunterdeterminanten verschwinden, wenn man irgend zwei jener Linearfactoren Null setzt.

VIII. Ω zerfällt in einen doppelt zählenden und einen einfachen Linearfactor, die P_{ik} sind theilerfremd.

Es sei α bezw. β der einfach bezw. doppelt zählende einfach specielle Complex der Schaar $\mathfrak{C}$, g, h seien ihre singulären Geraden, m die $\mu_3(g, h)$. Dann verschwinden $\Omega_{\alpha\alpha\alpha}$ und $\Omega_{\beta\beta\beta}$, und damit auch $\Omega_{\alpha\beta\beta} = 0$ sei, muss h eine Complexgerade von α sein; dagegen darf g nicht dem Complexe β angehören, d. h. die m ist keine Congruenz-μ_3 von β, also innerhalb β zu einer Mannigfaltigkeit m' conjugirt, die mit m nur die Gerade h gemein hat (Nr. 31).

Nun muss jede Congruenz-μ_2 mit h und g je einen Punkt P bezw. P' gemein haben; die Lage dieser Punkte auf h bezw. g denken wir uns durch die Parameter ϱ_1 und ϱ_2 fixirt. Die den Punkten P durch den Complex α zugewiesenen Ebenen Π gehen alle durch m und werden also durch die Gleichung:

$$(14) \qquad \mu_\xi + \varrho_1 \nu_\xi = 0$$

dargestellt, wobei

$$(15) \qquad \mu_\xi = 0, \quad \nu_\xi = 0$$

die Definitionsgleichungen der Mannigfaltigkeit m bedeuten. Die den Punkten P' innerhalb β zugewiesenen Ebenen gehen durch m' und sind durch die Formel:

$$(16) \qquad \mu_\xi' + \varrho_2 \nu_\xi' = 0$$

gegeben, wobei die Gleichungen $\mu_\xi' = \nu_\xi' = 0$ die Mannigfaltigkeit m' definiren. Es sei ferner m'' eine beliebige μ_3, die mit m nur die Gerade g, also mit h keinen Punkt gemein hat; dann ist die Verbindungsebene von m'' und P durch eine Gleichung der Form

$$(17) \qquad \mu_\xi'' + \varrho_1 \nu_\xi'' = 0$$

dargestellt, wobei die Relationen $\mu_\xi'' = 0$, $\nu_\xi'' = 0$ die Mannigfaltigkeit m'' definiren. Die Formeln (15), (16), (17) stellen zusammen die Verbindungslinie der Punkte P, P' dar, und die allgemeinste μ_2, welche diese

letztere enthält und in der durch (14), (16) dargestellten μ_3 liegt, d. h. also *die allgemeinste Congruenz-μ_2 von $\mathfrak{C}$ hat die Definitionsgleichungen:*

$$(18)\qquad \begin{cases} \mu_\xi + \varrho_1 \nu_\xi = 0, \quad \mu_\xi' + \varrho_2 \nu_\xi' = 0, \\ \mu_\xi'' + \varrho_1 \nu_\xi'' + \varrho_3 \nu_\xi = 0, \end{cases}$$

worin ϱ_3 einen neuen Parameter und die μ, ν *rationale* Functionen der α_{ik}, β_{ik}, d. h. also der Grössen α_{ikh} bedeuten.

Alle diese ∞^3 Congruenz-μ_2 erfüllen auch die dreigliedrige Congruenz $(\alpha\beta'\gamma')$, wenn β' und γ' die zweifach speciellen Complexe mit den singulären Mannigfaltigkeiten m und m' bezeichnen. Setzt man

$$\Omega'^2 \equiv |\lambda \alpha_{ik} + \mu \beta_{ik}' + \nu \gamma_{ik}'| \qquad (i, k = 1, \cdots 6),$$

und haben die Q_{ik} die analoge Bedeutung wie oben, so findet man, dass Ω' die Form $c \cdot \lambda \nu^2$ besitzt, dass die ternären quadratischen Formen Q_{ik} vermöge $\lambda = 0$, $\mu = 0$ und ebenso vermöge $\lambda = 0$, $\nu = 0$ alle verschwinden, ferner vermöge $\nu = 0$ mit λ^2, und vermöge $\lambda = 0$ mit $\mu\nu$ proportional werden, da ja die Congruenz $(\alpha\beta')$ dem Typus IIb, die Congruenz $(\beta'\gamma')$ dem Typus IIa angehört; also haben die Q_{ik} die Form:

$$Q_{ik} \equiv \varrho_{ik}\lambda^2 + \sigma_{ik}\lambda\nu + \tau_{ik}\mu\nu.$$

Eine dreigliedrige Complexschaar

$$(19)\qquad \sum\sum (\lambda_1 \alpha_{ik} + \lambda_2 \beta_{ik} + \lambda_3 \gamma_{ik}) \xi_i \eta_k,$$

die durch lineare Transformation der λ_i auf die soeben charakterisirte Form $(\alpha\beta'\gamma')$ gebracht werden kann, nennen wir ein *„verkettetes Tripel zweiter Art.“*

Die ∞^1 Ebenen (14) schneiden aus m' ein μ_2-Büschel mit der Axe h aus, das den Punkten von h projectiv zugeordnet ist; man kann sich also die Configuration VIII aus VII dadurch entstanden denken, dass man g, h statt g_1, g_2 schreibt und die Gerade g_3 von h unendlich wenig verschieden annimmt, doch so, dass sie die h nicht schneidet, sondern mit ihr eine dreidimensionale lineare Mannigfaltigkeit m' bestimmt.

IX. Ω ist ein vollständiger Cubus, die P_{ik} sind theilerfremd.

Es sei α ein allgemeiner, β der einzige einfach specielle Complex der Schaar $\mathfrak{C}$, g dessen singuläre Gerade, die wegen $\Omega_{\alpha\beta\beta} = 0$ dem Complex α angehört, endlich m diejenige durch g gehende μ_3, die hinsichtlich α der Geraden g conjugirt ist. *Dann ist m eine Complex-μ_3 von β; und umgekehrt, sind alle genannten Bedingungen erfüllt, so gehört die Congruenz (α, β) dem Typus IX an.* Wäre nämlich die Mannigfaltigkeit m keine Complex-μ_3 von β, so besässe sie eine von ihr verschiedene conjugirte Mannigfaltigkeit m', und wir kämen auf den Fall VIII zurück.

Durch eine ganz ähnliche Ueberlegung wie vorhin gelangt man zu

dem Resultat: *die dreifach unendlich vielen Congruenz-μ_2 werden gegeben durch die Formeln:*

$$(20)\qquad \begin{cases} \mu_\xi + \varrho_1 \nu_\xi = 0, \\ \mu_\xi' + \varrho_1 \nu_\xi' + \varrho_2 \nu_\xi = 0, \\ \mu_\xi'' + \varrho_1 \nu_\xi'' + \varrho_2 \nu_\xi' + \varrho_3 \nu_\xi = 0, \end{cases}$$

worin unter den $\mu, \nu, \mu', \cdots$ gewisse rationale Functionen der α_{ikh}, und unter den ϱ_i willkürliche Parameter zu verstehen sind. Dabei definiren die Gleichungen $\mu_\xi = 0$, $\nu_\xi = 0$ die oben genannte Mannigfaltigkeit m, ferner stellen die Gleichungen

$$\mu_\xi' + \varrho_1 \nu_\xi' = 0, \quad \mu_\xi = 0, \quad \nu_\xi = 0$$

das μ_2-Büschel mit der Axe g vor, das in m liegt und dem Ebenenbüschel $\mu_\xi + \varrho_1 \nu_\xi = 0$ projectiv zugeordnet ist; endlich bedeutet $\mu_\xi'' = 0$, $\nu_\xi'' = 0$ eine beliebige μ_3, die g nicht trifft.

Diese dreifach unendlich vielen Congruenz-μ_2 genügen alle auch der dreigliedrigen Congruenz $(\alpha\beta\gamma')$, wo γ' den zweifach speciellen Complex mit der singulären Mannigfaltigkeit m bedeutet. Haben die ternären Formen Ω', Q_{ik} analoge Bedeutung wie oben, so hat Ω' die Gestalt $c \cdot \lambda^3$, und die Q_{ik} werden vermöge $\lambda = 0$ mit μ^2 proportional, da ja die Congruenz (β, γ') augenscheinlich dem Typus IIb angehört.

Eine dreigliedrige Congruenz (19), die durch lineare Transformation der Parameter $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ auf die Form $(\alpha\beta\gamma')$ gebracht werden kann, nennen wir *ein verkettetes Tripel dritter Art.*

Man erhält die Configuration IX durch Grenzübergang aus VII, indem man die drei Geraden $g_1 g_2 g_3$ unendlich benachbart annimmt, doch so, dass keine zwei sich schneiden, und keine die μ_3 trifft, in der die zwei andern Geraden gelegen sind.

Auch bei dieser Configuration geht, wie in den Fällen VII und VIII, durch jeden Punkt des R_5 eine und im allgemeinen nur eine Congruenz-μ_2.

38. Wir betrachten schliesslich noch die Configuration:

X. $2r = 4$, $n_1 = n_2 = 1$ (vgl. Nr. 34).

Alle Complexe der Congruenz $(\alpha\beta)$ sind einfach speciell, ihre ∞^1 singulären Geraden liegen in einer μ_3, die M heissen möge, und bilden eine allgemeine Regelschaar F vom zweiten Grad.

Der Beweis dieser Behauptung ergiebt sich wie für den Fall III durch Betrachtung der Schnittfigur, die unsere Congruenz auf einem beliebigen R_4 bestimmt*).

M ist eine Complex-μ_3 sowohl von α als von β, mithin eine μ_3 der Congruenz $(\alpha\beta)$, also existirt nach Nr. 6 für das zugehörige Pfaff'sche System $\mathfrak{A}$ höchstens *eine* Darstellung mit $n - 4$ Termen.

*) „II", pag. 399f.

Es giebt zwei Kategorien von Congruenz-μ_2; jede derselben enthält ∞^3 Individuen. Die μ_2 der einen Kategorie liegen alle in M, die der zweiten werden folgendermassen gefunden.

Es sei F' die Leitschaar der Regelschaar F, und h eine Gerade von F'. Dann besteht zwischen den ∞^1 Geraden h und den ∞^1 Ebenen Π, die durch M gehen, eine projective Beziehung in folgendem Sinne: Jedem Punkte P einer Geraden h wird durch alle Complexe der Schaar $\mathfrak{C}$ dieselbe Ebene Π zugewiesen, und zwar ist Π von der Lage des Punktes P auf der Geraden h unabhängig, da ja h alle singulären Geraden der ∞^1 Complexe $\mathfrak{C}$ schneidet (Nr. 30). Umgekehrt, ist Π eine beliebige durch M gehende Ebene, so giebt es in der Regelschaar F' eine und nur eine Gerade h der genannten Eigenschaft. Durch h gehen also zweifach unendlich viele Congruenz-μ_2, die alle in der zugeordneten Ebene Π liegen.

Die Regelschaar F' ist durch vier Gleichungen der Form

$$\mu_\xi = 0, \quad \nu_\xi = 0, \quad \mu_\xi^{(i)} + \varrho_3 \nu_\xi^{(i)} = 0 \qquad (i = 1, 2) \tag{21}$$

gegeben, wovon die beiden ersten die Mannigfaltigkeit M definiren. Das dazu projective Büschel der Ebenen Π kann dann in der Gestalt

$$\mu_\xi + \varrho_3 \nu_\xi = 0 \tag{22}$$

geschrieben werden, und die allgemeinste μ_2, welche die Gerade (21) enthält und in der Ebene (22) gelegen ist, d. h. die allgemeinste Congruenz-μ_2 der zweiten Kategorie, wird durch die drei Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} &\mu_\xi^{(i)} + \varrho_3 \nu_\xi^{(i)} + \varrho_i \nu_\xi = 0, \qquad (i = 1, 2) \\ &\mu_\xi + \varrho_3 \nu_\xi \qquad\quad = 0 \end{aligned}\right. \tag{23}$$

dargestellt, worin $\varrho_1\, \varrho_2\, \varrho_3$ die drei Parameter, und $\mu_k^{(i)}$, μ_k, $\nu_k^{(i)}$, ν_k gewisse *rationale* Functionen der α_{ikh} bedeuten.

Durch jeden nicht auf M liegenden Punkt P geht eine und nur eine Congruenz-μ_2 zweiter Art; sie verbindet P mit der in F' enthaltenen Geraden h, die der Ebene (P, M) zugewiesen ist.

Diese ∞^3 Congruenzmannigfaltigkeiten genügen auch der dreigliedrigen Congruenz $(\alpha\beta\gamma')$, wenn unter γ' der zweifach specielle Complex mit der singulären Mannigfaltigkeit M verstanden wird. Bildet man wie im Fall VII die ternären Formen Ω' und Q_{ik}, so ist $\Omega' \equiv 0$, und da jede der beiden Congruenzen $(\beta\gamma')$ und $(\alpha\gamma')$ dem Typus IIb angehört, so werden die Q_{ik} vermöge $\lambda = 0$ mit μ^2 und vermöge $\mu = 0$ mit λ^2 proportional, haben also die Form

$$Q_{ik} = \varrho_{ik}\lambda^2 + \sigma_{ik}\mu^2 + \tau_{ik}\lambda\mu.$$

Eine dreigliedrige Congruenz (19), die durch lineare Transformation der λ_i auf diese Form gebracht werden kann, nennen wir *ein verkettetes Tripel vierter Art.*

39. Jede Congruenz $(\alpha\beta)$, die einem der Typen VII—X angehört, ist in einem und nur einem verketteten Tripel $(\alpha\beta\gamma)$ enthalten; das letztere besteht aus dem Inbegriff aller ∞^5 Geraden, die auf den ∞^3 Congruenz-μ_2 von $(\alpha\beta)$ gelegen sind.

Die Coefficienten des Complexes γ müssen sich rational durch die α_{ik}, β_{ik} ausdrücken lassen; dadurch gewinnen wir für die ∞^3 Congruenzmannigfaltigkeiten auch im Falle VII eine *rationale* Darstellung, während in den Formeln (12) die Coefficienten $\mu_k^{(i)}$, $\nu_k^{(i)}$ von den Wurzeln der cubischen Gleichung $\Omega = 0$ abhängen. Die gesuchte rationale Darstellung wird am einfachsten durch Heranziehung des Dualitätsprincips gefunden.

Unter einem „μ_3-Complex" verstehen wir den Inbegriff aller dreifach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten $u_\xi = 0$, $v_\xi = 0$, die der Gleichung

$$\sum\sum A_{ik} u_i v_k = 0 \qquad (A_{ik} \equiv -A_{ki}) \tag{24}$$

genügen; wir gebrauchen für dieses Gebilde den Buchstaben A; haben die A_{ik} die in Nr. 33 angegebene Bedeutung*), so nennen wir A den zu α „dualen Complex". Da die Relation (24) dann so geschrieben werden kann:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{ik}, & u_i, & v_i \\ u_k, & 0, & 0 \\ v_k, & 0, & 0 \end{vmatrix} = 0 \tag{25}$$

so ist eine μ_3 des dualen Complexes A durch die Eigenschaft charakterisirt, dass die auf ihr liegenden Geraden des Complexes α einen *speciellen* R_3-Complex bilden, oder auch, dass sie eine und infolgedessen unendlich viele Complex-μ_2 von α enthalte. In der That drückt ja das Verschwinden der Determinante (25) aus, dass die Bilinearform $\sum\sum \alpha_{ik}\xi_i\eta_k$ sich vermöge:

$$u_\xi = v_\xi = u_\eta = v_\eta = 0$$

auf eine Bilinearform mit vier Variabelnpaaren und *vom Range zwei* reducire.

Unter einer μ_2 des dualen Complexes A verstehen wir eine μ_2 der Eigenschaft, dass *alle* zweifach unendlich vielen durch sie gehenden μ_3 in A enthalten sind; *darnach sind die μ_2 des Complexes α mit den μ_2 des dazu dualen Complexes A identisch.*

Damit nun die Mannigfaltigkeit

$$u_\xi = 0, \quad v_\xi = 0 \tag{26}$$

eine gemeinsame μ_2 aller Complexe der Schaar (α, β), d. h. also eine

*) Es wird vorausgesetzt, dass die A_{ik} nicht alle verschwinden, also α nicht zweifach speciell ist.

Congruenz-μ_2 enthalte, ist nothwendig und hinreichend, dass die Determinante

$$\begin{Vmatrix} \lambda\alpha_{ik} + \mu\beta_{ik}, & u_i, & v_i \\ u_k \quad , & 0, & 0 \\ v_k \quad , & 0, & 0 \end{Vmatrix}$$

identisch verschwinde, dass also die Gleichungen

$$(27) \qquad \sum\sum A_{ik}u_iv_k = \sum\sum B_{ik}u_iv_k = \sum\sum C_{ik}u_iv_k = 0$$

bestehen (vgl. Nr. 33).

In der That, die auf der Mannigfaltigkeit (26) liegenden Geraden eines beliebigen Complexes der Schaar $(\alpha\beta)$ bilden einen gewöhnlichen R_3-Complex; und alle diese R_3-Complexe stellen zusammen ein lineares Büschel dar, das aus lauter speciellen Complexen besteht, wenn die Bedingungen (27) erfüllt sind. Die Directricen dieser speciellen Complexe bilden dann bekanntlich ein Strahlbüschel, das in einer μ_2 liegt, und da alle auf letzterer gelegenen Geraden der Congruenz $(\alpha\beta)$ genügen, so enthält die Mannigfaltigkeit (26), wenn die Gleichungen (27) stattfinden, in der That eine μ_2 der Congruenz $(\alpha\beta)$; die Nothwendigkeit dieser Bedingungen leuchtet darnach unmittelbar ein.

Das duale Gegenstück dieses Satzes lautet jetzt so:

Damit die Verbindungslinie der Punkte ξ, η auf einer gemeinsamen μ_2 der beiden zu α und β dualen Complexe A und B oder (was dasselbe besagt) der beiden Complexe α, β gelegen sei, ist nothwendig und hinreichend, dass die Determinante:

$$\begin{vmatrix} \lambda A_{ik} + \mu B_{ik}, & \xi_i, & \eta_i \\ \xi_k \quad , & 0, & 0 \\ \eta_k \quad , & 0, & 0 \end{vmatrix}$$

identisch Null sei, dass also die Relationen

$$(28) \qquad \sum\sum \alpha_{ik}\xi_i\eta_k = 0, \quad \sum\sum \beta_{ik}\xi_i\eta_k = 0, \quad \sum\sum \gamma_{ik}\xi_i\eta_k = 0$$

stattfinden, worin γ_{ik} aus C_{ik} dadurch entsteht, dass man α_{st} durch A_{st} und β_{st} durch B_{st} ersetzt.

Wenn die Congruenz $(\alpha\beta)$ einem der Typen VII—X angehört, so giebt es nur fünffach unendlich viele Geraden von der im Satze genannten Eigenschaft; sonach sind die drei Gleichungen (28) unabhängig *und definiren das verkettete Tripel, in dem die Congruenz $(\alpha\beta)$ enthalten ist.*

Damit also irgend drei Complexe $\alpha\beta\gamma$ ein verkettetes Tripel bilden, ist nothwendig und hinreichend, dass in der vierzeiligen Matrix:

$$\left\| \begin{matrix} \bar{\gamma}_{12}, & \bar{\gamma}_{13}, & \cdots & \bar{\gamma}_{46}, & \bar{\gamma}_{56} \\ \alpha_{12}, & \alpha_{13}, & \cdots & \alpha_{46}, & \alpha_{56} \\ \beta_{12}, & \beta_{13}, & \cdots & \beta_{46}, & \beta_{56} \\ \gamma_{12}, & \gamma_{13}, & \cdots & \gamma_{46}, & \gamma_{56} \end{matrix} \right\|,$$

worin die γ_{ik} die obige Bedeutung haben, alle vierreihigen Determinanten verschwinden; Voraussetzung dabei ist, dass die Congruenz $(\alpha\beta)$ einer der Kategorien VII—X angehört.

In allen diesen vier Fällen liefern die Gleichungen (28), wenn die ξ laufende Coordinaten bedeuten, die durch den Punkt η gehende μ_2 der Congruenz $(\alpha\beta)$, vorausgesetzt, dass η nicht eine der früher charakterisirten besonderen Lagen hat. Um eine von drei Parametern abhängende Darstellung aller Congruenz-μ_2 zu haben, kann man etwa $\eta_1 = 1$, $\eta_2 = \eta_3 = 0$ setzen und $\eta_4\, \eta_5\, \eta_6$ als willkürliche Parameter betrachten.

40.*) Für ein Pfaff'sches System $\mathfrak{A}$ vom Typus VII hat das Differentialsystem D (Nr. 19) die Form:

$$\frac{\partial x_{6+h}}{\partial u_{\mathfrak{a}}} = \sum_1^6{}^i\, a_{ih} \frac{\partial x_i}{\partial u_{\mathfrak{a}}} \qquad \begin{pmatrix} \mathfrak{a} = 1, 2, 3 \\ h = 1, \cdots n-6 \end{pmatrix} \tag{29}$$

$$\sum_1^6{}^i\, \mu_i^{(s)} \frac{\partial x_i}{\partial u_{\mathfrak{a}}} + \varrho_s \sum_1^6{}^i\, \nu_i^{(s)} \frac{\partial x_i}{\partial u_{\mathfrak{a}}} = 0 \tag{30}$$

$$(\mathfrak{a} = 1, 2, 3;\ s = 1, 2, 3).$$

Aus (30) folgt durch Differentiation und Subtraction:

$$\sum_1^6{}^i \sum_1^6{}^k \left(\mu_{ik}^{(s)} + \varrho_s\, \nu_{ik}^{(s)}\right) \frac{\partial x_i}{\partial u_{\mathfrak{a}}} \frac{\partial x_k}{\partial u_{\mathfrak{b}}} \tag{31}$$

$$+ \frac{\partial \varrho_s}{\partial u_{\mathfrak{b}}} \sum_1^6{}^i\, \nu_i^{(s)} \frac{\partial x_i}{\partial u_{\mathfrak{a}}} - \frac{\partial \varrho_s}{\partial u_{\mathfrak{a}}} \sum_1^6{}^i\, \nu_i^{(s)} \frac{\partial x_i}{\partial u_{\mathfrak{b}}} = 0,$$

worin gesetzt wurde:

$$\mu_{ik}^{(s)} \equiv A_i\, \mu_k^{(s)} - A_k\, \mu_i^{(s)}; \quad \nu_{ik}^{(s)} \equiv A_i\, \nu_k^{(s)} - A_k\, \nu_i^{(s)}.$$

Die Relationen (30) wollen wir in der Form

$$\frac{\partial x_{3+l}}{\partial u_{\mathfrak{a}}} = \sum_1^3{}^i\, b_{il} \frac{\partial x_i}{\partial u_{\mathfrak{a}}} \qquad (\mathfrak{a} = 1, 2, 3;\ l = 1, 2, 3) \tag{32}$$

---

*) Die Entwickelungen dieser und der vier nächsten Nummern entnehme ich meiner Arbeit „III" pag. 205 ff.

auflösen, und die erhaltenen Ausdrücke in (31) einsetzen; dann entstehen neun Gleichungen der Gestalt:

$$0=\sum_1^3{}^i\sum_1^3{}^k \mathsf{M}_{ik}^{(s)}\frac{\partial x_i}{\partial u_a}\frac{\partial x_k}{\partial u_b}+\frac{\partial \varrho_s}{\partial u_b}\sum_1^3{}^i\mathsf{N}_i^{(s)}\frac{\partial x_i}{\partial u_a}-\frac{\partial \varrho_s}{\partial u_a}\sum_1^3{}^i\mathsf{N}_i^{(s)}\frac{\partial x_i}{\partial u_b},$$

die wir zur Abkürzung folgendermassen schreiben:

(33) $$\Delta_{a,b}^{(s)}=0 \qquad (a,b=1,2,3;\ s=1,2,3).$$

Multipliciren wir nun die Ausdrücke

$$\Delta_{12}^{(s)},\ \Delta_{23}^{(s)},\ \Delta_{31}^{(s)}$$

beziehungsweise mit den nachstehenden:

$$\sum_1^3 \mathsf{N}_i^{(s)}\frac{\partial x_i}{\partial u_3};\quad \sum_1^3 \mathsf{N}_i^{(s)}\frac{\partial x_i}{\partial u_1};\quad \sum_1^3 \mathsf{N}_i^{(s)}\frac{\partial x_i}{\partial u_2},$$

und addiren, so kommt:

(G) $$\mathsf{M}_{12}^{(s)}\mathsf{N}_3^{(s)}+\mathsf{M}_{23}^{(s)}\mathsf{N}_1^{(s)}+\mathsf{M}_{31}^{(s)}\mathsf{N}_2^{(s)}=0, \qquad (s=1,2,3)$$

wenn wir die als Factor auftretende Functionaldeterminante von x_1, x_2, x_3 wegheben. Die linken Seiten dieser Gleichungen sind rationale Functionen der Grössen:

$$\mu_{ik}^{(s)},\ \nu_{ik}^{(s)},\ \mu_i^{(s)},\ \nu_i^{(s)},\ \varrho_1,\ \varrho_2,\ \varrho_3.$$

41. Es werde fortan vorausgesetzt, dass die Gleichungen (G) identisch, d. h. für jedes beliebige Werthsystem x, ϱ erfüllt sind. Dann ist für jedes s die Gleichung $\Delta_{12}^{(s)}=0$ eine Folge dieser beiden:

$$\Delta_{23}^{(s)}=0,\quad \Delta_{31}^{(s)}=0;$$

die letzteren denken wir uns nach $\frac{\partial \varrho_s}{\partial u_2}$, $\frac{\partial \varrho_s}{\partial u_3}$ aufgelöst, und fügen diese sechs Relationen den Gleichungen (29), (32) bei. Es sei D' das so entstehende Differentialsystem erster Ordnung mit den $n+3$ Unbekannten x, ϱ. Dieses System ist nach den Ableitungen

$$\frac{\partial x_{3+h}}{\partial u_a},\ \frac{\partial \varrho_s}{\partial u_2},\ \frac{\partial \varrho_s}{\partial u_3}\quad (s,a=1,2,3;\ h=1,\cdots n-3)$$

aufgelöst; es ist canonisch und *passiv*, d. h. jede Ableitung, die aus den vorstehenden durch Derivation nach $u_1 u_2 u_3$ entsteht, lässt sich vermöge der Gleichungen, die aus D' durch wiederholte Differentiationen nach den u erhalten werden, auf eine und nur eine Weise durch x, ϱ und ihre parametrischen Ableitungen darstellen. Denn die cardinalen Ableitungen des Differentialsystems D' sind

1) die $\frac{\partial^2 x_{3+h}}{\partial u_a \partial u_b}$; nun sind aber die Gleichungen (30) mit den Relationen (10b) Nr. 36 gleichbedeutend, und diese entstehen aus (29) durch Differentiationen und Subtraktionen; die Gleichungen (33) ferner ergeben sich durch denselben Process aus (30). Daraus folgt aber sofort, dass die genannten cardinalen Ableitungen sich auf nur eine Weise durch die parametrischen Grössen ausdrücken lassen.

2) Die $\frac{\partial^2 \varrho_s}{\partial u_2 \partial u_3}$; dass auch für diese aus D' nur je *eine* Darstellung folgt, schliesst man aus den drei Jacobi'schen Identitäten

$$\frac{\partial \Delta_{23}^{(s)}}{\partial u_1} + \frac{\partial \Delta_{31}^{(s)}}{\partial u_2} + \frac{\partial \Delta_{12}^{(s)}}{\partial u_3} = 0$$

durch eine ähnliche Ueberlegung wie in Nr. 36.

In dem System D' sind parametrisch einmal die x, dann sämmtliche Ableitungen von x_1, x_2, x_3, endlich alle Grössen

$$(34) \qquad \varrho_s, \; \frac{\partial^k \varrho_s}{\partial u_1^k} \qquad (k = 1, 2, 3, \cdots \text{in inf.}),$$

darnach besitzt D' unter den in § 4 angegebenen Regularitätsbedingungen ein und nur ein Integralsystem x, ϱ von der Eigenschaft, dass die x_1, x_2, x_3 vorgeschriebene Functionen der u bedeuten, während die Grössen (34) vermöge $u_2 = 0$, $u_3 = 0$ in vorgeschriebene Anfangswerthe übergehen.

Auf Grund der Relationen

$$\sum_1^6 \mu_i^{(s)} \frac{\partial x_i}{\partial u_1} + \varrho_s \sum \nu_i^{(s)} \frac{\partial x_i}{\partial u_1} = 0 \qquad (s = 1, 2, 3)$$

und der durch wiederholte Differentiation nach u_1 daraus folgenden Gleichungen kann man aber statt der Anfangswerthe der Grössen (34) auch diejenigen der Ableitungen:

$$\frac{\partial^k x_4}{\partial u_1^k}, \; \frac{\partial^k x_5}{\partial u_1^k}, \; \frac{\partial^k x_6}{\partial u_1^k} \qquad (k = 1, 2, \cdots),$$

und mithin die Functionen $\varphi_i(u_1)$, in welche die Functionen $x_1, \cdots x_6$ vermöge $u_2 = 0$, $u_3 = 0$ übergehen, willkürlich vorschreiben, also der Integralmannigfaltigkeit:

$$x_i = \psi_i(u_1 u_2 u_3) \qquad (i = 1, \cdots n)$$

die Bedingung auferlegen, eine willkürlich gewählte Integralcurve des Pfaff'schen Systems $\mathfrak{A}$ zu enthalten.

Damit also durch jede Integralcurve des Pfaff'schen Systems $\mathfrak{A}$ eine Integral-M_3 hindurchgehe, ist im Falle VII nothwendig und hinreichend, dass die Bedingungen G für jedes beliebige Werthsystem x, ϱ stattfinden.

Eine Modification der vorstehenden Schlussweise tritt dann ein, wenn die Ausgangscurve einer der Gleichungen

$$\sum \nu_i^{(s)} \frac{\partial x_i}{\partial u_1} = 0$$

und infolgedessen wegen (30) auch der zugehörigen Gleichung:

$$\sum \mu_i^{(s)} \frac{\partial x_i}{\partial u_1} = 0$$

genügt; dann hören nämlich die rechten Seiten des Differentialsystems D' für die gewählten Anfangswerthe auf, regulär zu sein. Man erkennt aber sofort, dass durch eine solche besondere Integralcurve unbegrenzt viele Integral-M_3 hindurchgehen (Nr. 44).

42. Die Relationen G gestatten eine merkwürdige begriffliche Deutung. Die erste derselben besagt nämlich, dass die Bilinearform

$$\sum_1^3{}^i \sum_1^3{}^k \mathsf{M}_{ik}^{(1)} \xi_i \eta_k$$

vermöge der Gleichungen

$$\sum \mathsf{N}_i^{(1)} \xi_i = 0, \quad \sum \mathsf{N}_i^{(1)} \eta_i = 0$$

verschwindet, oder was dasselbe bedeutet, dass die Bilinearform

$$\sum_1^6{}^i \sum_1^6{}^k \mu_{ik}^{(1)} \xi_i \eta_k + \varrho_1 \sum_1^6{}^i \sum_1^6{}^k \nu_{ik}^{(1)} \xi_i \eta_k \tag{35}$$

vermöge der Relationen

$$0 = \mu_\xi^{(1)} = \nu_\xi^{(1)} = \mu_\xi^{(2)} + \varrho_2 \nu_\xi^{(2)} = \mu_\xi^{(3)} + \varrho_3 \nu_\xi^{(3)} \tag{36}$$

und der dazu congruenten identisch Null ist. Da aber die Gleichungen (36) von ϱ_1 frei sind, so müssen die beiden Summen in (35) für sich verschwinden; indem wir also die Bezeichnungen von Nr. 37 heranziehen, so folgt: Jede Gerade des R_5, die auf der Mannigfaltigkeit m_1 liegt und die Mannigfaltigkeiten m_2, m_3 d. h. also die Geraden g_2, g_3 trifft, muss auch die Congruenz:

$$\sum \sum \mu_{ik}^{(1)} \xi_i \eta_k = 0, \quad \sum \sum \nu_{ik}^{(1)} \xi_i \eta_k = 0. \tag{37}$$

befriedigen. Jede Gerade, die g_2 und g_3 schneidet, gehört aber auch der Congruenz (α, β) an; mithin muss jede der Bilinearformen (37) vermöge der Relationen

$$\mu_\xi^{(1)} = \nu_\xi^{(1)} = \mu_\eta^{(1)} = \nu_\eta^{(1)} = 0 \tag{38}$$

eine lineare Combination der Bilinearformen

$$\sum\sum \alpha_{ik1}\,\xi_i\,\eta_k, \quad \sum\sum \alpha_{ik2}\,\xi_i\,\eta_k$$

werden, und da die letzteren sich nach einer in Nr. 37 gemachten Bemerkung vermöge (38) auf zwei linear unabhängige Bilinearformen in vier Variabelnpaaren reduciren, so folgt:

Die drei Relationen G sagen aus, dass jedes der Pfaff'schen Systeme vierter Stufe:

$$(F_a)\qquad \begin{cases} dx_{6+h} = \sum_1^6{}^i\, a_{ih}\, dx_i & (h = 1, \cdots n-6), \\ \sum \mu_i^{(a)}\, dx_i = 0, \quad \sum \nu_i^{(a)}\, dx_i = 0 & \end{cases}$$

den Charakter zwei besitzt.

43. Eine zweite begriffliche Deutung der Relationen G folgt aus der Theorie der verketteten Tripel.

Wir schreiben im Anschluss an die Bezeichnungsweise der Nr. 40 das *„erweiterte System S"* des Pfaff'schen Systems $\mathfrak{A}$ in der Form:

$$(S)\qquad dx_{3+h} = \sum_1^3{}^i\, b_{ih}\, dx_i \qquad (h = 1, 2, \cdots n-3),$$

worin die b_{ih} Functionen der $n+3$ unabhängigen Variabeln x, ϱ sind, und die b_{i1}, b_{i2}, b_{i3} dieselbe Bedeutung haben wie in den Gleichungen (32). Die linken Seiten der zu dem System S gehörigen bilinearen Covarianten reduciren sich auf drei linear unabhängige (Nr. 20) und haben die Gestalt:

$$\sum_1^3{}^i \sum_1^3{}^k \mathsf{M}_{ik}^{(s)}\, dx_i\, \delta x_k + \sum_1^3{}^i \mathsf{N}_i^{(s)}\, (d\varrho_s\, \delta x_i - \delta\varrho_s\, dx_i).$$

Die Bedingungen G sind nun der Ausdruck dafür, dass diese drei Bilinearformen durch drei congruente Relationenpaare der Gestalt:

$$d\varrho_s = \sum_1^3 \varrho_{is}\, dx_i; \quad \delta\varrho_s = \sum_1^3 \varrho_{is}\, \delta x_i$$

annullirt werden können. Die Matrix

$$\left\| \begin{matrix} 0\quad, & \Sigma\lambda_s \mathsf{M}_{12}^{(s)}, & \Sigma\lambda_s \mathsf{M}_{13}^{(s)}, & \lambda_1 \mathsf{N}_1^{(1)}, & \lambda_2 \mathsf{N}_1^{(2)}, & \lambda_3 \mathsf{N}_1^{(3)} \\ \Sigma\lambda_s \mathsf{M}_{21}^{(s)}, & 0\quad, & \Sigma\lambda_s \mathsf{M}_{23}^{(s)}, & \lambda_1 \mathsf{N}_2^{(1)}, & \lambda_2 \mathsf{N}_2^{(2)}, & \lambda_3 \mathsf{N}_2^{(3)} \\ \Sigma\lambda_s \mathsf{M}_{31}^{(s)}, & \Sigma\lambda_s \mathsf{M}_{32}^{(s)}, & 0\quad, & \lambda_1 \mathsf{N}_3^{(1)}, & \lambda_2 \mathsf{N}_3^{(2)}, & \lambda_3 \mathsf{N}_3^{(3)} \\ \lambda_1 \mathsf{N}_1^{(1)}, & \lambda_1 \mathsf{N}_2^{(1)}, & \lambda_1 \mathsf{N}_3^{(1)}, & 0\;, & 0\;, & 0 \\ \lambda_2 \mathsf{N}_1^{(2)}, & \lambda_2 \mathsf{N}_2^{(2)}, & \lambda_2 \mathsf{N}_3^{(2)}, & 0\;, & 0\;, & 0 \\ \lambda_3 \mathsf{N}_1^{(3)}, & \lambda_3 \mathsf{N}_2^{(3)}, & \lambda_3 \mathsf{N}_3^{(3)}, & 0\;, & 0\;, & 0 \end{matrix} \right\|$$

hat die Form $c \cdot \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2$, und die Relationen G besagen, dass vermöge irgend zweier der Gleichungen $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$ alle vierreihigen Hauptminoren dieser Matrix verschwinden.

Die Bedingungen G drücken also aus, dass die drei bilinearen Covarianten des erweiterten Systems ein verkettetes Tripel bilden (Nr. 37); dieses Tripel ist von derselben Art wie dasjenige, in dem die Congruenz $\mathfrak{C}$ enthalten ist.

Andererseits können wir das erweiterte System S nach Nr. 39 auch in der rationalen Form schreiben:

$$(39)\quad \begin{cases} dx_{6+h} = \sum^i a_{ih}\, dx_i & (h = 1, 2, \cdots n-6), \\ \sum\sum \alpha_{ikl}\, \eta_k\, dx_i = 0, \quad \sum\sum \gamma_{ik}\, \eta_k\, dx_i = 0 & (l = 1, 2), \end{cases}$$

worin $\eta_1 = 1$, $\eta_2 = 0$, $\eta_3 = 0$ gesetzt werden kann, und die x und die $\eta_4 \eta_5 \eta_6$ als unabhängige Variable zu betrachten sind; die γ_{ik} werden nach der in Nr. 39 gegebenen Vorschrift aus den α_{ik1} und α_{ik2} gebildet. Da nun der Charakter des „verketteten Tripels" bei beliebiger Variabelntransformation erhalten bleibt, so brauchen wir, um die Relationen G in *rationaler* Form zu erhalten, nur die Bedingungen dafür aufzuschreiben, dass die drei bilinearen Covarianten des Systems (39) ein solches Tripel bilden (Nr. 39); doch werden die Endformeln sehr complicirt.

44. Bestehen die Bedingungen G für jedes beliebige Werthsystem x, ϱ, so bilden die bilinearen Covarianten des Pfaffschen Systems $F_{\mathfrak{a}}$ (Nr. 42) eine zweigliedrige R_3-Congruenz, deren Directricen die Geraden $g_{\mathfrak{b}}$, $g_{\mathfrak{c}}$ sind, wenn $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, wie im Folgenden immer, eine Permutation von 1, 2, 3 bedeutet.

Jede Integral-M_2 des Pfaff'schen Systems $F_{\mathfrak{a}}$ befriedigt auch das Pfaff'sche System $\mathfrak{A}$ und soll eine *„zweidimensionale Charakteristik"* des letzteren heissen. Es giebt drei Kategorien solcher Charakteristiken; eine der $\mathfrak{a}^{\text{ten}}$ Kategorie angehörende bezeichnen wir mit $C_{\mathfrak{a}}^{(2)}$.

Nach § 6 geht durch eine beliebige Integralcurve des Systems $F_{\mathfrak{a}}$ eine und nur eine $C_{\mathfrak{a}}^{(2)}$ hindurch; nur wenn jene Integralcurve ausser den Relationen $F_{\mathfrak{a}}$ noch das eine oder das andere der beiden Gleichungspaare:

$$\mu_{dx}^{(\mathfrak{b})} = 0,\; \nu_{dx}^{(\mathfrak{b})} = 0;\quad \mu_{dx}^{(\mathfrak{c})} = 0,\; \nu_{dx}^{(\mathfrak{c})} = 0$$

befriedigt, so gehen durch sie unbegrenzt viele $C_{\mathfrak{a}}^{(2)}$. Eine solche Integralcurve nennen wir eine *„charakteristische Curve"* des Pfaff'schen Systems $\mathfrak{A}$ und bezeichnen sie mit $C_{\mathfrak{b}}^{(1)}$ bezw. $C_{\mathfrak{c}}^{(1)}$. Jede Charakteristik $C_{\mathfrak{a}}^{(2)}$ wird von je einfach unendlich vielen Curven $C_{\mathfrak{b}}^{(1)}$ und ebenso von einfach unendlich vielen Curven $C_{\mathfrak{c}}^{(1)}$ erzeugt*).

*) Vgl. „I", pag. 288—290.

Da nun nach Nr. 37 eine beliebige μ_2 der Congruenz $\mathfrak{C}$ die Mannigfaltigkeiten m_1, m_2, m_3 nach je einer Geraden und die Geraden g_1, g_2, g_3 in je einem Punkte schneidet, so verificirt man leicht folgende Thatsachen:

Jede Integral-M_3 des Pfaff'schen Systems $\mathfrak{A}$ wird erzeugt von je zweifach unendlich vielen charakteristischen Curven eines jeden der drei Systeme, derart, dass durch einen beliebigen Punkt $x_1, \cdots x_n$ der Integral-M_3 je eine auf ihr liegende Curve $C_1^{(1)}, C_2^{(1)}, C_3^{(1)}$ hindurchgeht; ferner wird jede Integral-M_3 auch erzeugt von je einfach unendlich vielen zweidimensionalen Charakteristiken, und zwar läuft von jedem Punkt der Integral-M_3 je eine und nur eine auf ihr gelegene Charakteristik $C_1^{(2)}, C_2^{(2)}, C_3^{(2)}$ aus.

Durch jede $C_\mathfrak{a}^{(2)}$ giebt es unbegrenzt viele Integral-M_3; durch eine beliebige Integralcurve des Systems $\mathfrak{A}$ geht eine einzige Integral-M_3; durch eine Integralcurve, die dem Pfaff'schen System $F_\mathfrak{a}$ genügt, gehen unbegrenzt viele Integral-M_3, welche alle die durch jene Curve gehende $C_\mathfrak{a}^{(2)}$ gemein haben; durch eine $C_\mathfrak{a}^{(1)}$ gehen unbegrenzt viele $C_\mathfrak{b}^{(2)}$ und $C_\mathfrak{c}^{(2)}$, und unbegrenzt viele Integral-M_3.

Bei allen diesen Sätzen ist natürlich das *identische* Bestehen der Bedingungen G vorausgesetzt. Das Differentialsystem D der Nr. 40 gehört dann also zu jener bemerkenswerthen Kategorie partieller Differentialprobleme, die ich in mehreren früheren Abhandlungen*) als *„Normalsysteme"* beschrieben habe.

45. Wir wenden uns nunmehr sogleich zu der Betrachtung eines Pfaff'schen Systems $\mathfrak{A}$ vom Typus X. Man hat hier zwei verschiedene Schaaren zweidimensionaler Congruenzmannigfaltigkeiten, und dementsprechend auch zwei verschiedene Classen reducirter Formen mit $n-3$ Differentialelementen zu unterscheiden. Da aber die Congruenz-μ_2 der ersten Schaar nach Nr. 38 in einer μ_3 liegen, so kann nach Nr. 7 die Ermittelung aller reducirten Formen der ersten Classe auf das analoge Problem für ein Pfaff'sches System *vierter* Stufe zurückgeführt werden.

Das erweiterte System S, das der zweiten Schaar von Congruenzmannigfaltigkeiten entspricht, hat die Form:

$$(40)\qquad \begin{cases} dx_{6+h} = \sum a_{ih}\, dx_i & (h = 1, 2, \cdots n-6); \\ \mu_{dx}^{(s)} + \varrho_3 \nu_{dx}^{(s)} + \varrho_s \nu_{dx} = 0 & (s = 1, 2); \\ \mu_{dx} + \varrho_3 \nu_{dx} = 0. \end{cases}$$

*) „Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles simultanées", Par. Comptes Rendus 123, p. 292 (1896).

„Résumé einer Integrationstheorie höherer partieller Differentialprobleme", Leipz. Ber. 1897, p. 329.

„Theorie der Involutionssysteme etc.", diese Annalen 49, p. 543.

Indem wir die drei bilinearen Covarianten bilden und die Differentiale dx_4, dx_5, dx_6, δx_4, δx_5, δx_6 mittels (40) und der dazu congruenten Gleichungen eliminiren, erhalten wir Relationen der Form:

$$(41)\quad \begin{cases} 0 = \sum\sum \mathsf{M}_{ik}^{(s)} dx_i \delta x_k + \delta\varrho_3 \sum \mathsf{N}_i^{(s)} dx_i \\ \qquad - d\varrho_3 \sum \mathsf{N}_i^{(s)} \delta x_i + \delta\varrho_s \sum \mathsf{N}_i dx_i - d\varrho_s \sum \mathsf{N}_i \delta x_i, \\ 0 = \sum\sum \mathsf{M}_{ik} dx_i \delta x_k + \delta\varrho_3 \sum \mathsf{N}_i dx_i - d\varrho_3 \sum \mathsf{N}_i \delta x_i, \end{cases}$$

worin alle Summationen von 1 bis 3 zu erstrecken sind. Drücken wir aus, dass diese drei Bilinearformen durch ein System von drei congruenten Relationenpaaren:

$$d\varrho_s = \sum \varrho_{si} dx_i; \quad \delta\varrho_s = \sum \varrho_{si} \delta x_i \qquad (s = 1, 2, 3)$$

annullirt werden, so erhalten wir die neun Gleichungen:

$$(42)\qquad \mathsf{M}_{ik} + \varrho_{3k}\mathsf{N}_i - \varrho_{3i}\mathsf{N}_k = 0;$$

$$(43)\qquad \mathsf{M}_{ik}^{(1)} + \varrho_{3k}\mathsf{N}_i^{(1)} - \varrho_{3i}\mathsf{N}_k^{(1)} + \varrho_{1k}\mathsf{N}_i - \varrho_{1i}\mathsf{N}_k = 0;$$

$$(44)\qquad \mathsf{M}_{ik}^{(2)} + \varrho_{3k}\mathsf{N}_i^{(2)} - \varrho_{3i}\mathsf{N}_k^{(2)} + \varrho_{2k}\mathsf{N}_i - \varrho_{2i}\mathsf{N}_k = 0,$$

worin die Indices i, k der Reihe nach die Werthepaare $1, 2$; $2, 3$; $3, 1$ anzunehmen haben. Multiplicirt man die erste Gleichung (43) mit N_3, die zweite Gleichung (43) mit N_1, die dritte mit N_2 und addirt, so entsteht eine Relation, aus der sich die ϱ_{3i} vermöge (42) eliminiren lassen; man findet so die erste der beiden Bedingungen:

$$(45)\quad \mathsf{M}_{12}^{(s)}\mathsf{N}_3 + \mathsf{M}_{23}^{(s)}\mathsf{N}_1 + \mathsf{M}_{31}^{(s)}\mathsf{N}_2 + \mathsf{M}_{12}\mathsf{N}_3^{(s)} + \mathsf{M}_{23}\mathsf{N}_1^{(s)} + \mathsf{M}_{31}\mathsf{N}_2^{(s)} = 0 \qquad (s = 1, 2).$$

Die zweite dieser Gleichungen wird in ganz analoger Weise aus (44) gewonnen; endlich folgt noch aus (42):

$$(46)\qquad \mathsf{M}_{12}\mathsf{N}_3 + \mathsf{M}_{23}\mathsf{N}_1 + \mathsf{M}_{31}\mathsf{N}_2 = 0.$$

Die Relationen (45), (46) bezeichnen wir wiederum mit G; ihr identisches Bestehen erweist sich auch hier als die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass durch jede Integralcurve des Pfaff'schen Systems $\mathfrak{A}$ eine Integral-M_3 existirt, und die Gleichungen G drücken andererseits aus, dass die drei Bilinearformen (41) ein *verkettetes Tripel* bilden, welches jetzt von der vierten Art ist (Nr. 38). Durch ganz ähnliche Rechnungen

erhält man in den Fällen VIII und IX die analogen Resultate, und wir können schliesslich den Satz aussprechen:

Damit in den Fällen VII—X durch eine beliebige Integralcurve des Pfaff'schen Systems $\mathfrak{A}$ eine Integral-M_3 hindurchgehe, ist nothwendig und hinreichend, dass die drei bilinearen Covarianten des erweiterten Systems ein verkettetes Tripel bilden.

Das letztere ist dann jedesmal von derselben Art wie dasjenige, dem die Congruenz $\mathfrak{C}$ angehört.

Zur Aufstellung der Bedingungsgleichungen selbst kann man sich in allen vier Fällen auch der am Schlusse von Nr. 43 skizzirten Methode bedienen.

46. Sind die Relationen G für beliebige x, ϱ erfüllt, so giebt es nach dem Vorigen und nach § 4 stets unbegrenzt viele reducirte Formen mit $n-3$ Termen, deren Ermittelung auf die Integration des Differentialsystems $\mathfrak{D}$ (oder D) hinauskommt. Bestehen dagegen die Gleichungen G nicht alle identisch, so wird die Aufgabe, das Pfaff'sche System $\mathfrak{A}$ auf $n-3$ Differentialelemente zu reduciren, nach § 5 entweder direct als unmöglich erkannt, oder auf das analoge Problem für ein Pfaff'sches System fünfter oder niedrigerer Stufe zurückgeführt.

§ 8.

Pfaff'sche Systeme sechster Stufe beliebigen Charakters.

47. Das vorgelegte Pfaff'sche System $\mathfrak{A}$ sechster Stufe besitze einen Charakter $K \geqq 3$. Schreiben wir dann $\alpha_{ik}, \beta_{ik}, \cdots \varepsilon_{ik}$ bezw. statt $\alpha_{ik1}, \cdots \alpha_{ikK}$, so müssen wir, um die Möglichkeit einer reducirten Form mit $n-4$ Termen zu discutiren, zunächst die Gesammtheit der dreifach ausgedehnten linearen Mannigfaltigkeiten bestimmen, die der K-gliedrigen Congruenz $\mathfrak{C}(\alpha, \beta, \cdots \varepsilon)$ genügen. Natürlich muss der Rang $2r$ der Matrix:

$$\|\lambda_1 \alpha_{ik} + \lambda_2 \beta_{ik} + \cdots + \lambda_K \varepsilon_{ik}\| \qquad (i, k = 1, \cdots 6),$$

falls die genannte Reduction möglich sein soll, kleiner als sechs sein. Da wir den Fall $2r = 2$ in § 3 erledigt haben, so können wir uns auf die Annahme $2r = 4$ beschränken, und dürfen dann jeden der K Complexe $\alpha, \cdots \varepsilon$ als einfach speciell voraussetzen.

Soll $\mathfrak{C}$ mehr als *eine* Congruenz-μ_3 besitzen, so muss die zweigliedrige Congruenz $(\alpha\beta)$ einem der Typen II oder IV des vorigen Paragraphen angehören.

Ist $(\alpha\beta)$ eine Congruenz vom Typus IV, und haben M und π die in Nr. 34 angegebene Bedeutung, so giebt es einfach unendlich viele Mannigfaltigkeiten μ_3, die der Congruenz $(\alpha\beta)$ genügen; sie liegen alle in

der Ebene M und enthalten die Mannigfaltigkeit π. Damit alle diese μ_3 auch die Complexe $\gamma, \cdots \varepsilon$ erfüllen, ist nothwendig und hinreichend, dass die singulären Geraden der letzteren auf π liegen, und dass hinsichtlich eines jeden dieser Complexe den Punkten von π die Ebene M zugewiesen sei (Nr. 30). Diese Bedingungen lassen sich leicht in rationale Gleichungen für die α_{ikh} umsetzen; sind sie erfüllt, so kommt das Problem der Reduction auf $n - 4$ Terme nach Nr. 7 auf das analoge Problem für ein Pfaff'sches System fünfter Stufe hinaus.

Enthält $\mathfrak{C}$ keine zweigliedrige Congruenz vom Typus IV, so müssen alle in $\mathfrak{C}$ vorkommenden zweigliedrigen Congruenzen dem Typus II angehören, falls $\mathfrak{C}$ mehr als *eine* Congruenz-μ_3 besitzen soll. Die Congruenz $\mathfrak{C}$ besitzt dann eine singuläre Gerade g, d. h. das Pfaff'sche System $\mathfrak{A}$ gestattet zwei unabhängige infinitesimale Transformationen, lässt sich also nach Nr. 8 auf ein System $\mathfrak{A}'$ mit nur $n - 2$ Veränderlichen reduciren. Da ferner alle Congruenz-μ_3 durch g gehen, so kann unser Reductionsproblem darauf zurückgeführt werden, das System $\mathfrak{A}'$, dessen Charakter K und dessen Stufe vier ist, auf eine Form mit $n - 4$ Termen zu bringen, ein Problem, das ich in der Arbeit „I" ausführlich behandelt habe.

In allen übrigen Fällen, in denen der Rang des Pfaff'schen Systems $\mathfrak{A}$ gleich 4 ist, kann höchstens *eine* Congruenz-μ_3, also auch höchstens *eine* $n - 4$-gliedrige reducirte Form existiren, die dann nach Nr. 6 gefunden wird.

48. Wir untersuchen nunmehr, in welchen Fällen das System $\mathfrak{A}$ eine reducirte Form mit $n - 3$ Differentialelementen besitzt. Nach Nr. 24 können wir uns bei dieser Discussion auf diejenigen Fälle beschränken, in denen die Congruenz $\mathfrak{C}$ mindestens dreifach unendlich viele Congruenz-μ_2 besitzt, da andernfalls unsere Aufgabe stets auf Probleme kleinerer Stufenzahl zurückführbar ist.

Ferner wollen wir von vornherein alle Fälle ausscheiden, auf welche die Sätze der Nr. 7 und 8 anwendbar sind, in denen also die zweidimensionalen Congruenzmannigfaltigkeiten entweder alle einen singulären Punkt der Congruenz $\mathfrak{C}$ enthalten, oder in einer Ebene bezw. einer μ_3 liegen, oder endlich in mehrere Schaaren dieser beiden Arten zerfallen.

Der Fall, dass $\mathfrak{C}$ eine zweigliedrige Congruenz $(\alpha\beta)$ von einem der beiden Typen III oder IV enthält, bleibt demnach von vornherein ausser Betracht; denn unter dieser Annahme liegen nach Nr. 34 alle Congruenz-μ_2 theils in einer μ_3 oder μ_4, theils gehen sie durch einen Punkt P. Sollen aber durch einen Punkt P mindestens dreifach unendlich viele Congruenz-μ_2 gehen, so erfüllen sie entweder eine μ_4, oder sie durchziehen den ganzen R_5, und in diesem Falle ist P nothwendig ein singulärer Punkt der Congruenz $\mathfrak{C}$.

Enthält die Congruenz $\mathfrak{C}$ eine zweigliedrige Congruenz $(\alpha\beta)$ von einem der Typen VII—X, so kann sie offenbar nur dann dreifach unendlich viele Congruenz-μ_2 enthalten, wenn $K = 3$ ist und $(\alpha\beta\gamma)$ ein verkettetes Tripel darstellt. Auf ein solches Pfaff'sches System bleiben die Entwickelungen des vorigen Paragraphen ohne jede Modification anwendbar; denn das erweiterte System S und das Differentialsystem D haben in den genannten Fällen genau dieselbe Form, wie in dem jeweils entsprechenden Fall $K = 2$.

Ist $2r = 4$, und haben alle Complexe von $\mathfrak{C}$ ihre singuläre Gerade g mit einander gemein, so existiren stets dreifach unendlich viele Congruenz-μ_2, nämlich alle diejenigen μ_2, die durch g gehen, und dementsprechend besitzt $\mathfrak{A}$ unbegrenzt viele reducirte Formen mit $n - 3$ Termen, die alle erhalten werden, indem man das System $\mathfrak{A}'$ (Nr. 47) auf $n - 3$ Differentialelemente reducirt, was auf eine triviale Aufgabe führt (Nr. 1, Anm.).

49. Wenn wir alle in Nr. 48 besprochenen Möglichkeiten ausschliessen, so zeigt eine etwas weitläufige, aber unschwierige Discussion, dass nur noch *zwei* Fälle existiren, in denen eine mehr als zweigliedrige Congruenz $\mathfrak{C}$ *dreifach* unendlich viele Congruenz-μ_2 besitzt; diese beiden Fälle sind folgendermassen charakterisirt:

a) Es ist $K = 3$, die Congruenz $\mathfrak{C}$ enthält eine zweigliedrige, aus zweifach speciellen Complexen bestehende Congruenz, und ausserdem nur allgemeine Complexe. Die zweidimensionale lineare Mannigfaltigkeit π, die den singulären Mannigfaltigkeiten der ∞^1 zweifach speciellen Complexe gemeinsam ist (Nr. 10), ist eine Complex-μ_2 jedes in $\mathfrak{C}$ enthaltenen allgemeinen Complexes.

b) Es ist $K = 4$, die Congruenz $\mathfrak{C}$ enthält eine dreigliedrige, aus lauter zweifach speciellen Complexen bestehende Congruenz mit einer zweidimensionalen singulären Mannigfaltigkeit π, und ausserdem nur allgemeine Complexe, die alle die Mannigfaltigkeit π zur Complex-μ_2 haben.

Versteht man unter Ω die ternäre bezw. quaternäre cubische Form, deren Quadrat gleich der 6-reihigen Determinante:

$$|\lambda_1\alpha_{ik} + \lambda_2\beta_{ik} + \lambda_3\gamma_{ik}| \text{ bezw. } |\lambda_1\alpha_{ik} + \cdots + \lambda_4\delta_{ik}|$$

ist, und sind Q_{ik} die ternären bezw. quaternären quadratischen Formen, deren Quadrate mit den Hauptminoren 4. O. dieser Matrices übereinstimmen, so ist in beiden Fällen Ω gleich dem Cubus eines Linearfactors, der auch in allen Q_{ik} einfach zählend aufgeht; doch treten noch weitere Bedingungen hinzu, die sich nach dem Gesagten leicht durch rationale Gleichungen zwischen den $\alpha_{ik}, \cdots \delta_{ik}$ ausdrücken lassen.

Bedeutet α einen allgemeinen Complex der Congruenz $\mathfrak{C}$, so ist in beiden Fällen jede μ_2 des Complexes α, die die Mannigfaltigkeit π nach

einer Geraden schneidet, eine Congruenz-μ_2, und man erhält alle μ_2 dieser Eigenschaft, indem man zu einer beliebigen auf π liegenden Geraden g die ihr hinsichtlich α conjugirte μ_3 bestimmt (Nr. 29) und alle in dieser μ_3 liegenden, durch g gehenden Mannigfaltigkeiten μ_2 in's Auge fasst. Die genannte μ_3 enthält π, und da die Mannigfaltigkeiten μ_3, die durch π gehen, den ∞^2 auf π liegenden Geraden durch den Complex α projectiv zugeordnet werden (vgl. den Schluss der Nr. 29), so geht durch jeden nicht auf π liegenden Punkt P eine und nur eine μ_2 der Congruenz $\mathfrak{C}$, diejenige nämlich, welche P mit der Geraden g verbindet, die der Mannigfaltigkeit $\mu_3(P, \pi)$ zugeordnet ist.

Darnach hat das erweiterte System S in beiden Fällen die Form:

$$dx_{6+h} = \sum_1^6{}^i a_{ih} dx_i \qquad (h = 1, \cdots n - 6);$$

$$\mu_{dx} + \varrho_1 \nu_{dx} = 0, \quad \mu'_{dx} + \varrho_2 \nu_{dx} = 0;$$
$$\mu''_{dx} + \varrho_1 \nu'_{dx} + \varrho_2 \nu''_{dx} + \varrho_3 \nu_{dx} = 0,$$

worin die μ_i, ν_i etc. rationale Functionen der α_{ik}, β_{ik}, $\cdots$ d. h. also der Grössen α_{ikh} bedeuten, und die oben definirte Mannigfaltigkeit π durch die Gleichungen:

$$\mu_\xi = 0, \ \nu_\xi = 0, \ \mu_\xi' = 0$$

dargestellt wird. Durch eine Rechnung, die der in Nr. 45 durchgeführten ganz analog ist, erhält man dann wieder drei Bedingungsgleichungen G zwischen den ϱ_i, den μ_i, ν_i, $\cdots$ und deren Ableitungen nach den x, und diese Relationen drücken aus, dass die drei bilinearen Covarianten des Pfaff'schen Systems S eine dreigliedrige Congruenz vom Typus a) bilden; *bestehen sie für jedes beliebige Werthsystem x, ϱ, dann und nur dann geht durch jede Integralcurve C des Pfaff'schen Systems $\mathfrak{A}$ eine Integral-M_3 hindurch, und zwar nur eine einzige, wenn die Curve C die Pfaff'schen Gleichungen:*

$$\mu_{dx} = 0, \ \nu_{dx} = 0, \ \mu'_{dx} = 0$$

nicht befriedigt.

Alle zweidimensionalen Integralmannigfaltigkeiten, welche die Curve C enthalten, liegen auf der im Satze genannten Integral-M_3; wir können daher auch sagen, dass in dem vorliegenden Falle durch jede beliebige Integral-M_2 eine Integral-M_3 hindurchgeht. Es ist leicht zu sehen, dass im Falle $K \geq 3$ diese Eigenschaft sonst nur noch den Pfaff'schen Systemen zukommt, deren Congruenz $\mathfrak{C}$ ein verkettetes Tripel bildet und überdies den Bedingungen G identisch genügt, sowie denjenigen, die mindestens *eine* infinitesimale Transformation gestatten.

Sind im Falle a) oder b) die Bedingungsgleichungen G nicht für jedes beliebige Werthsystem x, ϱ befriedigt, so ergiebt sich die weitere Discussion aus Nr. 46.

Durch die Entwickelungen dieses und der beiden vorhergehenden Paragraphen wird für Pfaff'sche Systeme sechster Stufe das in § 1 *formulirte Problem in jedem einzelnen Fall entweder direct erledigt oder auf Probleme kleinerer Stufenzahl zurückgeführt.*

München, den 20. November 1900.

Ueber die Riemann'sche Primzahlfunction*).

Von

Helge von Koch in Stockholm (Djursholm).

Wir bezeichnen mit $F(x)$ die Anzahl aller Primzahlen, welche kleiner sind als eine gegebene positive Zahl x und setzen mit Riemann

$$f(x) = F(x) + \frac{1}{2} F(x^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{3} F(x^{\frac{1}{3}}) + \cdots.$$

Die Riemann'sche Primzahlformel, die bekanntlich durch die Arbeiten der Herren Hadamard und von Mangoldt streng bewiesen worden ist, stellt diese Function durch eine convergente Reihe dar; diese Reihe ist aber weder *absolut* noch *gleichmässig* convergent. Von diesen Nachtheilen kann man sagen, dass der zweite in der Natur der Sache liegt und ihm nicht abgeholfen werden kann, solange man einen Ausdruck fordert, der *exact* die Function darstellen soll**). Man kann sich aber fragen ob es nicht möglich sei, $f(x)$ als die Summe zweier Functionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ auszudrücken, von dem die erste durch eine absolut und gleichmässig convergente Reihe darstellbar sei, die zweite aber eine solche discontinuirliche Function bedeute, die für alle x kleiner bleibt als eine constante Grösse.

Der Zweck der vorliegenden Arbeit ist eine solche Darstellung zu geben. Die Formel, die wir ableiten werden, ist in gewisser Hinsicht der Riemann'schen Formel analog, hat aber nicht nur den Vorzug, die Differenz zwischen $f(x)$ und den Integrallogarithmus $Li(x)$ mit genügender Annäherung durch eine absolut und in jedem endlichen Intervalle gleichmässig convergente Reihe auszudrücken, sondern kann auch dazu benutzt werden, einen Satz über die Grössenordnung der Differenz $f(x) - Li(x)$ zu beweisen.

---

*) Arbeit, vorgetragen bei dem internationalen Mathematikercongress zu Paris 1900.

**) Da nämlich $f(x)$ discontinuirlich ist, so kann diese Function nicht durch eine gleichmässig convergente Reihe dargestellt werden.

Dieser Satz, den ich schon in einer früheren Arbeit bewiesen habe*), kann so ausgesprochen werden:

*Wenn der Satz von Riemann**) über die Nullstellen der durch die Reihe*

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots$$

definirten Function $\zeta(s)$ richtig ist, so kann die Differenz $f(x) - Li(x)$ von nicht höherer Ordnung als $\sqrt{x}\cdot\log x$ sein.

I.

Neue Darstellung der Function $f(x)$.

1. Es sei r eine willkürliche reelle Variabele und man setze

$$(1)\quad \psi(x, r) = \sum_{p<x} p^{-r}\log p + \sum_{p^2<x} p^{-2r}\log p + \sum_{p^3<x} p^{-3r}\log p + \cdots,$$

wo die erste Summe über alle Primzahlen $<x$ zu erstrecken ist, die zweite über alle Primzahlen $<x^{\frac{1}{2}}$, die dritte über alle Primzahlen $<x^{\frac{1}{3}}$, u. s. w.

Zwischen die so eingeführte Function $\psi(x, r)$ und die Riemann'sche Function $f(x)$ hat man, wie unmittelbar ersichtlich ist, die Relation

$$(2)\qquad f(x) = \int_0^\infty \psi(x, r)\, dr.$$

Um für $f(x)$ eine Darstellung zu erhalten, beginnen wir mit einem Studium dieser Function $\psi(x, r)$.

Die Euler'sche Formel

$$(3)\qquad \sum p^{-s}\log p + \sum p^{-2s}\log p + \cdots = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$$

wo die Summen über alle Primzahlen zu erstrecken sind, gilt bekanntlich, solange der reelle Bestandtheil von s grösser als 1 ist.

In dieser Gleichung ersetze man s durch $r + \nu s$, unter s eine reelle positive Zahl, unter ν eine positive ganze Zahl verstanden; man multiplicire beide Glieder mit

$$\frac{(-1)^{\nu-1}}{\underline{|\nu}}\, x^{\nu s}$$

---

*) *Sur la distribution des nombres premiers.* Acta mathematica, t. 24.

**) Diesen Satz, welcher aussagt, dass der reelle Theil jeder imaginären Wurzel der Function $\zeta(s)$ gleich $\frac{1}{2}$ ist, ist es noch nicht gelungen, streng zu beweisen. In einer neuerdings erschienenen Arbeit (Acta mathematica, t. 22, p. 359) versichert Herr Jensen, einen strengen Beweis gefunden zu haben. Dieser Beweis ist aber noch nicht veröffentlicht worden.

und summire alle Gleichungen welche man erhält, indem ν die Reihe der Zahlen

$$1, 2, 3, \ldots$$

durchläuft.

Es kommt

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \sum^{p} \sum^{\lambda} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\lfloor\nu} x^{\nu s} p^{-\lambda r - \nu\lambda s} \log p = \Psi(x, r, s), \tag{4}$$

wo $\Psi(x, r, s)$ durch die Gleichung

$$\Psi(x, r, s) = -\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\lfloor\nu} x^{\nu s} \frac{\zeta'(r+\nu s)}{\zeta(r+\nu s)} \tag{5}$$

definirt ist; die Summe $\sum^{p}$ ist über alle Primzahlen, die Summe $\sum^{\lambda}$ über alle ganze positive Zahlen zu erstrecken.

Da, wie man leicht findet*), die dreifache Summe in (4) für $r+s>1$ absolut convergirt, so ist man berechtigt, zuerst nach ν, und dann nach p und λ zu summiren.

Bemerkt man dass

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\lfloor\nu} x^{\nu s} p^{-\lambda r - \nu\lambda s} = p^{-\lambda r} e^{-x^s p^{-\lambda s}}$$

ist, so nimmt (4) die folgende Form an

$$\sum^{p} \sum^{\lambda} p^{-\lambda r} \log p \left(1 - e^{-x^s p^{-\lambda s}}\right) = \Psi(x, r, s). \tag{6}$$

Die Reihe links ist aber, wie man ohne Schwierigkeit beweist (Vgl. loc. cit. p. 162) für alle reellen Werthe von s, welche grösser sind als $1 + h - r$ (unter h eine beliebige positive Zahl verstanden) gleichmässig convergent.

Um den Werth dieser Reihe für $s = \infty$ zu erhalten, hat man also nur $s = \infty$ in jedem Glied zu setzen.

Es ist aber

$$\lim_{s=\infty} \left(1 - e^{-x^s p^{-\lambda s}}\right) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}, \tag{7}$$

je nachdem $x > p^\lambda$ oder $x < p^\lambda$ ist; der Fall $x = p^\lambda$ ist ausgeschlossen, wenn, wie wir im folgenden der Einfachheit halber annehmen wollen, die gegebene Zahl x nicht einer ganzen Zahl gleich ist.

Der Grenzwerth für $s = \infty$ der linken Seite der Gl. (6) ist also, wie unmittelbar einleuchtet, nichts anderes als die oben definirte Function $\psi(x, r)$, und man erhält die Formel

*) Siehe die oben cit. Arbeit (Acta math., t. 24, p. 161).

$$(8) \qquad \psi(x, r) = \lim_{s=\infty} \Psi(x, r, s),$$

unter $\Psi(x, r, s)$ die oben Gl. (5) definirte Reihe verstanden.

Führt man diesen Ausdruck in die Formel (2) ein, so kommt

$$(9) \qquad f(x) = \int_0^\infty \lim_{s=\infty} \Psi(x, r, s)\, dr.$$

Für das folgende ist es wesentlich zu bemerken, dass man, um eine hinreichende Approximation zu erhalten, nicht bis an die Grenze ($s = \infty$) gehen muss. Wir werden in der That finden, dass der Ausdruck

$$(10) \qquad \int_0^\infty \Psi(x, r, s)\, dr$$

schon für

$$s \geqq 2x \log x$$

einen Werth annimmt, welcher sich von $f(x)$ nur durch eine Grösse unterscheidet, die kleiner bleibt als eine feste, angebbare Zahl.

Um dies zu beweisen schreiben wir die linke Seite der Gl. (6) in der Form:

$$\sum^p \sum^\lambda p^{-\lambda r} \log p \left(1 - e^{-x^s p^{-\lambda s}}\right) = \Psi(x, r) - \eta_1 + \eta_2,$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist

$$\eta_1 = \sum_{p^\lambda < x} p^{-\lambda r} \log p \cdot e^{-x^s p^{-\lambda s}},$$

$$\eta_2 = \sum_{p^\lambda > x} p^{-\lambda r} \log p \left(1 - e^{-x^s p^{-\lambda s}}\right);$$

die Summe η_1 erstreckt sich über alle Primzahlpotenzen $< x$, η_2 über alle Primzahlpotenzen $> x$.

Ohne die Allgemeinheit des Problems einzuschränken, können und wollen wir annehmen, es sei x von der Form

$$x = n + \frac{1}{2}$$

unter n eine positive ganze Zahl verstanden.

Ist $p^\lambda < x$, so hat man also nothwendig

$$p^\lambda \leqq x - \frac{1}{2};$$

daraus folgt

$$e^{-x^s p^{-\lambda s}} < \left(\frac{p^\lambda}{x}\right)^s \leqq \left(\frac{x - \frac{1}{2}}{x}\right)^s$$

und also

(11) $$\eta_1 < \left(\frac{x-\frac{1}{2}}{x}\right)^s \psi(x, r).$$

Ist aber $p^\lambda > x$ so muss nothwendig

$$p^\lambda \geqq x + \frac{1}{2}$$

sein; da aber für $p^\lambda > x$

$$1 - e^{-x^s p^{-\lambda s}} < \left(\frac{x}{p^\lambda}\right)^s$$

ist, so erhält man für η_2 die folgende Ungleichung:

$$\eta_2 < x^s \sum_{\nu = x + \frac{1}{2}}^{\infty} \frac{\log \nu}{\nu^{s+r}}.$$

Die Summe rechts ist aber, wie man sich durch Betrachtung des Integrals

$$\int_{x+\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{\log x\, dx}{x^{s+r}}$$

leicht überzeugt, kleiner als:

$$\frac{\log\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^{s+r}} + \frac{1}{(s+r-1)^2} \frac{x+\frac{1}{2}}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^{s+r}} + \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)\log\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^{s+r}(s+r-1)}.$$

Dieser Ausdruck ist, sobald

$$s + r - 1 > x + \frac{1}{2}$$

angenommen wird, kleiner als

$$\frac{3\log\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^{s+r}}.$$

Für η_2 ergiebt sich also die Ungleichung

(12) $$\eta_2 < 3\left(\frac{x}{x+\frac{1}{2}}\right)^s \cdot \log\left(x+\frac{1}{2}\right) \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^r}.$$

Aus der Gl. (6), welche wir auch folgendermassen schreiben können:

$$\Psi(x, s, r) = \psi(x, r) - \eta_1 + \eta_2$$

ergiebt sich aber

$$\int_0^\infty \Psi(x, s, r)\, dr = f(x) - \int_0^\infty \eta_1\, dr + \int_0^\infty \eta_2\, dr.$$

Setzt man diese Gleichung in Verbindung mit den Ungleichheiten

$$\int_0^\infty \eta_1\, dr < \left(\frac{x-\frac{1}{2}}{x}\right)^s f(x),$$

$$\int_0^\infty \eta_2\, dr < 3\left(\frac{x}{x+\frac{1}{2}}\right)^s,$$

welche sich nach den Formeln (11, 12) ergeben, so findet man, dass $f(x)$ unter der folgenden Form geschrieben werden kann

$$f(x) = \int_0^\infty \Psi(x, s, r)\, dr + \varepsilon(x, s), \tag{13}$$

wo $\varepsilon(x, s)$ eine Function bedeutet, die der Ungleichung

$$|\varepsilon(x, s)| < \left(\frac{x-\frac{1}{2}}{x}\right)^s f(x) + 3\left(\frac{x}{x+\frac{1}{2}}\right)^s \tag{14}$$

genügt (sobald nur $s + r - 1 > x + \frac{1}{2}$ ist).

Da aber

$$f(x) < x,$$

$$\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{x}\right)^s < e^{-\frac{s}{2x}},$$

$$\left(\frac{x}{x+\frac{1}{2}}\right)^s < e^{-\frac{s}{2x+1}},$$

so sieht man dass für

$$x > 1, \quad s \geqq 2x \log x$$

die folgende Ungleichung besteht:

$$|\varepsilon(x, s)| < 1 + \frac{3}{x^{\frac{2}{3}}}. \tag{15}$$

Nimmt man noch $x > \sqrt{27}$, so wird die Function $\varepsilon(x, s)$ sicher, dem absoluten Betrag nach, kleiner als 2.

Dieses Resultat sprechen wir so aus:

Setzt man in dem Ausdruck:

$$\int_0^\infty \Psi(x, s, r)\, dr \tag{16}$$

für s einen Werth s_0 ein, der die Ungleichheit

$$s_0 \geqq 2x \log x$$

befriedigt, so wird der Unterschied zwischen diesem Ausdruck und der Riemann'schen Function $f(x)$ kleiner als 2, vorausgesetzt, dass $x > \sqrt{27}$ ist.

Wünscht man, dass die Differenz $\varepsilon(x, s)$ zwischen $f(x)$ und (16) mit wachsendem x unendlich klein werde, so braucht man nur

$$s \geqq x^2$$

zu nehmen, wie aus der Ungleichung (14) ersichtlich ist.

2. Um die gefundenen Ausdrücke umzuformen, werden wir uns von der bekannten Darstellung der Function $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ durch eine Partialbruch-Reihe bedienen, die sich aus dem Hadamard'schen Fundamentalsatze unmittelbar ergiebt.

Ist $\varrho = \alpha + i\beta$ eine beliebige imaginäre Wurzel der Function $\zeta(s)$ und bezeichnet man durch $\varrho_0 = \alpha - i\beta$ die zu ϱ conjugirte Wurzel, so kann die fragliche Formel so geschrieben werden:

$$(17) \qquad \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{1}{2} C + \frac{1}{2} l\pi - \frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{s+2n} - \frac{1}{2n} \right) + \sum^{\varrho} \left(\frac{1}{s-\varrho} + \frac{1}{s-\varrho_0} \right),$$

wo C die Euler'sche Constante bedeutet und wo die Summation $\sum^{\varrho}$ über alle diejenigen imaginären Wurzeln der Function $\zeta(s)$ zu nehmen ist, deren imaginärer Bestandtheil $\beta > 0$ ist.

Setzt man die sich hieraus für die Function $\frac{\zeta'(r+\nu s)}{\zeta(r+\nu s)}$ ergebenden Ausdrücke in die Formel (5) ein, so erhält man $\Psi(x, s, r)$ ausgedrückt durch eine unendliche Doppelreihe.

Man findet ohne Schwierigkeit*) dass diese Reihe *absolut* convergent ist, dass man also dazu berechtigt ist, zuerst nach den Summationsbuchstaben ν und dann nach n und ϱ zu summiren.

Führen wir, wie in der oben angeführten Arbeit, die durch die Gleichung

$$(14) \qquad P(x, s, \alpha) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu s + \alpha} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\underline{|\nu}} x^{\nu s}$$

definirte Function ein, so ergiebt sich hiernach für $\Psi(x, s, r)$ die folgende Darstellung:

---

*) Vgl. loc. cit. § 4.

$$(19)\qquad \Psi(x,s,r) = -\left(\tfrac{1}{2}C + \tfrac{1}{2}l\pi\right)(1-e^{-x^s}) + P(x,s,r-1)$$
$$-\sum_{n=1}^{\infty}\left[P(x,s,r+2n) - \tfrac{1}{2n}(1-e^{-x^s})\right]$$
$$-\sum_{\varrho}[P(x,s,r-\varrho) + P(x,s,r-\varrho_0)].$$

Es ist aber leicht, die Function $P(x, s, \alpha)$ durch ein definites Integral auszudrücken*). Man erhält

$$(20)\qquad P(x,s,\alpha) = x^{-\alpha}\int_0^x y^{\alpha-1}(1-e^{-y^s})\,dy.$$

Durch partielle Integration ergeben sich hieraus die Formeln

$$(21)\qquad P(x,s,\alpha) = \frac{1}{\alpha}(1-e^{-x^s}) - \frac{x^{-\alpha}}{\alpha}\int_0^x s y^{\alpha+s-1}e^{-y^s}\,dy,$$

$$(22)\qquad P(x,s,\alpha) = \frac{1}{\alpha}(1-e^{-x^s}) - \frac{s x^s e^{-x^s}}{\alpha(s+\alpha)}$$
$$-\frac{s^2}{\alpha(s+\alpha)}x^{-\alpha}\int_0^x y^{\alpha+2s-1}e^{-y^s}\,dy,$$

$$(23)\qquad P(x,s,\alpha) = \frac{1}{\alpha}(1-e^{-x^s}) - \frac{s x^s e^{-x^s}}{\alpha(s+\alpha)} - \frac{s^2 x^{2s} e^{-x^s}}{\alpha(s+\alpha)(2s+\alpha)}$$
$$-\frac{s^3}{\alpha(s+\alpha)(2s+\alpha)}x^{-\alpha}\int_0^x y^{\alpha+3s-1}e^{-y^s}\,dy,$$

die wir soeben benutzen werden.

Für die Function $P(x, s, r-1)$ benutzen wir die Formel (21), für die anderen in der Formel (19) auftretenden $P(x, s, \alpha)$ bedienen wir uns der Formel (23).

Benutzt man die Gleichung (17) so ergiebt sich hieraus:

$$(24)\qquad \Psi(x,s,r) = -\frac{\zeta'(r)}{\zeta(r)}(1-e^{-x^s}) - \frac{x^{1-r}}{r-1}\int_0^x s y^{r-1}y^{s-1}e^{-y^s}\,dy$$
$$+A+B+C+D,$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$(25)\qquad A = s x^s e^{-x^s}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(r+2n)(s+r+2n)} + \sum_{\varrho}\frac{1}{\varrho(r-\varrho)(s+r-\varrho)}\right\},$$

*) loc. cit. pag. 169.

$$(26)\quad B = s^2 x^{2s} e^{-x^s} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(r+2n)(s+r+2n)(2s+r+2n)} + \sum_{\varrho} \frac{1}{(r-\varrho)(s+r-\varrho)(2s+r-\varrho)} \right\},$$

$$(27)\quad C = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{s^3}{(r+2n)(s+r+2n)(2s+r+2n)} \left(\frac{y}{x}\right)^{r+2n} y^{3s-1} e^{-y^s} dy,$$

$$(28)\quad D = \sum_{\varrho} \int_0^x \frac{s^3}{(r-\varrho)(s+r-\varrho)(2s+r-\varrho)} \left(\frac{y}{x}\right)^{r-\varrho} y^{3s-1} e^{-y^s} dy;$$

in diesen Ausdrücken ist die Summation $\sum_{\varrho}$ über alle imaginären Wurzeln ϱ der Function $\zeta(s)$ zu nehmen.

Bemerkt man aber, dass die Function $1 - e^{-x^s}$ unter der Form

$$1 - e^{-x^s} = \int_0^x s y^{s-1} e^{-y^s} dy$$

geschrieben werden kann, so erhält $\Psi(x, s, r)$ die Form:

$$(29)\quad \Psi(x, s, r) = J + A + B + C + D,$$

indem

$$(30)\quad J = \int_0^x \left\{ \left(\frac{x}{y}\right)^{1-r} \frac{1}{1-r} - \frac{\zeta'(r)}{\zeta(r)} \right\} s y^{s-1} e^{-y^s} dy$$

gesetzt ist. Also wird das Integral

$$(31)\quad \int_0^{\infty} \Psi(x, s, r)\, dr$$

durch eine Summe von fünf Integralen ausgedrückt, die wir jetzt etwas näher studiren müssen.

3. Wir beginnen mit dem Integral $\int_0^{\infty} J\, dr$. Da

$$\int_0^{\infty} J\, dr = \int_0^x dy \cdot s y^{s-1} e^{-y^s} \int_0^{\infty} \left\{ \left(\frac{x}{y}\right)^{1-r} \frac{1}{1-r} - \frac{\zeta'(r)}{\zeta(r)} \right\} dr$$

und das Integral

$$\int_0^{\infty} \left\{ \frac{x^{1-r}}{1-r} - \frac{\zeta'(r)}{\zeta(r)} \right\} dr$$

bekanntlich*) nichts anderes ist als

$$Li(z) - \log 2,$$

wo

$$Li(z) = \lim_{\varepsilon=0}\left[\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dz}{\log z} + \int_{1+\varepsilon}^{z} \frac{dz}{\log z}\right] \tag{32}$$

den *Integrallogarithmus* bezeichnet, so hat man also

$$\int_0^\infty J\,dr = \int_0^x \left\{Li\left(\frac{x}{y}\right) - \log 2\right\} sy^{s-1}e^{-y^s}\,dy$$

oder, was dasselbe ist:

$$\int_0^\infty J\,dr = \int_0^x Li\left(\frac{x}{y}\right) sy^{s-1}e^{-y^s}\,dy - (1 - e^{-x^s})\log 2. \tag{33}$$

Um einen Näherungswerth (für grosse s) zu erhalten, theilen wir das rechts vorkommende Integral in drei Theile:

$$\int_0^x = \int_0^{1-h} + \int_{1-h}^{1+h} + \int_{1+h}^{x},$$

wo h eine positive Zahl < 1, über die wir später verfügen werden, bedeutet.

Da

$$Li\left(\frac{x}{y}\right) < \frac{x}{y}$$

ist, so hat man:

$$\int_0^{1-h} < x\int_0^{1-h} sy^{s-2}e^{-y^s}\,dy < x\int_0^{1-h} sy^{s-2}\,dy,$$

also

$$\int_0^{1-h} < x\,\frac{s}{s-1}\,(1-h)^{s-1}.$$

Ebenso erhält man

$$\int_{1+h}^{x} < \frac{x}{1+h}\int_{1+h}^{x} sy^{s-1}e^{-y^s}\,dy < \frac{x}{1+h}\,e^{-(1+h)^s},$$

also um so mehr

$$\int_{1+h}^{x} < x\,e^{-(1+h)^s} < \frac{x}{(1+h)^s}.$$

*) Siehe z. B. de la Vallée Poussin, Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann, etc. p. 60.

Für das Integral $\int\limits_{1-h}^{1+h}$ hat man, nach dem ersten Mittelwerthsatze,

$$\int\limits_{1-h}^{1+h} Li\left(\frac{x}{y}\right) s y^{s-1} e^{-y^s} dy = Li(\xi)\left(e^{-(1-h)^s} - e^{-(1+h)^s}\right),$$

wo ξ eine Zahl zwischen $\frac{x}{1-h}$ und $\frac{x}{1+h}$ bedeutet. Da aber

$$|Li(\xi) - Li(x)| = \left|\int\limits_{\xi}^{x} \frac{dx}{\log x}\right| = \frac{1}{\log \xi_1} \cdot |\xi - x|,$$

wo ξ_1 eine Zahl zwischen ξ und x ist, so ergiebt sich hieraus, dass man setzen kann

$$\int\limits_{1-h}^{1+h} Li\left(\frac{x}{y}\right) s y^{s-1} e^{-y^s} dy = Li(x) + \omega,$$

wo ω der folgenden Ungleichung genügt

$$|\omega| < x(1-h)^s + \frac{h}{1-h} \frac{x}{\log \frac{x}{1+h}}.$$

Combinirt man die so erhaltenen Ungleichungen, so kommt

$$(34) \qquad \int\limits_{0}^{x} Li\left(\frac{x}{y}\right) s y^{s-1} e^{-y^s} dy = Li(x) + \eta,$$

wo

$$(35) \quad |\eta| < x\left[\frac{s}{s-1}(1-h)^{s-1} + \frac{1}{(1+h)^s} + (1-h)^s + \frac{h}{(1-h)\log \frac{1}{1+h}}\right].$$

Verfügt man jetzt derart über die kleine Zahl h dass man setzt

$$1 + h = s^{\frac{1}{s+1}},$$

so findet man nach einer kleinen Rechnung, dass der in (35) vorkommende Klammerausdruck kleiner wird als

$$\frac{K}{s} + \frac{M \log s}{s \log x},$$

wo K und M positive Constanten bedeuten, dass also

$$(36) \qquad |\eta| < x\left(\frac{K}{s} + \frac{M \log s}{s \log x}\right)$$

gesetzt werden kann. Also ist (nach Formel (33))

$$(37) \qquad \left| \int_0^\infty J\,dr - (Li(x) - \log 2) \right| < x\left(\frac{K}{s} + \frac{M \log s}{s \log x}\right) + e^{-x^s} \log 2.$$

Hieraus ergiebt sich unmittelbar das folgende Resultat:

Für $s = \infty$ nähert sich das Integral $\int_0^\infty J\,dr$ der Grenze $Li(x) - \log 2$ und für

$$s \geqq 2x \log x$$

ist

$$\left| \int_0^\infty J\,dr - (Li(x) - \log 2) \right| < \frac{N}{\log x},$$

wo N eine Constante bedeutet.

4. Wir betrachten jetzt das Integral

$$\int_0^\infty A\,dr,$$

wo A die durch die Gl. (25) definirte Grösse bedeutet. Da

$$\frac{1}{(r+2n)(s+r+2n)} = \frac{1}{s}\left(\frac{1}{r+2n} - \frac{1}{s+r+2n}\right),$$

$$\frac{1}{(r-\varrho)(s+r-\varrho)} = \frac{1}{s}\left(\frac{1}{r-\varrho} - \frac{1}{s+r-\varrho}\right),$$

so findet man durch Anwendung der Formel (17), dass A unter die folgende Form gebracht werden kann:

$$A = x^s e^{-x^s}\left[\frac{\zeta'(r)}{\zeta(r)} + \frac{1}{r-1} - \frac{1}{s}\left(\frac{\zeta'(s+r)}{\zeta(s+r)} + \frac{1}{s+r-1}\right)\right],$$

also

$$A = x^s e^{-x^s} \cdot \frac{d}{dr} \log \frac{(r-1)\,\zeta(r)}{(s+r-1)\,\zeta(s+r)}.$$

Da bekanntlich

$$\log\,[-\zeta(0)] = -\log 2$$

ist, so erhält man also die Gleichung

$$(38) \qquad \int_0^\infty A\,dr = x^s e^{-x^s} \log 2 + \log\,[(s-1)\,\zeta(s)],$$

welche lehrt, dass das Integral $\int_0^\infty A\,dr$ für $s = \infty$ sich der Grenze Null nähert und dass, sobald nur $s \geqq 2x \log x$ angenommen wird, dies Integral der Ungleichung genügt

$$(39)\qquad \int_0^\infty A\,dr < \frac{K}{x}\cdot x^s e^{-x^s},$$

wo K eine Constante bezeichnet.

Das Integral $\int_0^\infty B\,dr$ kann in ganz ähnlicher Weise berechnet werden. Als Resultat ergiebt sich

$$\int_0^\infty B\,dr = x^{2s}e^{-x^s}\left\{\frac{1}{2}\log 2 + \log(s-1)\,\zeta(s) - \frac{1}{2}\log(2s-1)\,\zeta(2s)\right\}$$

und man sieht also, dass auch dies Integral für $s=\infty$ unendlich klein wird und dass

$$(40)\qquad \int_0^\infty B\,dr < \frac{K}{x}\,x^{2s}e^{-x^s},$$

sobald $s \geqq 2x\log x$ angenommen wird.

5. Wir wenden uns jetzt zum Integral

$$\int_0^\infty C\,dr,$$

wo C der durch (27) definirte Ausdruck bedeutet. Setzt man zur Abkürzung

$$[x, y, s, r, n] = \frac{s^3}{(r+2n)\,(s+r+2n)\,(2s+r+2n)}\left(\frac{y}{x}\right)^{r+2n} y^{3s-1}e^{-y^s},$$

so hat man also

$$\int_0^\infty C\,dr = \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty \int_0^x [x, y, s, r, n]\,dy\,dr.$$

Da aber im Integrationsintervalle stets $y \leqq x$ ist und da der im Ausdruck $[x, y, s, r, n]$ vorkommende Nenner vom dritten Grade in Bezug auf r ist, so sieht man unmittelbar, dass die drei Operationen $\int_0^\infty$, $\sum_{n=1}^\infty$ und $\int_0^x$ *vertauschbar* sind, dass man also dazu berechtigt ist, das Integral $\int_0^\infty C\,dr$ in der folgenden Form zu schreiben:

$$(41)\qquad \int_0^\infty C\,dr = \int_0^x dy\cdot\sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty [x, y, s, r, n]\,dr.$$

Um diesen Ausdruck zu berechnen führen wir eine positive Zahl $h < 1$ ein und setzen

$$\int_0^x = \int_0^{1-h} + \int_{1-h}^{1+h} + \int_{1+h}^x. \tag{42}$$

Da

$$\frac{s^3}{(r+2n)(s+r+2n)(2s+r+2n)} < \frac{s}{2}\,\frac{1}{r+2n},$$

und da das Integral

$$\int_0^\infty \left(\frac{y}{x}\right)^{r+2n} \frac{dr}{r+2n}$$

durch die Substitution

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{r+2n} = t^{2n}$$

in

$$\int_{\frac{x}{y}}^\infty \frac{dt}{t^{2n+1}\log t}$$

übergeht, so findet man

$$\begin{aligned}
&\int_0^{1-h} dy \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty [x, y, s, r, n]\, dr \\
&< \frac{1}{2}\int_0^{1-h} s y^{3s-1} e^{-y^s}\, dy \sum_{n=1}^\infty \int_{\frac{x}{y}}^\infty \frac{dt}{t^{2n+1}\log t} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{1-h} s y^{3s-1} e^{-y^s}\, dy \int_{\frac{x}{y}}^\infty \frac{dt}{(t^2-1)\, t \log t} \\
&< \frac{1}{2}\,\frac{K}{x\log x}\int_0^{1-h} s y^{3s-1}\, dy \\
&< \frac{K}{x\log x}(1-h)^{3s},
\end{aligned} \tag{43}$$

wo K eine Constante bedeutet.

Um eine obere Grenze für das in (42) vorkommende Integral $\int_{1+h}^x$ zu erhalten, bemerken wir, dass man hat

$$[x, y, s, r, n] < s y^{3s-1} e^{-y^s} \frac{s^2}{(r+2n)^3}$$

und

$$\int_0^\infty \frac{dr}{(r+2n)^3} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{(2n)^2}$$

also

$$\int_{1+h}^{x} dy \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty [x, y, s, r, n]\, dr$$

$$< \frac{s^2}{8} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \int_{1+h}^{x} s y^{3s-1} e^{-y^s}\, dy.$$

Da aber

$$\int_0^x s y^{3s-1} e^{-y^s}\, dy = 2\left(1 - e^{-x^s} - x^s e^{-x^s}\right) - x^{2s} e^{-x^s} \tag{44}$$

ist und also

$$\int_{1+h}^{x} s y^{3s-1} e^{-y^s}\, dy < 2\left(e^{-(1+h)^s} + (1+h)^s e^{-(1+h)^s}\right) + (1+h)^{2s} e^{-(1+h)^s}$$
$$< 14(1+h)^{-s},$$

so bekommt man

$$\int_{1+h}^{x} dy \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty [x, y, s, r, n]\, dr < K \frac{s^2}{(1+h)^s}, \tag{45}$$

unter K eine Constante verstanden.

Um endlich das Integral $\int_{1-h}^{1+h}$ zu berechnen, bemerken wir, dass

$$\frac{s^2}{(r+2n)(s+r+2n)(2s+r+2n)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r+2n} - \frac{2}{s+r+2n} + \frac{1}{2s+r+2n}\right)$$

und dass folglich das fragliche Integral in die Form gebracht werden kann:

$$\frac{1}{2}\alpha - \beta + \frac{1}{2}\gamma,$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\alpha = \int_{1-h}^{1+h} s y^{3s-1} e^{-y^s} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty \left(\frac{y}{x}\right)^{r+2n} \frac{dr}{r+2n},$$

$$\beta = \int_{1-h}^{1+h} s y^{3s-1} e^{-y^s} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty \left(\frac{y}{x}\right)^{r+2n} \frac{dr}{s+r+2n},$$

$$\gamma = \int_{1-h}^{1+h} s y^{3s-1} e^{-y^s} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty \left(\frac{y}{x}\right)^{r+2n} \frac{dr}{2s+r+2n}.$$

Da

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\left(\frac{y}{x}\right)^{r+2n}\frac{dr}{r+2n}=\int_{\frac{x}{y}}^{\infty}\frac{dt}{(t^2-1)\,t\log t},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\left(\frac{y}{x}\right)^{r+2n}\frac{dr}{s+r+2n}<\frac{1}{s}\,\frac{y^2}{x^2-y^2}\int_0^{\infty}\left(\frac{y}{x}\right)^{r}dr,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\left(\frac{y}{x}\right)^{r+2n}\frac{dr}{2s+r+2n}<\frac{1}{2s}\cdot\frac{y^2}{x^2-y^2}\int_0^{\infty}\left(\frac{y}{x}\right)^{r}dr$$

und

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{y}{x}\right)^{r}dr=\frac{1}{\log x-\log y}$$

ist, so findet man, nach einer kurzen Rechnung, dass

$$\beta<\frac{K}{sx^2\log x},\quad \gamma<\frac{K}{2sx^2\log x}$$

ist, und dass α unter die Form

$$\alpha=2\cdot\int_x^{\infty}\frac{dt}{(t^2-1)\,t\log t}+\varepsilon$$

gebracht werden kann, wo ε eine kleine Zahl bedeutet, die der Ungleichung

$$\varepsilon<K(1-h)^s+\frac{Kh}{x^2\log x}$$

genügt; unter K ist, wie oben, eine positive Constante verstanden.

Vereinigt man den so für $\int_{1-h}^{1+h}$ enthaltenen Ausdruck mit den früher gefundenen Ungleichungen (43) und (45) so erhält man die folgende Darstellung:

$$\int_x^{\infty}C\,dr=\int_x^{\infty}\frac{dx}{(x^2-1)\,x\log x}+\eta, \tag{46}$$

wo

$$|\eta|<K\left\{\frac{(1-h)^{3s}}{x\log x}+\frac{s^2}{(1+h)^s}+\frac{1}{sx^2\log x}+(1-h)^s+\frac{h}{x^2\log x}\right\} \tag{47}$$

ist.

Um den eingeklammerten Ausdruck möglichst klein zu machen, wählen wir h der Gleichung

$$(1-h)^{s+1}=s^3(x^2-1)\log x$$

gemäss, d. h. wir setzen

$$h=\{s^3(x^2-1)\log x\}^{\frac{1}{s+1}}-1\,.$$

Für diesen Werth ergiebt sich

$$(47') \qquad |\eta| < K_1 \frac{1}{s(x^2-1)\log x} + K_2 \frac{\log s}{s(x^2-1)\log x} + K_3 \frac{\log x}{s(x^2-1)\log x},$$

wo K_1, K_2, K_3 positive Constanten bedeuten.

Hieraus ist ersichtlich, dass das Integral $\int_0^\infty C\,dr$ sich mit wachsendem s der Grenze

$$\int_x^\infty \frac{dx}{(x^2-1)x\log x}$$

nähert und dass schon für $s \geqq 2x\log x$ die Differenz

$$\int_0^\infty C\,dr - \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2-1)x\log x}$$

kleiner ist als

$$\frac{K}{x^3\log x},$$

unter K eine positive Zahl verstanden.

6. Es erübrigt nur noch das Integral $\int_0^\infty D\,dr$ zu betrachten. Wie früher (beim Studium des Integrals $\int_0^\infty C\,dr$) finden wir auch hier, dass die drei Operationen $\int_0^\infty$, $\sum_\varrho$, $\int_0^x$ vertauschbar sind, dass also, wenn zur Abkürzung

$$(48) \qquad R\left(\frac{x}{y}, s, \varrho\right) = \int_0^\infty \left(\frac{y}{x}\right)^{r-\varrho} \frac{s^2\,dr}{(r-\varrho)(s+r-\varrho)(2s+r-\varrho)}$$

gesetzt wird, das betreffende Integral unter der folgenden Form geschrieben werden kann:

$$(49) \qquad \int_0^\infty D\,dr = \sum_\varrho \int_0^\infty s y^{3s-1} e^{-y^s} R\left(\frac{x}{y}, s, \varrho\right) dy,$$

wo die Summation $\sum_\varrho$, wie früher, alle imaginäre Wurzeln der Function $\zeta(s)$ umfasst.

Schon hier bemerken wir, dass diese Summe *absolut* convergirt für alle positiven Werthe von x und s und dass sie *gleichmässig* convergirt in Bezug auf diese Variabeln in jedem Intervalle

(50) $$0 \leqq x \leqq X, \quad 0 \leqq s \leqq S$$

unter X und S beliebige positive Zahlen verstanden.

7. Vereinigen wir jetzt die für die fünf Integrale

$$\int J\,dr, \int A\,dr, \cdots, \int D\,dr$$

gewonnenen Formeln, so bekommen wir die folgende Darstellung des Integrals (16):

(51) $$\int_0^\infty \Psi(x, s, r)\,dr = Li(x) - \log 2 + \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2-1)x\log x}$$
$$+ \omega(x, s) + \sum_\varrho \int_0^x s y^{3s-1} e^{-y^s} R\left(\frac{x}{y}, s, \varrho\right) dy,$$

wo $\omega(x, s)$ eine Function bezeichnet, die den folgenden Bedingungen genügt

(52) $$\lim_{s=\infty} \omega(x, s) = 0$$

und

(53) $$|\omega(x, s)| < \frac{K}{\log x}$$

sobald $s \geqq 2x \log x$, unter K eine positive Constante verstanden.

Diese Formel zusammen mit der früher gewonnenen Formel (13), giebt uns endlich für die Function $f(x)$ die folgende Darstellung:

(54) $$f(x) = Li(x) - \log 2 + \int_x^\infty \frac{dx}{(x^2-1)\,x\log x}$$
$$+ \varepsilon(x, s) + \omega(x, s) + \sum_\varrho \int_0^x s y^{3s-1} e^{-y^s} R\left(\frac{x}{y}, s, \varrho\right) dy,$$

Diese Formel enthält einen willkürlichen Parameter s. Wollte man s in's unendliche wachsen lassen, so würde unsere Formel mit der Riemann'schen Primzahlformel zusammenfallen. In der That, es ist

$$\lim\ \varepsilon(x, s) = 0,$$
$$\lim\ \omega(x, s) = 0;$$

überdies ist

$$\lim R\left(\frac{x}{y}, s, \varrho\right) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(\frac{y}{x}\right)^{r-\varrho} \frac{dr}{r-\varrho}$$

und hieraus folgert man leicht, dass

$$\lim_{s=\infty} \int_0^x s y^{3s-1} e^{-y^s} R\left(\frac{x}{y}, s, \varrho\right) = \int_0^\infty \frac{x^{\varrho-r}\,dr}{r-\varrho};$$

die Function rechts ist aber nichts anderes als die von Riemann mit $-Li(x^{\varrho})$ bezeichnete Function. Wenn man also in jedem Glied der Formel (54) $s = \infty$ setzt, so erhält man einen Ausdruck, der genau mit der Riemann'schen übereinstimmt*).

Durch einen solchen Grenzübergang würden aber zugleich die Vortheile, die die Formel (54) darbietet, verloren gehen. Wie wir sehen werden, beruhen nämlich die Schlüsse, die man aus dieser Formel ziehen kann, wesentlich darauf, dass die Functionen $\varepsilon(x, s)$ und $\omega(x, s)$ schon für $s = 2x \log x$ den Ungleichheiten

$$|\varepsilon(x, s)| < 1 + 3x^{-\frac{2}{3}}, \quad |\omega(x, s)| < \frac{K}{\log x}$$

also auch

$$|\varepsilon(x, s) + \omega(x, s)| < 1 + \frac{A}{\log x} \tag{55}$$

genügen, unter A eine positive Constante verstanden.

Nehmen wir also in der Formel (54)

$$s = 2x \log x \tag{56}$$

und setzen zur Abkürzung

$$T(x, s, \varrho) = \int_0^x s y^{3s-1} e^{-y^s} dy \int_0^\infty \left(\frac{y}{x}\right)^{r-\varrho} \frac{s^2 dr}{(r-\varrho)(s+r-\varrho)(2s+r-\varrho)}, \tag{57}$$

so erhalten wir zunächst das folgende

Theorem. *Die Differenz zwischen der Riemann'schen Primzahlfunction $f(x)$ und den Ausdruck*

$$Li(x) - \log 2 + \int_x^\infty \frac{dx}{(x^2-1)\, x \log x} + \sum_\varrho T(x, 2x \log x, \varrho) \tag{58}$$

ist kleiner als eine gewisse constante Zahl E.

Wir haben dieses Resultat bewiesen unter der Voraussetzung, dass x nicht einer ganzen Zahl gleich ist. Lassen wir diese Einschränkung fallen und bemerken, dass, wenn x einen Werth $x = p^{\lambda}$ nimmt, für welchen der Werth von $f(x)$ sich sprungweise ändert, die Differenz $f(x+0) - f(x-0)$ stets kleiner als 1 ist, so sehen wir dass das obige Theorem ohne alle Einschränkungen gültig bleibt. Betreffend die Constante E, so folgt aus dem obigen, dass sicher

$$E < 3$$

angenommen werden kann, sobald x hinreichend gross ist.

---

*) Es soll bemerkt werden, dass für den hier angedeuteten Uebergang von der Gleichung (54) zur Riemann'schen Formel eine genauere Begründung nothwendig sein würde. Es scheint sogar, als ob man auf diesem Wege einen neuen Beweis dieser Formel *nicht* erhalten könne.

Will man eine noch grössere Annäherung erhalten, was für die asymptotische Frage jedenfalls überflüssig ist, so kann man statt (56) den Werth $s = x^2$ einführen und erhält so das folgende Resultat:

Wenn x fortwährend wächst und nimmer einer ganzen Zahl gleich wird, so nähert sich die Differenz zwischen $f(x)$ und dem Ausdruck

$$Li(x) - \log 2 + \int_x^\infty \frac{dx}{(x^2-1)\,x \log x} + \sum_\varrho T(x, x^2, \varrho) \tag{59}$$

der Grenze **Null**. *Und für ganzzahlige, hinreichend grosse Werthe von x ist diese Differenz sicher kleiner als $1 + \varepsilon$, wo ε eine beliebig kleine positive Zahl bezeichnet.*

Durch diese Ergebnisse ist das Problem gelöst worden, *eine continuirliche Function zu bilden, die die Riemann'sche Function $f(x)$ mit einer genügenden Annäherung darstellt.*

Da nämlich die Reihe $\sum_\varrho T(x, s, \varrho)$ in jedem endlichen Intervalle gleichmässig convergirt, so stellen die Reihen

$$\sum_\varrho T(x, 2x \log x, \varrho) \quad \text{und} \quad \sum_\varrho T(x, x^2, \varrho)$$

continuirliche Functionen von x dar und die erhaltenen Ausdrücke (58) oder (59) sind also auch continuirlich.

8. Um die Art der Convergenz der Reihe

$$\sum_\varrho T(x, s, \varrho) \tag{60}$$

näher kennen zu lernen, verfahren wir folgendermassen: Wir wählen nach Belieben eine positive Zahl h und schreiben das Integral (57) oder

$$T(x, s, \varrho) = \int_0^x s y^{3s-1} e^{-y^s} R\left(\frac{x}{y}, s, \varrho\right) dy,$$

wo

$$R\left(\frac{x}{y}, s, \varrho\right) = \int_0^\infty \left(\frac{y}{x}\right)^{r-\varrho} \frac{s^2 dr}{(r-\varrho)(s+r-\varrho)(2s+r-\varrho)},$$

unter der Form

$$T(x, s, \varrho) = T_1(x, s, \varrho) + T_2(x, s, \varrho)$$

wo

$$T_1(x, s, \varrho) = \int_0^{1+h} s y^{3s-1} e^{-y^s} R\left(\frac{x}{y}, s, \varrho\right) dy,$$

$$T_2(x, s, \varrho) = \int_{1+h}^x s y^{3s-1} e^{-y^s} R\left(\frac{x}{y}, s, \varrho\right) dy.$$

Da der reelle Theil $R\varrho$ von ϱ zwischen den Grenzen 0 und 1 liegt*), so ist

$$|x^\varrho| < x \quad \text{und} \quad \left|\left(\frac{y}{x}\right)^{r-\varrho}\right| < x,$$

vorausgesetzt dass y im Intervalle $1+h \cdots x$ liegt. Das Integral T_2 ist also, absolut genommen, kleiner als das Product

$$x \cdot \int_0^\infty \left|\frac{dr}{(r-\varrho)(s+r-\varrho)(2s+r-\varrho)}\right| \cdot \int_{1+h}^x s^3 y^{3s-1} e^{-y^s} dy,$$

und also ist, wie leicht ersichtlich,

(61) $$|T_2(x, s, \varrho)| < Kxs^2 \frac{1}{|\varrho|^2} \frac{1}{(1+h)^s},$$

wo K eine Constante bezeichnet.

Um eine obere Grenze für $T_1(x, s, \varrho)$ zu finden bemerke man, dass

$$\left|\frac{s^2}{(r-\varrho)(s+r-\varrho)(2s+r-\varrho)}\right| < K\left|\frac{s}{\varrho(s-\varrho)}\right|,$$

$$\left|\left(\frac{y}{x}\right)^{r-\varrho}\right| = |x^\varrho| \cdot y^{-R\varrho} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^r,$$

also, da y im Intervalle $0 \cdots 1+h$ liegt:

$$\left|R\left(\frac{x}{y}, s, \varrho\right)\right| < K_1 \cdot \left|\frac{sx^\varrho}{\varrho(s-\varrho)}\right| \cdot \frac{y^{-R\varrho}}{\log x - \log(1+h)},$$

wo K_1 eine Constante bezeichnet. Da das Integral

$$\int_0^{1+h} sy^{3s-R\varrho-1} e^{-y^s} dy < \int_0^1 sy^{3s-2} dy + \int_1^{1+h} sy^{3s-1} e^{-y^s} dy$$

ist und also, für alle s, kleiner als eine gewisse Constante bleibt, so hat man also

(62) $$|T_1(x, s, \varrho)| < \mathsf{H} \cdot \frac{1}{\log x} \cdot \left|\frac{sx^\varrho}{\varrho(s-\varrho)}\right|,$$

unter H eine Constante verstanden.

Diese Ungleichung, zusammen mit (61) zeigen, dass man schreiben kann

$$|T(x, s, \varrho)| < \mathsf{H} \cdot \frac{1}{\log x} \left|\frac{sx^\varrho}{\varrho(s-\varrho)}\right|$$

und also

(63) $$\sum_\varrho |T(x, s, \varrho)| < \mathsf{H} \cdot \frac{1}{\log x} \cdot \sum_\varrho \left|\frac{sx^\varrho}{\varrho(s-\varrho)}\right|,$$

vorausgesetzt, dass die Constante H hinreichend gross gewählt ist.

---

*) Nach einem bekannten Theorem der Herren de la Vallée Poussin und Hadamard.

Die in dem Ausdrucke (58) vorkommende Reihe

$$\sum_\varrho T(x, 2x \log x, \varrho)$$

convergirt also sicher nicht langsamer als die Reihe

$$(64) \qquad 2\mathrm{H} \cdot \sum_\varrho \left| \frac{x^{\varrho+1}}{\varrho(2x \log x - \varrho)} \right| .$$

Wären die Wurzeln ϱ der Function $\zeta(s)$ bekannt, so würde unsere Formel dazu dienen können, die Function $f(x)$ mit einer beliebigen Annäherung für ein beliebiges Intervall

$$x_0 < x < x_1$$

zu berechnen, und zwar würde hierfür nur erforderlich sein die N ersten Glieder der Reihe zu berechnen, wo N eine Zahl bedeutet, die nur von den Grenzen x_0 und x_1 des gegebenen Intervalles abhängt. Da aber die Convergenz der Reihe (64) um so langsamer wird, je grössere Werthe die Variabele x annimmt, so ist es wahrscheinlich, dass die Zahl N in's unendliche mit x_1 wächst, dass also die Rechnung um so beschwerlicher wird, je grösser man diese obere Grenze macht.

Für exacte Berechnung der Function $f(x)$ scheint unsere Formel also zu unbequem. Dagegen scheint sie für das Studium der Eigenschaften dieser Function von Interesse zu sein und wir werden sehen dass dieselbe insbesondere sehr nützlich ist bei der Untersuchung der asymptotischen Formel

$$f(x) = Li(x).$$

II.

Anwendung auf eine asymptotische Frage.

9. Um die Formel (54) zu beweisen haben wir uns nur auf solche Eigenschaften der Function $\zeta(s)$ gestützt, welche theils von Riemann selbst, theils von Herrn Hadamard streng bewiesen worden sind. Die fundamentale Behauptung Riemann's, dass der reelle Theil jeder imaginären Wurzel von $\zeta(s)$ gleich $\frac{1}{2}$ ist, für welche Behauptung es noch nicht gelungen ist, einen einwurfsfreien Beweis zu erhalten*) haben wir also noch nicht gebraucht. Als eine Anwendung der gewonnenen Resultate wollen wir aber jetzt beweisen, dass, wenn die Riemann'sche Behauptung richtig ist, die Differenz

$$f(x) - Li(x)$$

*) Vgl. die Anmerkung S. 442.

für wachsende x nicht von höherer Ordnung unendlich werden kann, als die Function

(65) $$\sqrt{x} \cdot \log x.$$

Da das Integral

$$\int_x^\infty \frac{dx}{(x^2-1)\, x \log x}$$

für wachsende x gegen Null convergirt, und da nach dem oben bewiesenen die Functionen

$$\varepsilon(x, s), \quad \omega(x, s)$$

für $s \geqq 2x \log x$, absolut genommen, sicher kleiner bleiben als eine constante Grösse, so ergeben die Formeln (54) und (63):

$$|f(x) - Li(x)| < \mathsf{H} \cdot \frac{1}{\log x} \cdot \sum_\varrho \left| \frac{s x^\varrho}{\varrho(s-\varrho)} \right|$$

für

$$s \geqq 2x \log x.$$

Da der reelle Theil $R\varrho$ von ϱ zwischen 0 und 1 liegt, so sieht man leicht dass für $s > 2$

$$|s - \varrho| > \frac{s}{2} \quad \text{und} \quad |s - \varrho| > |\varrho|$$

ist; wählt man eine positive Grösse $\sigma < 1$, so kann man also schreiben

$$\left| \frac{s}{\varrho(\varrho - s)} \right| = s^\sigma \left| \frac{s^{1-\sigma}}{\varrho(\varrho - s)} \right| < 2 s^\sigma \left| \frac{1}{\varrho^{1+\sigma}} \right|.$$

Nach der Hypothese

$$R\varrho = \frac{1}{2}$$

oder

$$|x^\varrho| = \sqrt{x}$$

ergiebt sich also

$$|f(x) - Li(x)| < 2\mathsf{H} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\log x} \cdot s^\sigma \cdot \sum_\varrho \left| \frac{1}{\varrho^{1+\sigma}} \right|.$$

Da aber nach den Untersuchungen der Herren von Mangoldt und de la Vallée Poussin*)

$$\sum_\varrho \left| \frac{1}{\varrho^{1+\sigma}} \right| < \frac{\alpha}{\sigma^2}$$

ist, wo α eine Constante bedeutet, so folgt hieraus indem man

*) Siehe de la Vallée Poussin, loc. cit. p. 42.

$$s = 2x \log x, \qquad \sigma = \frac{1}{\log x}$$

wählt, dass

$$|f(x) - Li(x)| < \mathsf{K} \cdot \sqrt{x} \cdot \log x$$

ist. Hierdurch ist die oben ausgesprochene Behauptung bewiesen.

Dass dasselbe Resultat auch für die Function $F(x)$ gültig ist, welche die Anzahl aller Primzahlen $< x$ angiebt, folgt unmittelbar aus der Thatsache, dass die Differenz $f(x) - F(x)$ von nicht höherer Ordnung als $\sqrt{x}$ ist.

Ueber den Rauminhalt.

Von

M. Dehn in Karlsruhe.

Inhalt.

Einleitung.

Allgemeines über den Inhaltsbegriff und Ziel der vorliegenden Arbeit.

Bei der Betrachtung des Inhaltes geometrischer Gebilde sind im Allgemeinen weder vom praktischen noch rein mathematischen Standpunkte Begriffe infinitesimaler Natur auszuschliessen. Um so bemerkenswerther ist die bekannte Thatsache, dass man den Inhalt ebener gradliniger Figuren ohne irgend eine Stetigkeitsbetrachtung befriedigend behandeln kann*). Hierbei wird folgende Definition zu Grunde gelegt:

Zwei Polygone P' und P'' sind inhaltsgleich, wenn aus ihnen durch geeignetes Hinzufügen respectiv congruenter Polygone zwei Polygone $\bar{P}'$ und $\bar{P}''$ entstehen, die in resp. congruente Polygone zerlegt werden können.

Die mittels dieser Definition begründete Lehre vom Inhalte ist aber befriedigend zu nennen, weil es (übrigens ohne Benutzung der Stetigkeitsaxiome) nachzuweisen gelingt:

*) Siehe vor Allem, D. Hilbert, Grundlagen d. Geom. 1899.

Die Polygone P' und P'' sind stets dann und nur dann nach der obigen Definition inhaltsgleich, wenn das Inhaltsmass von P' gleich dem Inhaltsmasse von P'' ist, wobei das Inhaltsmass eines Polygones im wesentlichen folgende Eigenschaften hat: a) Das Inhaltsmass ist für jedes Polygon vollkommen bestimmt und hat die Eigenschaften einer messenden Grösse. b) Das Inhaltsmass des Complexes P zweier Polygone P' und P'' ist gleich der Summe der Inhaltsmasse von P' und P''. (Das Inhaltsmass von P entspricht dem, was man gewöhnlich Inhalt von P nennt.)

Die analoge Definition für Polyeder heisst:

Zwei Polyeder Π' und Π'' sind inhaltsgleich, wenn aus ihnen durch geeignetes Hinzufügen resp. congruenter Polyeder zwei Polyeder $\overline{\Pi}'$ und $\overline{\Pi}''$ hervorgehen, die ihrerseits in resp. congruente Polyeder zerlegbar sind. — Das so definirte „inhaltsgleich" charakterisiren wir durch die Bezeichnung: „Endlichgleich"*).

Man kann dann nachweisen: Zwei Polyeder sind *nur* dann inhaltsgleich, wenn sie gleiches Inhaltsmass haben (dabei entspricht das Inhaltsmass von Π dem was man gewöhnlich kurz Inhalt von Π nennt). Aber es ist bisher noch nicht gelungen, zu zeigen, dass die Gleichheit des Inhaltsmasses auch eine *hinreichende* Bedingung für die Endlichgleichheit zweier Polyeder ist, wie es doch in der Ebene der Fall ist. *Vielmehr soll in der vorliegenden Arbeit bewiesen werden***): Die Gleichheit des Inhaltsmasses genügt nicht, damit zwei Polyeder endlichgleich sind. Man kann noch andere nothwendige Bedingungen aufstellen, welche einen von der ersteren Bedingung wesentlich verschiedenen Charakter besitzen und es können z. Bsp. eine Pyramide und ein Prisma mit derselben Grundfläche und ein Drittel der Höhe durchaus nicht immer in congruente Polyeder zerlegt oder durch Hinzufügen congruenter Polyeder zu solchen Polyedern ergänzt werden, für die ihrerseits eine Zerlegung in congruente Polyeder möglich ist.

Wegen dieses Resultates ist die Definition von „inhaltsgleich" durch „endlichgleich" zu verwerfen und es erscheint eine befriedigende Grundlegung der Lehre vom Polyederinhalte bei Vermeidung unendlicher Processe als ausgeschlossen, was bei der anscheinend elementaren Natur dieses Begriffes ziemlich überraschend ist.

---

*) Diese Bezeichnung verdanke ich einer mündlichen Mittheilung des Herrn Liebmann.

**) Das Problem, das durch die vorliegende Arbeit erledigt wird, gehört zu den 23 Problemen, die von D. Hilbert in seinem Pariser Vortrag (Gött. Nachr. 1900, Heft 8) aufgestellt sind.

Ganz ähnliche, charakteristische Unterschiede zwischen ebener und räumlicher Geometrie bestehen auch in den Nicht-Euklidischen Geometrien, wie in einem weiteren Artikel gezeigt werden soll.

§ 1.

Zerlegungsgleiche und ergänzungsgleiche Polyeder. — Die analogen Verhältnisse in der Ebene liefern uns den Ausgangspunkt für den Beweis.

Ein specieller Fall davon, dass die Polyeder Π' und Π'' endlichgleich sind, ist der, dass sie selbst in resp. congruente Polyeder zerlegt werden können; in diesem Falle nennen wir Π' und Π'' *zerlegungsgleich**) andernfalls aber *ergänzungsgleich**). Wir wollen zunächst nur die Zerlegungsgleichheit untersuchen.

Um die Bedingungen für die Zerlegungsgleichheit zu finden, betrachten wir die analogen Verhältnisse in der Ebene. Ein Polygon P sei in beliebiger Weise in Polygone zerlegt. Die Winkel der Theilpolygone ergänzen sich nun, wie man sofort sieht, zu $4R$, $2R$ oder zu einem Winkel des Polygons P selbst. Bezeichnen wir also mit W die Summe der Winkel der Theilpolygone, mit S die Summe der Winkel von P, so ist:

$$S + 2nR = W.$$

Haben wir nun zwei Polygone P' und P'', die in resp. congruente Polygone zerlegt werden können (also zerlegungsgleich sind), so muss in entsprechender Bezeichnungsweise:

$$S' + 2n'R = W' \qquad W'' = S'' + 2n''R$$

$$W' \text{ identisch mit } W''$$

oder:

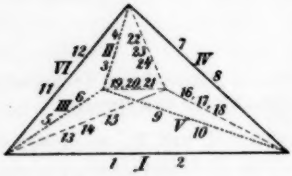
$$S' \equiv S'' \pmod{2R}$$

sein. Es ist bemerkenswerth, dass wir diese Beziehung allein mit Hülfe der Axiome der „Analysis situs“ abgeleitet haben. Die Formel ist offenbar trivial für den Fall der gewöhnlichen Geometrie, liefert aber z. B. eine bekannte Bedingung für die Inhaltsgleichheit sphärischer Polygone.

Können wir eine ähnliche Betrachtung im Raume machen? Ein Polyeder Π sei in beliebiger Weise in Polyeder zerlegt. Die Flächenwinkel der Theilpolyeder ergänzen sich offenbar wieder zu $4R$, $2R$, oder zu einem Flächenwinkel von Π selbst. Aber dazu müssen wir sowohl die

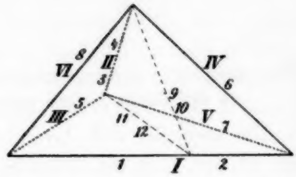
*) Auch diese Ausdrücke verdanke ich Herrn Liebmann. Statt „zerlegungsgleich“ ist in meiner Note in den Göttinger Nachrichten 1900 die Bezeichnung „raumgleich“ gewählt, die der in der Ebene üblichen Bezeichnung „flächengleich“ für zerlegungsgleiche Polygone entspricht. In dieser Note ist bereits der Fall der Zerlegungsgleichheit, in etwas anderer Weise wie in der vorliegenden Arbeit, erledigt.

Flächenwinkel der Theilpolyeder als auch von Π mehrfach zählen, wie durch die Figuren (1, 2, 3) erläutert wird. Bezeichnen wir also die Flächenwinkel von Π mit $\pi_1, \pi_2, \cdots$ die Flächenwinkel der Theilpolyeder



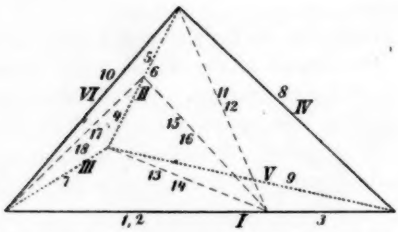
$\tau_1+\tau_2+\cdots+\tau_{24}=\pi_1+\pi_2+\cdots+\pi_6+4\cdot 4R$

Fig. 1.



$\tau_1+\tau_2+\cdots+\tau_{12}=2\pi_1+\pi_2+\cdots+\pi_6+2\cdot 2\cdot R$

Fig. 2.



$\tau_1+\tau_2+\tau_3+\tau_4+\tau_5+2\tau_6+\tau_7+\tau_8+\cdots+\tau_{18}=2\pi_1+2\pi_2+\pi_3+\cdots+\pi_6+4\cdot 2R.$

Fig. 3.

mit τ_1, τ_2 und mit $L(x_1, x_2, \cdots)$, $\Lambda(x_1, x_2, \cdots)$ lineare, homogene, ganzzahlige Functionen der Argumente, so haben wir:

$$L(\pi_1, \pi_2, \cdots 2R) = \Lambda(\tau_1, \tau_2, \cdots).$$

Sind nun Π' und Π'' zerlegungsgleich, so haben wir in entsprechender Bezeichnungsweise:

$$L'(\pi_1', \pi_2', \cdots 2R) = \Lambda'(\tau_1, \tau_2, \cdots),$$
$$L''(\pi_1'', \pi_2'', \cdots 2R) = \Lambda''(\tau_1, \tau_2, \cdots).$$

Aus diesen Gleichungen kann man direct die Winkel τ nicht eliminiren und eine Beziehung zwischen den Winkeln π aufstellen. Aber wir werden zeigen, dass man Λ' und Λ'' auf mannigfache Weise variiren und im speciellen so finden kann, dass

$$L'(\pi_1', \pi_2', \cdots 2R) = \Lambda'(\tau_1, \tau_2, \cdots), \quad \Lambda''(\tau_1, \tau_2, \cdots) = L''(\pi_1'', \pi_2'', \cdots 2R),$$
$$\Lambda'(\tau_1, \tau_2, \cdots) \text{ identisch mit } \Lambda''(\tau_1, \tau_2, \cdots)$$

ist, woraus

$$L'(\pi_1', \pi_2', \cdots) \equiv L''(\pi_1'', \pi_2'', \cdots) \pmod{2R}$$

folgt, welches eine erste Form der gesuchten Bedingung (s. S. 474) für die Zerlegungsgleichheit zweier Polyeder ist.

§ 2.

Abbildung der Zerlegung eines Polyeders auf die „Theilungsfläche“.

Zum Beweise ist es vor Allem nöthig, eine klare Anschauung von der Zerlegung eines Polyeders zu gewinnen: Sei das Polyeder Π in beliebiger Weise in Polyeder zerlegt. Wir bezeichnen die Flächenwinkel von Π mit $\pi_1, \pi_2, \cdots$, die entsprechenden Kanten mit $p_1, p_2, \cdots$, die Flächenwinkel der Theilpolyeder mit $\tau_1, \tau_2, \cdots$, die zugehörigen Kanten mit $t_1, t_2, \cdots$. Wir betrachten eine beliebige Kante t_i und wollen sie nach beiden Richtungen, solange die beiden Verlängerungen von Kanten $t_k, t_l, \cdots$ *lückenlos* bedeckt werden, etwa bis zu den Punkten A und B verlängern (s. Fig. 4). Dann giebt es der Definition gemäss keine Kante t_m,

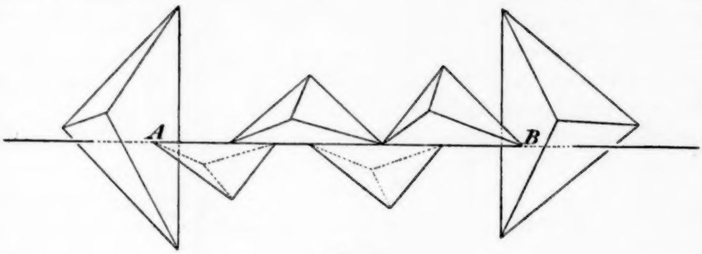


Fig. 4.

die mit AB mehr als einen Punkt gemeinsam hat und doch nicht ganz innerhalb AB liegt. Denn sonst könnte ich t_i noch über A oder B hinaus verlängern, so dass die Verlängerung lückenlos von Kanten

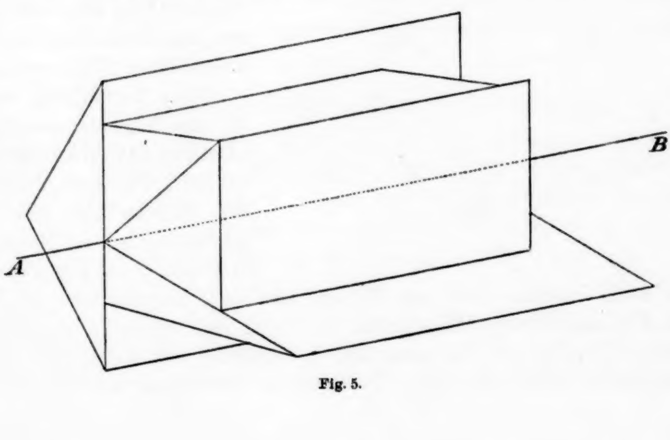


Fig. 5.

$t_k . t_l, \cdots t_m$ überdeckt würde. *Die Gesammtheit aller Kanten t_i, t_k, t_l, die auf der Strecke AB liegen, bezeichnen wir kurz als den „Kantenzug AB“.*

Die Strecke AB wird in ihrem Verlaufe bald in Flächen von Theilpolyedern (Fig. 5) oder von Π selbst verlaufen, bald mit Kanten von Π zusammenfallen (ohne das AB selbst Kante von Π ist, kann das natürlich nur vorkommen, wenn Π nicht überall convex ist), oder auch streckenweise nur mit Kanten von Theilpolyedern zusammenfallen (Fig. 6); berück-

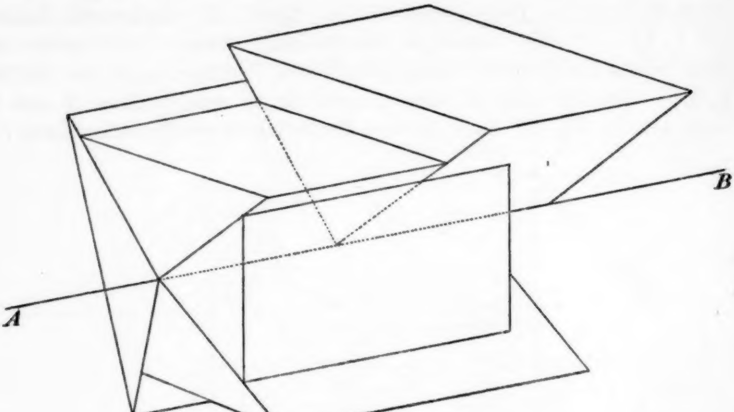


Fig. 6.

sichtigen wir dann, dass das Innere von Π definitionsgemäss lückenlos von Theilpolyedern erfüllt ist, so ist ersichtlich, dass die Flächenwinkel, die zu den Kanten des Kantenzuges AB gehören, sich an jeder Stelle von AB zu $2R, \pi_i$ oder $4R$ ergänzen, je nachdem einer der oben aufgezählten Fälle vorliegt.

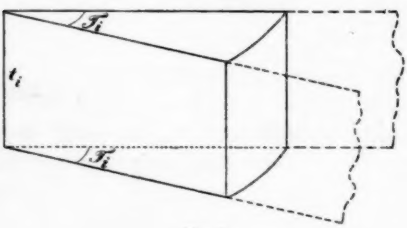


Fig. 7.

Diese Verhältnisse wollen wir uns folgendermassen veranschaulichen: Wir bezeichnen ein Stück der Ebene, das durch eine Strecke PQ und zwei (Halb)Strahlen der Ebene, die in P und Q auf PQ senkrecht und nach derselben Seite von PQ gerichtet sind, begrenzt wird, als einen von PQ ausgehenden Halbstreifen. Jeden zu einer Kante t_i des Kantenzuges AB gehörigen Flächenwinkel τ_i begrenzen wir durch zwei von t_i ausgehende Halbstreifen (Fig. 7). Sodann beschreiben wir um AB als

Axe einen geraden Kreiscylinder mit dem Radius 1. Infolge des Schnittes der Halbstreifen mit dieser Cylinderfläche wird eine Kante und der zugehörige Flächenwinkel stets repräsentirt durch ein Stück der Cylinderfläche, das wir eine rechtwinklige *Cylinderplatte* nennen wollen. Ein solches Flächenstück wird begrenzt durch zwei Erzeugende und zwei Breitenkreise des Cylinders, seine Höhe ist gleich der Länge der Kante, seine Breite gleich dem Flächenwinkel, welche die Platte gleichzeitig repräsentirt. Alle diese „Platten" setzen einfach und lückenlos einen Theil der Cylinderfläche zusammen, der die Cylinderfläche vollständig überdeckt, solange auf AB nur Kanten von Theilpolyedern liegen (Fig. 6), der aber rechtwinklige Ausschnitte von der Breite $2R$ resp. $4R - \pi_i$ besitzt, jenachdem AB in Flächen von Theilpolyedern (Fig. 5) und von Π selbst fällt oder Kanten von Π in sich aufnimmt. Die Höhe des Ausschnittes von der Breite $4R - \pi_i$ ist offenbar gleich der zu π_i gehörigen Kante p_i von Π.

Aehnliche Flächen gewinnen wir, indem wir andere, nicht zum Kantenzuge AB gehörige Kanten herausgreifen, die respectiven Kantenzüge bilden und dieselben auf Einheitscylinder abbilden. Alle diese Flächen wollen wir irgendwie der Länge nach auf einander setzen und so zu einer Fläche T vereinigen, die uns ein einfaches, unseren Anforderungen vollkommen genügendes Bild der Theilung von Π liefert. Und um noch einmal zu recapituliren:

Repräsentiren wir jedes zusammengehörige Paar Kante t_i und Flächenwinkel τ_i durch eine rechtwinklige Cylinderplatte, die zu einem Cylinder mit dem Radius 1 gehört, deren Höhe gleich der Kante t_i, deren Breite gleich dem Winkel τ_i ist, so können wir aus der Gesammtheit dieser Platten einfach und lückenlos eine Fläche T aufbauen. Diese Fläche T ist ein Stück der Oberfläche des Einheitscylinders, das rechtwinklige Ausschnitte von der Breite $2R$ und $4R - \pi_i$ besitzt. Die Höhe des Ausschnittes von der Breite $4R - \pi_i$ ist gleich p_i.

§ 3.

Zurückführung des Problems auf ein zweidimensionales.

Angenommen nun, wir hätten zwei zerlegungsgleiche Polyeder Π' und Π'', es gäbe also eine Zerlegung von Π' und Π'' in resp. congruente Polyeder. Wir führen diese Zerlegung bei Π' und Π'' aus und operiren mit jedem der beiden Polyeder, wie oben mit dem Polyeder Π.

Aus den Cylinderplatten als Repräsentanten der Paare von Kante und Flächenwinkel entstehen zwei Flächen T' und T''. Aber nach Voraussetzung sind die T' und T'' zusammensetzenden Platten paarweise congruent, da die Theilpolyeder paarweise congruent sind. Und so haben wir unser dreidimensionales Problem auf das zweidimensionale zurückgeführt:

Zwei Einheitscylinderflächen T' und T'', mit rechtwinkligen Ausschnitten, sind aus rechtwinkligen Cylinderplatten aufgebaut. Welche Bedingung besteht für die Breiten der Ausschnitte, damit die beiden Flächen T' und T'' aus demselben Material von Platten aufgebaut werden können.

§ 4.

Flächeninhalt der Theilungsfläche.

Wir betrachten die Theilungsfläche T eines beliebig getheilten Polyeders Π. Bezeichnen wir die Höhe der Ausschnitte von der Breite $2R$ mit $h_1, h_2, \cdots$, die Höhe des Cylinders selbst, dessen Theil T ist, mit h, so ist offenbar die Summe der Oberflächeninhalte der Platten und Ausschnitte gleich dem Oberflächeninhalt des Cylinders. Also:

$$(1) \qquad \tau_1 t_1 + \tau_2 t_2 + \cdots + (4R - \pi_1) p_1 + (4R - \pi_2) p_2 + \cdots$$
$$\cdots + (h_1 + h_2 + \cdots) 2R = 4R \cdot h.$$

Wir denken uns nun unter Festhaltung der Breite der Platten und Ausschnitte, die Höhe derselben, sowie die Höhe des Cylinders ein wenig geändert. Es ist klar, dass wir diese Aenderung so zweckmässig einrichten können, dass auch die variirten Platten und Ausschnitte den variirten Cylinder einfach und lückenlos überdecken und also auch für die abgeänderten Höhen die obige Gleichung (1) gilt. Welche Bedingungen haben wir zu erfüllen, damit die Aenderung diese Eigenschaft hat?

Sei

$$(A) \qquad \begin{cases} l_1(t_1, t_2 \cdots p_1, p_2 \cdots h_1, h_2 \cdots h) = 0, \\ l_2(t_1, t_2 \cdots p_1, p_2 \cdots h_1, h_2 \cdots h) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

das System der von einander unabhängigen, linearen und homogenen Gleichungen mit rationalen Coefficienten zwischen den Grössen

$$t_1, t_2 \cdots p_1, p_2 \cdots h_1, h_2 \cdots h.$$

Wir behaupten: Aendert man diese Grössen so ab, dass sie nicht aufhören positiv zu bleiben und den Gleichungen (A) Genüge zu leisten, so bedecken die abgeänderten Platten und Ausschnitte einfach und lückenlos den abgeänderten Cylinder.

Zunächst leuchtet die Existenz eines solchen Grössensystems ein. Denn man kann die Gleichungen (A) durch Grössen

$$\bar{t}_1, \bar{t}_2 \cdots \bar{p}_1, \bar{p}_2 \cdots \bar{h}_1, \bar{h}_2 \cdots \bar{h}$$

befriedigen, die beliebig wenig von den Grössen $t_1, t_2 \cdots$ abweichen und also wie diese positiv sind. Die beabsichtigte Veränderung des Platten-

gefüges stellt man sich nun in folgender Weise anschaulich vor: Der senkrechte Abstand eines Punktes P auf einer Querkante einer Platte von dem oberen Rande des Cylinders möge vor der Aenderung gleich $t_i + t_k + \cdots$ sein d. i. gleich der Summe der Höhen derjenigen Platten und Ausschnitte, die die Cylindererzeugende durch P zwischen P und dem oberen Cylinderrande durchschneidet. Wir bestimmen jetzt, dass P nach der Aenderung den Abstand $\bar{t}_i + \bar{t}_h + \cdots$ vom oberen Cylinderrande haben soll. Durch diese Bestimmung wird erreicht, dass Punkte, die vorher auf ein und demselben Breitenkreis gelegen haben, auch nachher auf demselben Breitenkreis liegen. Denn war vorher:

$$t_i + t_h + \cdots = t_r + t_s + \cdots,$$

so wird, wegen Erfüllung des Gleichungssystems (A) nach der Aenderung

$$\bar{t}_i + \bar{t}_h + \cdots = \bar{t}_r + \bar{t}_s + \cdots$$

sein, was bedeutet, dass die entsprechenden Punkte denselben Abstand vom oberen Cylinderrande haben. Es entsteht also wieder ein Plattengefüge mit Ausschnitten wie vorher. Die einzelnen Platten aber haben ersichtlich, wie verlangt, statt der Höhen $t_1, t_2 \cdots$ die Höhen $\bar{t}_1, \bar{t}_2 \cdots$ erhalten, die Ausschnitte die Höhen $\bar{h}_1, \bar{h}_2 \cdots$ und der Cylinder die Höhe $\bar{h}$. Also erfüllen auch die Grössen $\bar{t}_1 \cdots \bar{p}_1 \cdots \bar{h}_1 \cdots \bar{h}$ die Gleichung (1). Wegen des geometrischen Nachweises mussten wir die Grössen $\bar{t}_1$ etc. positiv wählen. Analytisch folgt aber dann, weil die Gleichungen (A) und (1) linear sind, sofort der Satz:

Alle Systeme von Grössen (einerlei ob diese alle positiv sind oder nicht) *die das System von* (A) *befriedigen, erfüllen auch* (1). (*Die Gleichung* (1) *folgt aus dem System* (A)).

Nun ist aber evident, dass irgend ein System von linearen homogenen Gleichungen mit ganzen Coefficienten, wenn überhaupt, sich jedenfalls auch durch ein System von rationalen Zahlen erfüllen lässt. Wir können also die Gleichungen des Systems (A) befriedigen, indem wir statt $t_1, t_2, \cdots p_1, p_2, \cdots h_1, h_2, \cdots h$ rationale Zahlen etwa

$$r_{t_1}, r_{t_2}, \cdots r_{p_1}, r_{p_2}, \cdots r_{h_1}, r_{h_2}, \cdots r_h$$

setzen.

Mittels unseres eben bewiesenen Satzes folgt dann aus Gleichung (1)

$$r_{t_1}\tau_1 + r_{t_2}\tau_2 + \cdots + r_{p_1}(4R - \pi_1) + r_{p_2}(4R - \pi_2) + \cdots$$
$$\cdots + (r_{h_1} + r_{h_2} + \cdots)2R = r_h 4R$$

oder

(I) $$r_{t_1}\tau_1 + r_{t_2}\tau_2 + \cdots = r_{p_1}\pi_1 + r_{p_2}\pi_2 + \cdots + rR;$$

aus dieser Gleichung erhalten wir durch Multiplication beider Seiten mit einer passenden ganzen Zahl eine Gleichung mit ganzzahligen Coefficienten, deren Existenz wir schon auf Seite 468 behauptet haben.

§ 5.

Bedingungen für die Zerlegungsgleichheit zweier Polyeder. — Beispiel: Es ist nicht möglich durch Zerschneiden und Zusammensetzen ein reguläres Tetraeder in zwei reguläre Tetraeder zu verwandeln.

Jetzt betrachten wir wieder zwei zerlegungsgleiche Polyeder Π' und Π'' und die Theilungsflächen T' und T'', die aus resp. gleichen Platten (Kanten t_i und Flächenwinkel τ_i) aufgebaut sind. Wir haben entsprechend dem System (A) die beiden Systeme:

$$(\mathrm{A}') \qquad \begin{cases} l_1'(t_1, t_2 \cdots p_1', p_2' \cdots h_1', h_2' \cdots h') = 0, \\ l_2'(t_1, t_2 \cdots p_1', p_2' \cdots h_1', h_2' \cdots h') = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{cases}$$

$$(\mathrm{A}'') \qquad \begin{cases} l_1''(t_1, t_2 \cdots p_1'', p_2'' \cdots h_1'', h_2'' \cdots h'') = 0, \\ l_2''(t_1, t_2 \cdots p_1'', p_2'' \cdots h_1'', h_2'' \cdots h'') = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \,. \end{cases}$$

Erfüllen wir beide Systeme gleichzeitig durch ein System von rationalen Zahlen:

$$r_{t_1}, r_{t_2} \cdots \begin{cases} r_{p_1'}, r_{p_2'}, \cdots r_{h_1'}, r_{h_2'}, \cdots r_{h'} \\ r_{p_1''}, r_{p_2''}, \cdots r_{h_1''}, r_{h_2''}, \cdots r_{h''} \end{cases},$$

so erhalten wir entsprechend der Gleichung (I) zwei Gleichungen

$$(\mathrm{I}') \qquad r_{t_1}\tau_1 + r_{t_2}\tau_2 + \cdots = r_{p_1'}\pi_1' + r_{p_2'}\pi_2' + \cdots + r' \cdot R,$$

$$(\mathrm{I}'') \qquad r_{t_1}\tau_1 + r_{t_2}\tau_2 + \cdots = r_{p_1''}\pi_1'' + r_{p_2''}\pi_2'' + \cdots + r'' \cdot R.$$

Hieraus ergiebt sich sofort:

$$r_{p_1'}\pi_1' + r_{p_2'}\pi_2' + \cdots - (r_{p_1''}\pi_1'' + r_{p_2''}\pi_2'' + \cdots) = r \cdot R.$$

Multipliciren wir beide Seiten dieser Gleichung mit einer geeigneten ganzen Zahl, so erhalten wir die Congruenz, die wir auf Seite 468 als aufzufinden bezeichnet haben. Ihre Wichtigkeit besteht darin, dass sie eine nothwendige Relation zwischen den Flächenwinkeln zweier zerlegungsgleicher Polyeder darstellt.

Wir wollen nun noch die rationalen Coefficienten der obenstehenden Gleichung bestimmen. Sei:

$$(B)\qquad \begin{cases} L_1(p_1', p_2' \cdots p_1'', p_2'' \cdots) = 0, \\ L_2(p_1', p_2' \cdots p_1'', p_2'' \cdots) = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{cases}$$

das System der von einander unabhängigen in $p_1' \cdots p_1'' \cdots$ linearen und homogenen Gleichungen mit rationalen Coefficienten. Jedes rationale Lösungssystem der Gleichungen (B) wird Theil eines rationalen Lösungssystems von (A′, A″), und umgekehrt wird jedes rationale Lösungssystem von (A′, A″) die Gleichungen (B) befriedigen. Zur Bestimmung der Grössen $r_{p_1'} \cdots r_{p_1''} \cdots$ genügt also das Gleichungssystem (B), in dem nur die als gegeben anzusehenden Längen der Kanten der beiden Polyeder Π' und Π'' vorkommen. Die vorhin gewonnene Bedingung können wir demgemäss so präcisiren:

Sind zwei Polyeder Π' und Π'' zerlegungsgleich (d. i. in resp. gleiche Polyeder zerlegbar), so erfüllt jedes System von rationalen Zahlen $r_{p_1'} \cdots r_{p_1''} \cdots$, das die Gleichungen (B) *befriedigt, auch die Gleichung:*

$$\text{(II)}\qquad r_{p_1'}\pi_1' + r_{p_2'}\pi_2' + \cdots - (r_{p_1''}\pi_1'' + r_{p_2''}\pi_2'' + \cdots) = rR.$$

Dass diese Bedingung für zwei zerlegungsgleiche Polyeder nicht aus der Gleichheit ihres Inhaltsmasses folgt, habe ich schon früher*) gezeigt. Z. B. wurde nachgewiesen, dass ein reguläres Tetraeder und ein Prisma die obige Bedingung nicht erfüllen, die in diesem speciellen Falle fordert, dass der Flächenwinkel des regulären Tetraeders in rationalem Verhätniss zum Vollwinkel steht. Dies ist, wie an dem angeführten Orte gezeigt ist, nicht der Fall. Dies Ergebniss wollen wir in folgendem einfachen Beispiele verwerthen:

Wir behaupten: *Es ist nicht möglich durch Zerschneiden und Zusammensetzen ein reguläres Tetraeder in zwei reguläre Tetraeder zu verwandeln.*

Beweis: Wir nehmen an, wir hätten ein reguläres Tetraeder mit der Kante a, das wir in zwei reguläre Tetraeder mit den Kanten b resp. c überführen könnten. Wir haben dann drei Fälle zu unterscheiden, je nachdem das System (B) der linearen rationalen Beziehungen zwischen a, b und c aus zwei Gleichungen oder einer Gleichung besteht oder endlich überhaupt keine lineare rationale Beziehung zwischen a, b und c existirt.

1ter Fall: Das Inhaltsmass eines Tetraeders mit der Kante p ist gleich $\frac{p^3}{12}\sqrt{2}$. Da nun das Inhaltsmass zerlegungsgleicher Polyeder gleich ist, so muss

$$a^3 = b^3 + c^3$$

sein. Aus dem bekannten Satze aus der Zahlentheorie folgt sofort, dass

*) Göttinger Nachrichten 1900.

der erste Fall, bei dem nach Voraussetzung a, b und c in rationalem Verhältnisse stehen, unmöglich ist. Aber auch ohne Zuhülfenahme dieses Satzes gelingt es einen Widerspruch zu construiren. Sei nämlich

$$b = r_1 a, \quad c = r_2 a,$$

wo r_1 und r_2 rationale Zahlen sind, so werden diese Gleichungen erfüllt, wenn wir a gleich 1, b gleich r_1, c gleich r_2 setzen. Die Gleichung (II) lautet dann, wenn der Flächenwinkel des regulären Tetraeders τ ist:

$$\tau - (r_1\tau + r_2\tau) = rR$$

oder

$$\tau(1 - r_1 - r_2) = rR;$$

da aber τ nach dem oben angeführten Ergebniss zum Vollwinkel in keinem rationalen Verhältniss steht, so folgt aus dieser Gleichung:

$$1 = r_1 + r_2.$$

Es ist aber

$$b + c = (r_1 + r_2)a,$$

also müsste

$$a = b + c$$

sein, eine Gleichung, die mit der Gleichung

$$a^3 = b^3 + c^3$$

in Widerspruch steht.

2ter Fall: Sei

$$r_1 a = r_2 b + r_3 c,$$

eine lineare rationale Beziehung, zwischen den drei Kanten, in der auch eine der Grössen r_1, r_2, r_3 gleich Null sein kann. Seien a) r_1, r_2 und r_3 von Null verschieden, dann kann ich die Gleichung befriedigen, indem ich a gleich r_2, b gleich r_1 und c gleich Null setze. Dann heisst die Gleichung (II):

$$r_2\tau - r_1\tau = rR,$$

daraus folgt wiederum wie vorher r_2 gleich r_1. Setzen wir ferner b gleich Null, a gleich r_3, c gleich r_1, so folgt ebenso r_3 gleich r_1. Folglich bestände die Beziehung

$$a = b + c,$$

die unmöglich ist.

Sei b) eine der drei Grössen r_1, r_2, r_3 gleich Null oder, um gleich den dritten Fall zu erledigen, seien alle drei Grössen gleich Null. Sei etwa r_1 gleich Null, so kann ich das Gleichungssystem (B) befriedigen, wenn ich für b und c Null, für a 1 setze. Dann lautet die Gleichung (II):

$$\tau = rR,$$

was nicht richtig ist. Damit haben wir unsere Behauptung bewiesen.

§ 6.

Die Bedingungen für die Zerlegungsgleichheit gelten auch für den allgemeinen Fall der Endlichgleichheit von Polyedern. — Gleichheit des Inhaltsmasses nicht ausreichend für die Endlichgleichheit.

Zwei Polyeder Π' und Π'' seien gegeben. Fügen wir die beiden zerlegungsgleichen Polyeder Σ' und Σ'' zu Π' resp. Π'' hinzu, so mögen zwei zerlegungsgleiche Polyeder $\overline{\Pi}'$ und $\overline{\Pi}''$ entstehen. In diesem Falle bezeichnen wir, wie schon oben bemerkt, Π' und Π'' als ergänzungsgleich. Welche Bedingungen sind zu erfüllen? Seien

$$(\mathrm{B}_\Sigma)\qquad \begin{cases} l_1(s_1', s_2' \cdots s_1'', s_2'' \cdots) = 0, \\ l_2(s_1', s_2' \cdots s_1'', s_2'' \cdots) = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{cases}$$

und

$$(\mathrm{B}_{\overline{\Pi}})\qquad \begin{cases} \bar{l}_1(p_1', p_2' \cdots p_1'', p_2'' \cdots s_1', s_2' \cdots s_1'', s_2'' \cdots) = 0, \\ \bar{l}_2(p_1', p_2' \cdots p_1'', p_2'' \cdots s_1', s_2' \cdots s_1'', s_2'' \cdots) = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{cases}$$

die dem Gleichungssystem (B) entsprechenden Systeme. Dann muss jedes rationale Lösungssystem $r_{s_1'}, r_{s_2'} \cdots r_{s_1''}, r_{s_2''} \cdots$ von (B_Σ) die Gleichung:

$$(\mathrm{II}_\Sigma)\qquad r_{s_1'}\sigma_1' + r_{s_2'}\sigma_2' + \cdots - (r_{s_1''}\sigma_1'' + r_{s_2''}\sigma_2'' + \cdots) = r_s R$$

befriedigen, wo r_s eine je nach dem Lösungssystem verschiedene rationale Zahl ist. Ebenso befriedigt jedes rationale Lösungssystem von $(\mathrm{B}_{\overline{\Pi}})$ die Gleichung:

$$(\mathrm{II}_{\overline{\Pi}})\qquad \begin{aligned} & r_{p_1'}\pi_1' + r_{p_2'}\pi_2' + \cdots + r_{s_1'}\sigma_1' + r_{s_2'}\sigma_2' + \cdots \\ & \cdots - (r_{p_1''}\pi_1'' + r_{p_2''}\pi_2'' + \cdots + r_{s_1''}\sigma_1'' + r_{s_2''}\sigma_2'' \cdots) = r_{\bar{p}} R. \end{aligned}$$

Sei nun ferner

$$(\mathrm{B}_\Pi)\qquad \begin{cases} L_1(p_1', p_2' \cdots p_1'', p_2'' \cdots) = 0, \\ L_2(p_1', p_2' \cdots p_1'', p_2'' \cdots) = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{cases}$$

das dem System (B) entsprechende System für Π' und Π''. Für jedes rationale Lösungssystem von (B_Π) können wir ein rationales Lösungssystem von (B_Σ) und also auch von (II_Σ) finden, so dass die beiden Systeme zusammen das System $(\mathrm{B}_{\overline{\Pi}})$ und also auch die Gleichung $(\mathrm{II}_{\overline{\Pi}})$ befriedigen.

Ziehen wir aber die Gleichung (II_Σ) von der Gleichung ($\mathrm{II}_{\overline{\Pi}}$) ab, so ergiebt sich die Gleichung

$$(\mathrm{II}_\Pi) \qquad r_{p_1'}\pi_1' + r_{p_2'}\pi_2' + \cdots - (r_{p_1''}\pi_1'' + r_{p_2''}\pi_2'' + \cdots) = rR.$$

Für jedes rationale System also, das (B_Π) befriedigt, ist auch (II_Π) erfüllt, so dass wir für ergänzungsleiche Polyeder dieselbe Bedingung erhalten haben wie für zerlegungsgleiche. Nun sind aber zwei endlichgleiche Polyeder entweder zerlegungsgleich oder ergänzungsgleich, so dass wir den Satz gewonnen haben:

Sind zwei Polyeder Π' *und* Π'' *endlichgleich, so erfüllt jedes rationale Zahlensystem:* $r_{p_1'} \cdots r_{p_1''} \cdots$, *das die Gleichungen* (B) *befriedigt, auch die Gleichung:*

$$(\mathrm{II}) \qquad r_{p_1'}\pi_1' + r_{p_2'}\pi_2' + \cdots - (r_{p_1''}\pi_1'' + r_{p_2''}\pi_2'' + \cdots) = rR.$$

Die angeführten Beispiele für Polyeder mit dem gleichen Inhaltsmasse, die doch nicht zerlegungsgleich sind, sind also auch gleichzeitig, Beispiele für Polyeder mit demselben Inhaltsmasse, die nicht endlichgleich sind. Wir haben also die im Eingange aufgestellte Behauptung erwiesen: *Die Gleichung des Inhaltsmasses ist nicht hinreichend für die Endlichgleichheit zweier Polyeder.*

Zu den vorstehenden Auseinandersetzungen möchte ich noch einige Bemerkungen machen:

Sachlich: Die für die Endlichgleichheit zweier Polyeder aufgestellte Bedingung gilt in dem ganzen Machtbereiche der Axiome der Analysis situs, also z. Bsp. auch in der Nichteuklidischen Geometrie; es lassen sich auch für diese Beispiele von inhaltsgleichen, aber nicht endlichgleichen Polyedern angeben.

Litterarisch: Die Existenz einer linearen, ganzzahligen Beziehung zwischen dem Vollwinkel und den Flächenwinkeln zweier zerlegungsgleicher Polyeder (die ich in den Gött. Nachr. 1900 nachgewiesen habe) ist von Bricard (Nouv. Ann. 1896) behauptet und von Sforza (Per. di Mat. 1897) für einen sehr einfachen Fall bewiesen worden. Bricard und Sforza führen auch Beispiele von inhaltgleichen Polyedern an, bei denen diese Relation nicht erfüllt ist.

Ueber eine specielle Classe von Gruppen.

Von

E. Wendt in Elsfleth i./Old.

Unter allen Gruppen verdienen die *auflösbaren*, hauptsächlich wegen ihrer wichtigen Beziehungen zur Theorie der algebraischen Gleichungen, das grösste Interesse. Nach der gewöhnlichen Definition heisst eine Gruppe „*auflösbar*", wenn die Factorgruppen ihrer Compositionsreihen von Primzahlordnung sind. Man kann dieser Definition aber noch eine andere Fassung geben, man kann eine Gruppe auch auflösbar nennen, wenn die Factorgruppen ihrer Hauptreihen (Hauptcompositionsreihen) von Primzahlpotenzordnung sind. Beide Definitionen*) decken sich. Um dem eigentlichen Ziel, alle Typen auflösbarer Gruppen von vorgeschriebener Ordnung zu bestimmen, näher zu kommen, hat man den Charakter der Auflösbarkeit für specielle Gruppen nachgewiesen. Die meisten unter diesen, wie z. B. die Gruppen von Primzahlpotenzordnung, die Gruppen von quadratfreier Ordnungszahl, die Gruppen, deren Untergruppen von Primzahlpotenzordnung cyklisch sind, etc. haben die Eigenschaft, dass sich unter ihren Compositionsreihen solche befinden, die zugleich Hauptreihen sind, oder, wie man besser sagt, dass die Factorgruppen ihrer Hauptreihen von Primzahlordnung sind. Alle mit dieser Eigenschaft versehenen Gruppen verdienen daher wohl eine besondere Beachtung.

Bei dem Versuch, alle derartigen Gruppen von vorgeschriebener Ordnung zu bestimmen, bin ich auf einen, wie ich glaube, merkwürdigen Satz gestossen, der ein interessantes von Herrn Hölder gefundenes Resultat**) als speciellen Fall enthält. Bevor ich denselben ausspreche, ist es nothwendig, auf eine für beliebige Gruppen gültige Thatsache aufmerksam zu machen. Unter allen invarianten Untergruppen einer Gruppe $\mathfrak{G}$,

---

*) Jordan, Traité des substitutions (1870).

Hölder, Zurückführung einer beliebigen algebraischen Gleichung auf eine Kette von Gleichungen. Math. Ann. Bd. 34.

**) Siehe § 2.

die sich als das directe Product von Gruppen von Primzahlpotenzordnung darstellen, befindet sich eine, in der alle anderen Untergruppen dieser Art enthalten sind, welche also als die *grösste* derselben bezeichnet werden kann. Ist $\mathfrak{H}$ nämlich irgend eine solche invariante Untergruppe von $\mathfrak{G}$, sind $p_1, p_2, \cdots$ die verschiedenen in der Ordnung von $\mathfrak{H}$ enthaltenen Primzahlen und $p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \cdots$ die höchsten in dieser Ordnung aufgehenden Potenzen dieser Primzahlen, so kann man $\mathfrak{H}$ als das directe Product von Gruppen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots$ darstellen, deren Ordnungszahlen bezw. $p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \cdots$ sind. Ist $\mathfrak{P}$ eine beliebige derselben, so muss sie, da sie die einzige Untergruppe von $\mathfrak{H}$ ihrer Art ist, also auch innerhalb $\mathfrak{G}$ keine conjugirten Gruppen besitzen kann, eine invarianten Untergruppe nicht bloss von $\mathfrak{H}$, sondern auch von $\mathfrak{G}$ sein. Ist $\mathfrak{H}'$ eine andere Untergruppe von $\mathfrak{G}$ von derselben Art wie $\mathfrak{H}$, sind $p_1'^{\alpha_1'}, p_2'^{\alpha_2'}, \cdots$ die verschiedenen höchsten in der Ordnung von $\mathfrak{H}'$ aufgehenden Primzahlpotenzen, und ist $\mathfrak{H}'$ das directe Product von Gruppen $\mathfrak{P}_1', \mathfrak{P}_2', \cdots$, deren Ordnungszahlen bezw. $p_1'^{\alpha_1'}, p_2'^{\alpha_2'}, \cdots$ sind, so ist jede derselben eine invariante Untergruppe nicht bloss von $\mathfrak{H}'$, sondern auch von $\mathfrak{G}$. Jedes Element P' irgend einer dieser Gruppen $\mathfrak{P}'$ transformirt $\mathfrak{P}$ in sich selbst, und jedes Element P von $\mathfrak{P}$ transformirt $\mathfrak{P}'$ in sich selbst. Betrachtet man das Element $P'^{-1}P^{-1}P'P$, so ist dieses, als Product von P'^{-1} und $P^{-1}P'P$ aufgefasst, ein Element von $\mathfrak{P}'$, als Product von $P'^{-1}P^{-1}P'$ und P aufgefasst, ein Element von $\mathfrak{P}$. Sind daher p und p' von einander verschieden, können also $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ ausser der Einheit kein gemeinsames Element enthalten, so muss $P'^{-1}P^{-1}P'P = 1$, d. h. P mit P' vertauschbar sein. Sind die Primzahlen p und p' einander gleich, so erzeugen die Elemente von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ zusammen eine Gruppe, deren Ordnung ebenfalls eine Potenz von $p = p'$ ist. Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}'$ oder, was dasselbe ist, das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Gruppen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots$ und $\mathfrak{P}_1', \mathfrak{P}_2', \cdots$ ist daher ebenfalls eine Gruppe, die das directe Product von Gruppen von Primzahlpotenzordnung ist. Und es ist auch eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{G}$, weil es $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}'$ sind. Daraus folgt aber sofort die obige Behauptung, dass jede Gruppe eine *grösste* invariante Untergruppe besitzen muss, die das directe Product von Gruppen von Primzahlpotenzordnung ist.

Der Satz, dessen vorhin gedacht wurde, lautet nun:

> *Ist $\mathfrak{M}$ eine Gruppe, in deren Hauptreihen die Factorgruppen von Primzahlordnung sind, und ist $\mathfrak{N}$ die grösste invariante Untergruppe von $\mathfrak{M}$, die sich als das directe Product von Gruppen von Primzahlpotenzordnung darstellt, so ist die zu $\mathfrak{N}$ complementäre Gruppe $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}$ eine Abel'sche.*

Allerdings ist dieser Satz nicht umkehrbar. Wenn nämlich $\mathfrak{G}'$ die

grösste unter allen invarianten Untergruppen einer Gruppe $\mathfrak{G}$ ist, die das directe Product von Gruppen von Primzahlpotenzordnung sind, und wenn $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{G}'}$ eine Abel'sche Gruppe ist, so ist die Gruppe $\mathfrak{G}$, wie sofort ersichtlich, auflösbar, aber es brauchen nicht die Factorgruppen ihrer Hauptreihen von Primzahlordnung zu sein. Herr Steinitz, dem ich auch die Fassung des obigen Satzes in der vorliegenden Form verdanke, hat mich auf ein einfaches Beispiel aufmerksam gemacht. Es ist die alternirende Gruppe von vier Ziffern, welche eine einzige invariante Untergruppe, nämlich die Gruppe vierter Ordnung

$$1, \quad (0,2)\,(1,3), \quad (0,1)\,(2,3), \quad (0,3)\,(1,2)$$

enthält.

Ich schreite nun zum Beweise des obigen Satzes.

§ 1.

Es sei $\mathfrak{M}$ eine Gruppe der besagten Art,

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0, \; \mathfrak{M}_1, \; \mathfrak{M}_2, \cdots \mathfrak{M}_\varrho = 1 \tag{1}$$

eine Hauptreihe derselben, welche die zugehörige Indexreihe

$$j_0, \; j_1, \; j_2, \cdots j_{\varrho-1} \tag{2}$$

besitze. Dann sind diese letzteren Zahlen Primzahlen, und die Factorgruppen $\frac{\mathfrak{M}_\alpha}{\mathfrak{M}_{\alpha+1}}$ $(\alpha = 0, 1, \cdots \varrho - 1)$ sind cyklische Gruppen von Primzahlordnung. Bedeutet daher M_α $(\alpha = 0, 1, \cdots \varrho - 1)$ ein in $\mathfrak{M}_\alpha$, aber nicht in $\mathfrak{M}_{\alpha+1}$ enthaltenes Element, so zerfällt $\mathfrak{M}_\alpha$ in die Nebengruppen

$$\mathfrak{M}_{\alpha+1}, \; M_\alpha \mathfrak{M}_{\alpha+1}, \; M_\alpha^2 \mathfrak{M}_{\alpha+1}, \cdots M_\alpha^{j_r - 1} \mathfrak{M}_{\alpha+1},$$

welche die Elemente der Gruppe $\frac{\mathfrak{M}_\alpha}{\mathfrak{M}_{\alpha+1}}$ ausmachen. Die niedrigste in $\mathfrak{M}_{\alpha+1}$ enthaltene Potenz von M_α ist die j_α^{te}. Die Ordnung von M_α ist durch j_α theilbar, und jedes zu $\mathfrak{M}_\alpha$, aber nicht zu $\mathfrak{M}_{\alpha+1}$ gehörige Element hat die Form $M_\alpha^{k_\alpha} A_{\alpha+1}$, wo k_α einen der Werthe $1, 2, \cdots j_\alpha - 1$ besitzt und $A_{\alpha+1}$ der Gruppe $\mathfrak{M}_{\alpha+1}$ angehört. Man kann auch stets solche Elemente M_α finden, deren Ordnungszahl eine Potenz der Primzahl j_α ist. Denn hat M_α etwa die Ordnung $j_\alpha^{e_\alpha} \cdot \mu_\alpha$, wo μ_α relativ prim zu j_α ist, so ist $M_\alpha^{\mu_\alpha}$ ein Element, das zu $\mathfrak{M}_\alpha$, aber nicht zu $\mathfrak{M}_{\alpha+1}$ gehört und dessen Ordnung gleich $j_\alpha^{e_\alpha}$ ist.

Sei nun M_α $(\alpha = 0, 1, \cdots \varrho - 1)$ ein in $\mathfrak{M}_\alpha$, aber nicht in $\mathfrak{M}_{\alpha+1}$ enthaltenes Element, und bedeute R irgend ein Element aus $\mathfrak{M}$, dessen

Ordnung r heisse. Da $\mathfrak{M}_\alpha$ eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{M}$ ist, so muss eine Gleichung von der Form bestehen:

$$R^{-1} M_\alpha R = M_\alpha^{\nu_\alpha} S; \qquad (0 < \nu_\alpha < j_\alpha) \tag{3}$$

wo S ein der Gruppe $\mathfrak{M}_{\alpha+1}$ angehöriges Element bezeichnet, oder auch von folgender Gestalt:

$$R^{-1} M_\alpha R \mathfrak{M}_{\alpha+1} = M_\alpha^{\nu_\alpha} \mathfrak{M}_{\alpha+1}. \tag{4}$$

Für beliebige positive ganze Zahlen σ und τ folgt hieraus

$$R^{-\tau} M_\alpha^\sigma R^\tau \mathfrak{M}_{\alpha+1} = M_\alpha^{\sigma \cdot \nu_\alpha^\tau} \mathfrak{M}_{\alpha+1}, \tag{5}$$

weil R und M_α mit $\mathfrak{M}_{\alpha+1}$ vertauschbar sind. Setzt man hierin $\tau = r$, so ergiebt sich, da $R^r = 1$ ist, $M_\alpha^\sigma \mathfrak{M}_{\alpha+1} = M_\alpha^{\sigma \cdot \nu_\alpha^r} \mathfrak{M}_{\alpha+1}$, und daraus

$$\nu_\alpha^r \equiv 1 \ (\mathrm{mod.}\, j_\alpha). \tag{6}$$

Ist R' ein weiteres Element aus $\mathfrak{M}$, so gelten die den Gleichungen (4) und (5) entsprechenden Gleichungen

$$R'^{-1} M_\alpha R' \mathfrak{M}_{\alpha+1} = M_\alpha^{\nu'_\alpha} \mathfrak{M}_{\alpha+1}; \quad R'^{-\tau} M_\alpha^\sigma R'^\tau = M_\alpha^{\sigma \cdot \nu_\alpha'^\tau} \mathfrak{M}_{\alpha+1}. \tag{7}$$

Transformirt man beide Seiten der Gleichung (4) mit R', so ergiebt sich mit Hülfe von (7)

$$R'^{-1} R^{-1} M_\alpha R R' \mathfrak{M}_{\alpha+1} \quad \text{oder} \quad (RR')^{-1} M_\alpha (RR') \mathfrak{M}_{\alpha+1} = M_\alpha^{\nu_\alpha \cdot \nu'_\alpha} \mathfrak{M}_{\alpha+1}.$$

Transformirt man beide Seiten der ersteren der Gleichungen (7) mit R und benutzt die Gleichung (5), so erhält man

$$(R'R)^{-1} M_\alpha (R'R) \mathfrak{M}_{\alpha+1} = M_\alpha^{\nu_\alpha \cdot \nu'_\alpha} \mathfrak{M}_{\alpha+1}.$$

Die beiden letzten Gleichungen lehren, dass der Complex $M_\alpha \mathfrak{M}_{\alpha+1}$ durch jedes der Elemente RR' und $R'R$ in den Complex $M_\alpha^{\nu_\alpha \cdot \nu'_\alpha} \mathfrak{M}_{\alpha+1}$ transformirt wird, folglich muss er durch das Element

$$N = (R'R)^{-1}(RR') = R^{-1} R'^{-1} R R'$$

in sich selbst transformirt werden. Dieses Element N ist also mit anderen Worten mit dem Complex $M_\alpha \mathfrak{M}_{\alpha+1}$ und daher mit allen Elementen der Factorgruppe $\dfrac{\mathfrak{M}_\alpha}{\mathfrak{M}_{\alpha+1}}$ vertauschbar. Die Zahl α stellt hierbei irgend einen der Werthe $0, 1, \cdots \varrho - 1$ vor, und R und R' bedeuten zwei beliebige Elemente aus $\mathfrak{M}$. Es gilt also allgemein die Gleichung

$$R'^{-1} R R' = RN, \tag{8}$$

wo N ein Element ist, das mit allen Elementen der sämmtlichen Factorgruppen $\dfrac{\mathfrak{M}_\alpha}{\mathfrak{M}_{\alpha+1}}$ $(\alpha = 0, 1, \cdots \varrho - 1)$ vertauschbar ist.

Nun bilden alle Elemente von $\mathfrak{M}$, die wie N mit allen Elementen der Factorgruppen $\frac{\mathfrak{M}_\alpha}{\mathfrak{M}_{\alpha+1}}$ $(\alpha = 0, 1, \cdots \varrho - 1)$ vertauschbar sind, eine Gruppe $\mathfrak{N}'$. Denn, wenn zwei Elemente mit einem Complex $M_\alpha \mathfrak{M}_{\alpha+1}$ vertauschbar sind, so ist auch deren Product mit diesem vertauschbar. Lässt man in Gleichung (8) R alle Elemente von $\mathfrak{N}'$, R' alle Elemente von $\mathfrak{M}$ durchlaufen, so erkennt man, dass $\mathfrak{N}'$ eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{M}$ ist, weil ja jedes Element R von $\mathfrak{N}'$ wieder in ein Element RN von $\mathfrak{N}'$ transformirt wird. Die Gleichung (8) lässt sich für beliebige Elemente R und R' von $\mathfrak{M}$ aber auch in die Form setzen

$$RR'\mathfrak{N}' = R'R\mathfrak{N}', \tag{9}$$

und diese Gleichung drückt aus, dass die zu $\mathfrak{N}'$ complementäre Gruppe $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}'}$ eine Abel'sche ist.

Aus Gleichung (8) lässt sich noch eine weitere Folgerung ziehen, wenn man unter R und R' zwei Elemente aus $\mathfrak{N}'$ versteht. Es möge R noch in $\mathfrak{M}_\beta$, aber nicht mehr in $\mathfrak{M}_{\beta+1}$ enthalten sein, wo β einen der Werthe $0, 1, \cdots \varrho - 1$ bedeutet. Da im vorliegenden Falle R' mit den Elementen der Factorgruppe $\frac{\mathfrak{M}_\beta}{\mathfrak{M}_{\beta+1}}$ vertauschbar ist, so gehört das in der Gleichung (8) auftretende Element N der Gruppe $\mathfrak{M}_{\beta+1}$ an. Nimmt man an, dass dasselbe, falls es von 1 verschieden ist, noch in der Gruppe $\mathfrak{M}_\gamma$ $(\gamma > \beta)$, aber nicht mehr in der Gruppe $\mathfrak{M}_{\gamma+1}$ enthalten ist, und schreibt die Gleichung (8) in der Form

$$R'^{-1}RR'\mathfrak{M}_{\gamma+1} = RN\mathfrak{M}_{\gamma+1},$$

so folgt, da nach Voraussetzung R und R' Elemente von $\mathfrak{N}'$ sind und als solche mit dem Complex $N\mathfrak{M}_{\gamma+1}$ vertauschbar sein müssen, für beliebige positive ganze Zahlen σ und τ

$$R'^{-\tau}R^\sigma R'^\tau \mathfrak{M}_{\gamma+1} = R^\sigma N^{\sigma\cdot\tau}\mathfrak{M}_{\gamma+1}.$$

Sind r und r' die Ordnungen von R und R', so folgt für $\tau = r'$, $\sigma = 1$ aus dieser Gleichung $\mathfrak{M}_{\gamma+1} = N^{r'}\mathfrak{M}_{\gamma+1}$, und für $\tau = 1$, $\sigma = r$ ergiebt sich $\mathfrak{M}_{\gamma+1} = N^r\mathfrak{M}_{\gamma+1}$. Es gehören also N^r und $N^{r'}$ der Gruppe $\mathfrak{M}_{\gamma+1}$ an. In dem Falle, dass r und r' theilerfremd sind, würde demnach folgen, dass N selbst in $\mathfrak{M}_{\gamma+1}$ enthalten wäre. Da das aber der gemachten Annahme widerspricht, so muss in diesem Falle $N = 1$ und daher nach (8) $RR' = R'R$ sein. Alle zu $\mathfrak{N}'$ gehörigen Elemente, deren Ordnungszahlen theilerfremd sind, sind demnach vertauschbar. Daraus folgt weiter in bekannter Weise mit Hülfe des Sylow'schen Satzes, dass $\mathfrak{N}'$ das directe Product von Gruppen von Primzahlpotenzordnung ist.

Bedeutet nun wie in der Einleitung $\mathfrak{N}$ die *grösste* unter allen invarianten Untergruppen von $\mathfrak{M}$, die sich als das directe Product von Gruppen von Primzahlpotenzordnung darstellen, so ist $\mathfrak{N}'$ eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{N}$, und, weil, wie vorher bewiesen, $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}'}$ eine Abel'sche Gruppe ist, so muss erst recht $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}$ eine solche sein.

Damit ist der in der Einleitung aufgeführte Satz bewiesen. Ich will noch einige Bemerkungen hinzufügen. Da $\mathfrak{N}$ eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{M}$ ist, so kann man eine Hauptreihe von $\mathfrak{M}$ bilden, in welcher $\mathfrak{N}$ vorkommt. Sei die Reihe (1) von dieser Beschaffenheit. Von $\mathfrak{N}$ an laute dieselbe

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{M}_{\varrho'},\ \mathfrak{M}_{\varrho'+1}, \cdots \mathfrak{M}_{\varrho-1},\ \mathfrak{M}_{\varrho} = 1.$$

Es bedeute R ein beliebiges Element von $\mathfrak{N}$, dessen Ordnung r eine Potenz einer Primzahl p sei. Unter α verstehe man zunächst eine der Zahlen $\varrho', \varrho'+1, \cdots \varrho$, und sei M_α ein Element von der Ordnung $j_\alpha^{c_\alpha}$, das in $\mathfrak{M}_\alpha$, aber nicht in $\mathfrak{M}_{\alpha+1}$ enthalten sei. Sind p und j_α von einander verschieden, so ist R mit M_α vertauschbar. Ist aber $p = j_\alpha$, so folgt aus der Congruenz (6), da r im vorliegenden Falle keinen Factor mit $j_\alpha - 1 = p - 1$ gemeinsam haben kann, dass $\nu_\alpha = 1$ ist. In jedem Falle ergiebt sich mithin, dass R mit den Elementen der sämmtlichen Factorgruppen $\frac{\mathfrak{M}_\alpha}{\mathfrak{M}_{\alpha+1}}$ $(\alpha = \varrho', \varrho'+1, \cdots \varrho - 1)$ vertauschbar ist. Mit den Elementen der übrigen Factorgruppen $\frac{\mathfrak{M}_\alpha}{\mathfrak{M}_{\alpha+1}}$ $(\alpha < \varrho')$ ist R aber auch vertauschbar, denn es ist für $\alpha < \varrho'$:

$$R(M_\alpha \mathfrak{M}_{\alpha+1}) = R\mathfrak{M}_{\alpha+1} M_\alpha = \mathfrak{M}_{\alpha+1} M_\alpha = M_\alpha \mathfrak{M}_{\alpha+1} = (M_\alpha \mathfrak{M}_{\alpha+1})R,$$

weil R ein Element in $\mathfrak{M}_{\varrho'}$, also auch von $\mathfrak{M}_{\alpha+1}$ $(\alpha < \varrho')$ ist. Alle diejenigen Elemente von $\mathfrak{N}$, deren Ordnung eine Primzahlpotenz ist, sind also mit den Elementen der Factorgruppen von $\mathfrak{M}$ vertauschbar. Da man sich nun $\mathfrak{N}$ durch Composition aus solchen Elementen entstanden denken kann, so *haben alle Elemente von* $\mathfrak{N}$ *ohne Ausnahme die Eigenschaft, mit den Elementen der sämmtlichen Factorgruppen von* $\mathfrak{M}$ *vertauschbar zu sein.* Nun erzeugen aber nach den Untersuchungen dieses Paragraphen alle mit dieser Eigenschaft versehenen Elemente von $\mathfrak{M}$ eine invariante Untergruppe $\mathfrak{N}'$ von $\mathfrak{M}$, die ebenso wie $\mathfrak{N}$ das directe Product von Gruppen von Primzahlpotenzordnung ist, folglich muss $\mathfrak{N}' = \mathfrak{N}$ sein, und *es darf also kein Element von* $\mathfrak{M}$, *das nicht zu* $\mathfrak{N}$ *gehört, mit den Elementen aller Factorgruppen* $\frac{\mathfrak{M}_\alpha}{\mathfrak{M}_{\alpha+1}}$ $(\alpha \geqq \varrho')$ *vertauschbar sein.* Diese Bedingung ist gleichbedeutend mit der, dass $\mathfrak{N}$ die *grösste* invariante Untergruppe von $\mathfrak{M}$ ist,

die sich als das directe Product von Gruppen von Primzahlpotenzordnung darstellt.

Es sei q die grösste der in der Ordnung von $\mathfrak{M}$ aufgehenden Primzahlen und q^c die höchste darin enthaltene Potenz von q. Bedeutet R ein Element von $\mathfrak{M}$, dessen Ordnung eine Potenz von q ist, so folgt aus der Congruenz (6) $\nu_\alpha = 1$. Denn, wenn diese Congruenz von 1 verschiedene Wurzeln haben soll, so müssen r und $j_\alpha - 1$ einen von 1 verschiedenen Theiler besitzen. Das ist aber im vorliegenden Falle nicht möglich, da ja r eine Potenz von q und $q \geqq j_\alpha$ ist. Alle Elemente also, und daher auch alle Untergruppen von $\mathfrak{M}$, deren Ordnung eine Potenz der grössten in der Ordnung von $\mathfrak{M}$ aufgehenden Primzahl ist, sind mit den Elementen der Factorgruppen von $\mathfrak{M}$ vertauschbar und daher in $\mathfrak{N}'$ und auch in $\mathfrak{N}$ enthalten. Da $\mathfrak{N}$ das directe Product von Gruppen von Primzahlpotenzordnung ist, so giebt es folglich nur eine einzige Untergruppe von $\mathfrak{M}$ von der Ordnung q^c, und diese ist also eine in $\mathfrak{N}$ enthaltene invariante Untergruppe von $\mathfrak{M}$.

Eine algebraische Gleichung mit der Galois'schen Gruppe $\mathfrak{M}$ wird gelöst, indem man zuerst eine irreducible Abel'sche Gleichung, deren Grad gleich der Ordnung von $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}$ ist, bildet, dann eine Wurzel dieser Gleichung dem Rationalitätsbereich adjungirt und darauf im erweiterten Bereich mehrere irreducible Normalgleichungen löst, deren Gradzahlen gleich den verschiedenen in der Ordnung von $\mathfrak{N}$ aufgehenden höchsten Primzahlpotenzen sind. Umgekehrt erhält man alle Normalkörper von vorgeschriebenem Grade m, deren Galois'sche Gruppe eine der hier betrachteten Art ist, auf folgende Weise. Es sei m' irgend ein Divisor von m und $m = m' \cdot n$, und y sei eine Wurzel einer irreducibeln Abel'schen Gleichung vom Grade m'. Die verschiedenen in n aufgehenden höchsten Primzahlpotenzen seien $p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \cdots$. Es bedeute z_1 eine Wurzel einer irreducibeln Normalgleichung vom Grade $p_1^{\alpha_1}$, deren Coefficienten rationale Functionen von y sind, z_2 eine Wurzel einer solchen vom Grade $p_2^{\alpha_2}, \cdots$. Dann ist, wenn K den zu Grunde gelegten Rationalitätsbereich bezeichnet, der Körper $\mathsf{K}(y; z_1, z_2, \cdots)$ ein Normalkörper der verlangten Art.

§ 2.

Der in § 1 hergeleitete Satz enthält den von Herrn Hölder über Gruppen von quadratfreier Ordnungszahl bewiesenen Satz*) als besonderen Fall.

In Bezug auf Gruppen, deren Untergruppen von Primzahlpotenzordnung commutativ sind, ist unter gewissen Bedingungen nachgewiesen

*) Hölder, Gött. Nachr. 1895.

worden, dass sie auflösbar sind, z. B. dann, wenn jene Untergruppen cyklisch sind*). Ist $\mathfrak{M}$ eine Gruppe der letzteren Art und $m = p_1^{\varkappa_1} \cdot p_2^{\varkappa_2} \cdot p_3^{\varkappa_3} \cdots$ ihre Ordnung, wo $p_1, p_2, p_3, \cdots$ Primzahlen bedeuten und $p_1 < p_2 < p_3 < \cdots$ ist, so besitzt sie invariante Untergruppen von jeder Ordnung

$$p_i^{\varkappa_i'} \cdot p_{i+1}^{\varkappa_{i+1}} \cdot p_{i+2}^{\varkappa_{i+2}} \cdots (\varkappa_i' \leqq \varkappa_i); \ (i = 1, 2, 3, \cdots).$$

Die Factorgruppen ihrer Hauptreihen sind daher von Primzahlordnung**). Der in § 1 bewiesene Satz nimmt jetzt die besondere Gestalt an:

Ist $\mathfrak{N}$ die grösste invariante cyklische Untergruppe von $\mathfrak{M}$, so ist die zu $\mathfrak{N}$ complementäre Gruppe $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}$ cyklisch.

Zunächst ist nämlich klar, dass, da $\mathfrak{N}$ ein Theiler von $\mathfrak{M}$ ist, die Untergruppen von $\mathfrak{N}$ von Primzahlpotenzordnung cyklisch sind. Das gilt aber auch für die Gruppe $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}\cdot$ Denn ist p irgend eine in der Ordnung m' von $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}$ aufgehende Primzahl und ist sie in m genau $\varkappa$ mal, in m' genau λ mal, in der Ordnung $n = \frac{m}{m'}$ von $\mathfrak{N}$ also genau $\varkappa - \lambda$ mal enthalten, so muss $\mathfrak{M}$ nach dem Sylow'schen Satze eine Untergruppe von der Ordnung $p^\varkappa$, und, weil diese nach Voraussetzung cyklisch ist, ein Element P von der Ordnung $p^\varkappa$ enthalten, und es kann keine niedere als die $p^{\lambda\text{te}}$ Potenz von P der Gruppe $\mathfrak{N}$ angehören. Denn der Exponent der niedrigsten in $\mathfrak{N}$ enthaltenen Potenz von P muss ein Divisor der Ordnung von P, also von der Form $p^{\lambda'}$ sein, und wäre nun etwa $\lambda' < \lambda$, so müsste $\mathfrak{N}$ die ganze durch $P^{p^{\lambda'}}$ erzeugte cyklische Gruppe von der Ordnung $p^{\varkappa - \lambda'}$ enthalten, es müsste also n durch $p^{\varkappa - \lambda'}$ theilbar sein, während doch die Primzahl p nur $\varkappa - \lambda$ mal in n aufgehen soll. Es enthält demnach die Gruppe $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}$ eine durch ihr Element $P\mathfrak{N}$ erzeugte cyklische Gruppe von der Ordnung p^λ, ihre Untergruppen von Primzahlpotenzordnung sind also cyklisch. Da nun $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}$ als Abel'sche Gruppe ebenso wie $\mathfrak{N}$ das directe Product von Gruppen von Primzahlpotenzordnung ist, so folgt, dass $\mathfrak{N}$ und $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}$ cyklisch sind.

Das erzeugende Element von $\mathfrak{N}$ heisse N, dass von $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}$ heisse $M\mathfrak{N}$, wo M ein Element von $\mathfrak{M}$ bedeutet, dessen niedrigste in $\mathfrak{N}$ enthaltene Potenz die m'^{te} ist. Es sei

$$(1) \qquad M^{m'} = N^{n'}; \quad N^n = 1.$$

---

*) Frobenius, Ueber auflösbare Gruppen, II. Berl. Sitz. 1895.
Burnside, Proc. L. M. S. Vol. XXVI, 1895.

**) Derartige Gruppen besitzen demnach Hauptreihen, deren zugehörige Indices eine nicht absteigende Reihe von Primzahlen bilden. Dasselbe gilt auch für die allgemeinen in § 1 betrachteten Gruppen, wie leicht nachzuweisen ist.

Das Element N kann man sich so gewählt denken, dass n' ein Divisor von n ist*) Denn, ist d der grösste gemeinsame Divisor von n und n', sind also $\frac{n}{d}$ und $\frac{n'}{d}$ relativ prim zu einander, so giebt es eine zu d und deswegen auch zu n theilerfremde Zahl x, welche den gleichberechtigten Congruenzen $x \equiv \frac{n'}{d}\left(\text{mod.}\ \frac{n}{d}\right)$ und $dx \equiv n'$ (mod. n) genügt. Setzt man nun $N' = N^x$, so ist zufolge (1) $M^{m'} = N^{n'} = N^{x \cdot d} = N'^d$; man braucht also nur N durch N' zu ersetzen, um den gewünschten Erfolg zu haben.

Ist N derartig gewählt, dass n durch n' theilbar ist, so ist die Ordnung von M gleich $m' \cdot \frac{n}{n'}$, da die von $N^{n'}$ gleich $\frac{n}{n'}$ ist.

Weiter kann man nun das Element M so wählen, dass die Zahl $\frac{n}{n'}$ nur Primfactoren besitzt, die in m' aufgehen, oder, was dasselbe ist, dass n' alle diejenigen Divisoren von n enthält, die zu m' relativ prim sind. Denn, ist d der grösste Divisor von $\frac{n}{n'}$, der zu m' relativ prim ist, so würde M^d die gewünschte Bedingung erfüllen, weil $(M^d)^{m'} = N^{n' \cdot d}$ ist. Es wird sich späterhin ergeben, dass n' relativ prim zu m' ist.

Da $\mathfrak{N}$ eine invariante cyklische Untergruppe von $\mathfrak{M}$ ist, so muss eine Gleichung von der Form

(2) $$M^{-1}NM = N^{\nu}$$

bestehen. Für positive ganze Zahlen σ und τ folgt hieraus

(3) $$M^{-\tau}N^{\sigma}M^{\tau} = N^{\sigma \cdot \nu^{\tau}} \quad \text{oder} \quad N^{\sigma}M^{\tau} = M^{\tau}N^{\sigma \cdot \nu^{\tau}}.$$

Setzt man hierin $\tau = m'$, so ergiebt sich mit Hülfe von (1) $N^{\sigma} = N^{\sigma \cdot \nu^{m'}}$, folglich

(4) $$\nu^{m'} \equiv 1 \quad (\text{mod.}\ n).$$

Versteht man aber unter σ eine durch n' theilbare Zahl $\sigma = n' \cdot \sigma'$, so wird die linke Seite der Gleichung (3) mit Rücksicht auf Gleichung (1) gleich $M^{-\tau}(N^{n'})^{\sigma'}M^{\tau} = M^{-\tau}(M^{m'})^{\sigma'}M^{\tau} = (M^{m'})^{\sigma'} = N^{n' \cdot \sigma'}$, es muss also $N^{n' \cdot \sigma'} = N^{n' \cdot \sigma' \cdot \nu^{\tau}}$ für alle Werthe von σ' und τ sein. Daraus folgt $n' \cdot \sigma' \cdot (\nu^{\tau} - 1) \equiv 0$ (mod. n) und speciell für $\tau = 1$, $\sigma' = 1$:

(5) $$n'(\nu - 1) \equiv 0 \ (\text{mod.}\ n).$$

Diese Congruenz ist auch hinreichend für das Bestehen der allgemeiner aussehenden Congruenz.

Erfüllen umgekehrt die Zahlen m, n, m', n', ν die bisher aufgestellten Bedingungen, ist also $m = m' \cdot n$, bedeutet ferner n' einen Factor von n,

---

*) Für den Fall $M^{m'} = 1$ gelten die folgenden Schlüsse, wenn man sich in diesem Falle n' gleich n gewählt denkt.

der durch alle zu m' relativ primen Divisoren von n theilbar ist, und genügt die Zahl ν den Congruenzen (4) und (5), so definiren, wie leicht zu sehen, die Gleichungen (1) und (2) eine Gruppe $\mathfrak{M}$ von der Ordnung $m = m' \cdot n$, welche die cyklische Gruppe $\mathfrak{N} = N, N^2, \cdots N^{n-1}, 1$ als invariante Untergruppe enthält, deren complementäre Gruppe $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}$ ebenfalls cyklisch ist. Jedes beliebige Element von $\mathfrak{M}$ lässt sich auf die Form $M^x N^y (x = 0, 1, \cdots m' - 1;\ y = 0, 1, \cdots n - 1)$ bringen, und zwei Elemente $M^{x_1} N^{y_1}$ und $M^{x_2} N^{y_2}$ setzen sich nach Gleichung (3) nach folgender Regel zusammen

$$(6) \qquad (M^{x_1} N^{y_1})(M^{x_2} N^{y_2}) = M^{x_1 + x_2} N^{y_1 \cdot \nu^{x_2} + y_2}.$$

Nun ist noch weiter der Bedingung Rechnung zu tragen, dass $\mathfrak{N}$ die *grösste* invariante cyklische Untergruppe von $\mathfrak{M}$ ist, und auch die Forderung, dass die Untergruppen von $\mathfrak{M}$ von Primzahlpotenzordnung cyklisch sind, ist noch weiter auszunutzen.

Die Zahl ν muss nothwendig zum Exponenten m' (mod. n) *gehören*. Denn wäre etwa schon $\nu^{m''} \equiv 1$, wo m'' ein Theiler von m' ist, so würde aus der Gleichung (3) für $\tau = m''$ folgen, dass $M^{-m''} N^\sigma M^{m''} = N^\sigma$, d. h. dass $M^{m''}$ mit allen Elementen von $\mathfrak{N}$ vertauschbar wäre. Das Element $M^{m''}$ würde also mit der Gruppe $\mathfrak{N}$ zusammen eine Abel'sche Gruppe erzeugen, die, da sie als (invarianter) Theiler von $\mathfrak{M}$ die Eigenschaft haben muss, dass ihre Untergruppen von Primzahlpotenzordnung cyklisch sind, sogar cyklisch sein muss. Es würde also eine grössere invariante cyklische Untergruppe von $\mathfrak{M}$ existiren als $\mathfrak{N}$, und das ist gegen die Annahme. Die Bedingung, dass ν zum Exponenten m' (mod. m) *gehört*, ist, wie leicht ersichtlich, auch hinreichend dafür, dass $\mathfrak{N}$ die grösste invariante cyklische Untergruppe von $\mathfrak{M}$ ist.

Durch wiederholte Anwendung der Regel (6) ergiebt sich

$$(7) \qquad (M^x N^y)^\sigma = M^{\sigma \cdot x} N^{(\nu^{(\sigma-1)x} + \nu^{(\sigma-2)x} + \cdots + \nu + 1)y}$$
$$= M^{\sigma \cdot x} N^{\frac{\nu^{\sigma \cdot x} - 1}{\nu^x - 1} \cdot y}.$$

Der Bruch $\frac{\nu^{\sigma \cdot x} - 1}{\nu^x - 1}$ nimmt für $\sigma = m'$, nach dem Modul einer in n aufgehenden Primzahl betrachtet, zufolge der Congruenz (4) entweder den Werth m' oder 0 an, je nachdem $\nu^x - 1$ durch den Modul theilbar ist oder nicht. Wäre nun p ein gemeinschaftlicher Primfactor von m' und n', also auch von n, so würde der Bruch in jedem Falle $\equiv 0$ (mod. p) sein, also die Form $k \cdot p$ haben. Aus Gleichung (7) würde demnach für $\sigma = m'$ mit Benutzung von Gleichung (1) folgen

$$(M^x N^y)^{m'} = N^{n' \cdot x} N^{p \cdot k} = N^{p \cdot k'},$$

und daraus $(M^x N^y)^{\frac{m}{p}} = 1$ für alle Werthe von x und y. Es könnte dann aber kein Element in $\mathfrak{M}$ existiren, dessen Ordnung gleich der höchsten in m enthaltenen Potenz von p wäre, weil nach der letzten Gleichung die Ordnung ja stets ein Divisor von $\frac{m}{p}$ sein müsste, und das ist gegen die Voraussetzung. Es ist also n' relativ prim zu m', und da n' nach dem Vorigen alle diejenigen Divisoren von n enthält, die zu m' relativ prim sind, so stellt demnach n' den grössten Divisor von n dar, der zu m' relativ prim ist.

Diese Bedingung ist auch hinreichend dafür, dass die Untergruppen von Primzahlpotenzordnung der durch (1), (2), (4), (5) definirten Gruppen cyklisch sind. Dazu ist nachzuweisen, dass, wenn eine Primzahl p genau $\varkappa$ mal in m aufgeht, ein Element von der Ordnung $p^\varkappa$ existirt. Es sei p genau λ mal in m' und infolgedessen genau $\varkappa - \lambda$ mal in n enthalten. Dann muss p auch genau $\varkappa - \lambda$ mal in $\frac{n}{n'}$ aufgehen, weil ja n' relativ prim zu m' und daher nicht durch p theilbar ist. Daraus folgt, dass die Zahl $m' \cdot \frac{n}{n'}$, welche die Ordnung von M darstellt, durch $p^\varkappa$ theilbar ist, und eine gewisse Potenz von M hat daher die Ordnung $p^\varkappa$.

Somit ist folgender Satz bewiesen:

Alle Gruppen von gegebener Ordnung m, deren Untergruppen von Primzahlpotenzordnung cyklisch sind, und nur solche, werden durch folgende Gleichungen definirt:

$$M^{-1}NM = N^\nu;\ M^{m'} = N^{n'};\ N^n = 1;\ m = m' \cdot n,$$

wo n einen Divisor von m und n' den grössten Divisor von n bezeichnet, der zu m' relativ prim ist, und wo die Zahl ν zum Exponenten m' nach dem Modul n gehört und ausserdem die Congruenz $(\nu - 1)n' \equiv 0 \pmod{n}$ *befriedigt.*

Die gruppentheoretische Aufgabe ist damit auf die rein zahlentheoretische zurückgeführt, zu den verschiedenen Divisoren n von m die brauchbaren Reste ν zu finden. Auf diese Aufgabe, welche nach Art der Untersuchungen des Herrn Hölder zu erledigen ist, gehe ich nicht weiter ein. Ich will bloss bemerken, dass mir Herr Steinitz ein Verfahren mitgetheilt hat, wie man den allgemeinen Fall auf den speciellen zurückführen kann, wo n quadratfrei ist, und dass, wenn $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots$ ist und $p_1, p_2, \cdots$ verschiedene Primzahlen bedeuten und $\bar{n} = p_1 \cdot p_2 \cdots$ gesetzt wird, es ebensoviele verschiedene Gruppen $\mathfrak{M}$ giebt, deren grösste invariante cyklische Untergruppe $\mathfrak{N}$ die Ordnung n hat, als es solche giebt, in denen $\mathfrak{N}$ die Ordnung $\bar{n}$ hat.

Zwei auf oben beschriebene Weise erhaltene Gruppen sind dann und nur dann (eindeutig) isomorph, wenn die Zahlen n und m' in beiden dieselben sind und wenn die Zahlen v modulo n *Potenzen von einander sind.*

Den Beweis dieser letzteren Behauptung unterdrücke ich, weil die von Herrn Hölder in der citirten Abhandlung über Gruppen von quadratfreier Ordnungszahl auf S. 220 gegebene Darstellung nur zu wiederholen wäre.

§ 3.

Ich kehre zu dem in § 1 behandelten allgemeineren Falle zurück. Wollte man die Aufgabe, alle möglichen Gruppen $\mathfrak{M}$ von vorgeschriebener Ordnung m zu bestimmen, ebenso weit durchführen, wie es in § 2 für die speciellen Gruppen geschehen ist, deren Untergruppen von Primzahlpotenzordnung cyklisch sind, so müsste man erst die bis jetzt ungelöste Aufgabe erledigen, alle verschiedenen Gruppen von Primzahlpotenzordnung zu bestimmen. Bei dem Versuch, die erstere so weit als möglich auf die letztere zurückzuführen, bin ich auf einen Satz aufmerksam geworden, der, selbst wenn seine Kenntniss auch nicht durchaus nothwendig zur Lösung der Aufgabe sein sollte, mir doch hinreichend Interesse zu verdienen scheint, um hier hergeleitet zu werden. Er bezieht sich auf den Isomorphismus, welchen die Gruppe $\mathfrak{N}$ erfährt, wenn man dieselbe durch gewisse Elemente von $\mathfrak{M}$ transformirt.

Man betrachte eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{M}$, welche eine Primzahlpotenzordnung p^α zur Ordnung hat. Dieselbe ist natürlich in $\mathfrak{N}$ enthalten. Es lässt sich eine Hauptreihe von $\mathfrak{M}$ bilden, in der $\mathfrak{P}$ vorkommt. Dieselbe laute von $\mathfrak{P}$ ab folgendermassen

(1) $$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots \mathfrak{P}_\alpha = 1.$$

Die Ordnungszahlen der Factorgruppen $\frac{\mathfrak{P}_s}{\mathfrak{P}_{s+1}}$ $(s = 0, 1, \cdots \alpha - 1)$ sind alle gleich p. Für jedes beliebige Element M von $\mathfrak{M}$ hat man

(2) $$M^{-1} P_s M \mathfrak{P}_{s+1} = \mathfrak{P}_s^{\nu_s} \mathfrak{P}_{s+1}; \quad (s = 0, 1, \cdots \alpha - 1),$$

woraus für beliebige positive ganze Zahlen σ und τ die Gleichung folgt:

(3) $$M^{-\tau} P_s^\sigma M^\tau \mathfrak{P}_{s+1} = P_s^{\sigma \cdot \nu_s^\tau} \mathfrak{P}_{s+1}.$$

Setzt man hierin τ gleich der Ordnung μ von M, so ergiebt sich

$$P_s^\sigma \mathfrak{P}_{s+1} = P^{\sigma \cdot \nu_s^\mu} \mathfrak{P}_{s+1},$$

folglich

$$\nu_s^\mu \equiv 1 \pmod{p}.$$

Zu jeder Wurzel ν_s dieser Congruenz lässt sich bekanntlich eine ganz

bestimmte zu ν_s (mod. p) congruente Zahl finden, deren μ^{te} Potenz der Einheit sogar nach dem Modul p^α congruent ist. Da P_s^p der Gruppe $\mathfrak{P}_{s+1}$ angehört, so kann man ν_s selbst gleich derartig gewählt denken. Dann ist

(4) $$\nu_s^\mu \equiv 1 \quad (\text{mod. } p^\alpha).$$

Ich führe die Untersuchung für den Fall weiter, dass μ relativ prim zu p ist. Die Gleichung (2) schreibe man in der Form

(5) $$M^{-1} P_s M \mathfrak{P}_{s'+1} = P_s^{\nu_s} P_{s'} \mathfrak{P}_{s'+1}; \quad (s' > s),$$

wo $P_{s'}$, falls es von 1 verschieden ist, noch in $\mathfrak{P}_{s'}$, aber nicht mehr in $\mathfrak{P}_{s'+1}$ enthalten sei. Entsprechend den Gleichungen (2) und (3) hat man

(6) $$M^{-1} P_{s'} M \mathfrak{P}_{s'+1} = P_{s'}^{\nu_{s'}} \mathfrak{P}_{s'+1}; \quad M^{-\tau} P_{s'}^\sigma M^\tau \mathfrak{P}_{s'+1} = P_{s'}^{\sigma \cdot \nu_{s'}^\tau} \mathfrak{P}_{s'+1}.$$

Ich behaupte, dass, wenn $P_{s'}$ nicht gleich 1 ist, ν_s und $\nu_{s'}$ von einander verschieden sein müssen. Wäre nämlich $\nu_s = \nu_{s'}$, so würde, da P_s als Element von $\mathfrak{N}$ mit den Elementen der Factorgruppe $\frac{\mathfrak{P}_{s'}}{\mathfrak{P}_{s'+1}}$ vertauschbar ist (s. § 1), aus Gleichung (5) mit Hülfe von Gleichung (6) für beliebige positive ganze Zahlen σ und τ

$$M^{-\tau} P_s^\sigma M^\tau \mathfrak{P}_{s'+1} = P_s^{\sigma \cdot \nu_s^\tau} P_{s'}^{\sigma \cdot \tau \cdot \nu_s^{\tau-1}} \mathfrak{P}_{s'+1}$$

folgen, und daraus mit Hülfe der Congruenz (4) für $\tau = \mu$, $\sigma = 1$

$$P_s \mathfrak{P}_{s'+1} = P_s P_{s'}^{\mu \cdot \nu_s^{\mu-1}} \mathfrak{P}_{s'+1},$$

weil $P^{p^\alpha} = 1$, oder

$$\mathfrak{P}_{s'+1} = P_{s'}^{\mu \cdot \nu_s^{\mu-1}} \mathfrak{P}_{s'+1}.$$

Das Bestehen einer solchen Gleichung ist aber unmöglich, weil der Exponent $\mu \cdot \nu_s^{\mu-1}$ von $P_{s'}$ nicht durch p theilbar ist. Es müssen also ν_s und $\nu_{s'}$ von einander verschieden sein. Daraus folgt weiter, dass man eine Zahl x_s bestimmen kann, welche der Congruenz

$$1 \equiv x_s(\nu_s - \nu_{s'}) \quad (\text{mod. } p)$$

genügt. Mit Hülfe dieser Congruenz und der Gleichungen (5) und (6) erhält man

$$M^{-1}\left(P_s P_{s'}^{x_s}\right) M \mathfrak{P}_{s'+1} = P_s^{\nu_s} P_{s'}^{1 + x_s \cdot \nu_{s'}} \mathfrak{P}_{s'+1} = P_s^{\nu_s} P_{s'}^{x_s \cdot \nu_s} \mathfrak{P}_{s'+1} = \left(P_s P_{s'}^{x_s}\right)^{\nu_s} \mathfrak{P}_{s'+1},$$

also, wenn

(7) $$P_s P_{s'}^{x_s} = P_s'$$

gesetzt wird,

(8) $$M^{-1} P_s' M \mathfrak{P}_{s'+1} = P_s'^{\nu_s} \mathfrak{P}_{s'+1}; \quad (s' > s).$$

Das Element P_s' gehört ebenso wie P_s noch der Gruppe $\mathfrak{P}_s$, aber nicht mehr der Gruppe $\mathfrak{P}_{s+1}$ an.

Falls s' noch nicht gleich α ist, lässt sich das Verfahren, das soeben angewendet wurde, um aus Gleichung (2) die Gleichung (8) zu gewinnen, für die letztere wiederholen. Man findet dann ein in $\mathfrak{P}_s$, aber nicht in $\mathfrak{P}_{s+1}$ enthaltenes Element P_s'', welches die Gleichung befriedigt

$$M^{-1} P_s'' M \mathfrak{P}_{s''+1} = P_s''^{\nu_s} \mathfrak{P}_{s''+1}; \quad (s'' > s' > s).$$

Durch genügend häufige Wiederholung des Verfahrens muss man schliesslich zu einem in $\mathfrak{P}_s$, aber nicht in $\mathfrak{P}_{s+1}$ enthaltenen Element gelangen, welches durch M in eine Potenz von sich selbst transformirt wird. Dieses Ergebniss gilt für alle Werthe $s = 0, 1, \cdots \alpha - 1$ und jedes beliebige Element M, dessen Ordnung relativ prim zu p ist.

Hat man irgend welche Elemente $P_s (s = 0, 1, \cdots \alpha - 1)$ gewählt, die noch zu $\mathfrak{P}_s$, aber nicht mehr zu P_{s+1} gehören, so lässt sich, wie leicht zu sehen, jedes Element von P auf eine und nur eine Weise in die Form setzen

$$(9) \qquad P_0^{\varkappa_0} P_1^{\varkappa_1} \cdots P_{\alpha-1}^{\varkappa_{\alpha-1}}; \quad \begin{pmatrix} \varkappa_0 & = 0, 1, \cdots p-1 \\ \varkappa_1 & = 0, 1, \cdots p-1 \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \varkappa_{\alpha-1} & = 0, 1, \cdots p-1 \end{pmatrix}$$

und P_s^p; $(s = 0, 1, \cdots \alpha - 1)$ ist die niedrigste Potenz von P_s, welche sich durch die Elemente $P_{s+1}, P_{s+2}, \cdots P_{\alpha-1}$ darstellen lässt.

Es besteht also folgender Satz:

Ist $\mathfrak{M}$ eine Gruppe, in deren Hauptreihen die Factorgruppen von Primzahlordnung sind, und bedeutet $\mathfrak{P}$ eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{M}$, welche eine Primzahlpotenz p^α zur Ordnung hat, ist ferner M ein Element von $\mathfrak{M}$, dessen Ordnung μ relativ prim zu p ist, so lassen sich in $\mathfrak{P}$ α mit folgenden Eigenschaften versehene Elemente

$$P_0, P_1, \cdots P_{\alpha-1}$$

finden:

1) *Jedes von ihnen wird durch M in eine Potenz von sich selbst transformirt, deren Exponent eine Wurzel der Congruenz $\nu^\mu \equiv 1 \pmod{p^\alpha}$ ist;*

2) *Jedes Element von $\mathfrak{M}$ lässt sich auf eine einzige Weise in der Form (9) darstellen:*

3) *P_s^p; $(s = 0, 1, \cdots \alpha - 1)$ ist die niedrigste Potenz von P_s, welche sich durch die Elemente $P_{s+1}, P_{s+2}, \cdots P_{\alpha-1}$ darstellen lässt.*

Note sur la convergence d'une série neumannienne de fonctions cylindriques.

Par

Niels Nielsen à Copenhague.

Il est bien connu que M. C. Neumann a démontré pour la première fois qu'une fonction holomorphe aux environs de zéro peut être développée en séries qui procèdent ou d'après des fonctions cylindriques ou d'après des produits de deux telles fonctions: *series neumanniennes de première et de deuxième espèce.* Il est bien connu de même qu'un tel développement en séries *neumanniennes* est toujours possible et ne peut être effectué généralement que d'une seule façon.

Quant au champ de convergence d'une série *neumannienne,* on n'a pas encore, d'après ce que je sais, suppléé le résultat incomplet indiqué déjà par M. Neumann, savoir que ses séries sont absolument convergentes, toutes les deux, à l'intérieur du cercle de convergence de la série *taylorienne* autour de zéro obtenue pour la fonction actuelle. La raison de cette inaction est à chercher peut-être dans le fait qu'on a appliqué généralement les expressions intégrales obtenues pour les coefficients de la série *neumannienne* au lieu des expressions explicites à l'aide des coefficients de la série de puissances donnée. En effet, par ce point de vue il est aisé d'approfondir la question relative à la convergence d'une série *neumannienne,* comme le montrera la Note que voici.

La forme même d'une série *neumannienne* indique que le point essentiel des recherches qui nous occupent est constitué par la détermination d'une expression asymptotique de $J^{\omega}(x)$, où $\Re(\omega)$ est extrêmement grand et positif, tandis que $|x|$ et la partie imaginaire de ω sont finis tous les deux. Or, la série

$$(\alpha) \qquad J^{\omega}(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{\omega+2n}}{n!\,\Gamma(\omega+n+1)}$$

nous permet de poser

$$(1) \qquad J^{\omega}(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\omega}}{\Gamma(\omega+1)}(1-A_{\omega}),$$

où

$$A_{\omega} = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{\omega+1} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{2!\,(\omega+1)(\omega+2)} + \cdots,$$

ce qui donnera

$$|A_{\omega}| < \left|\frac{x^2}{4(\omega+1)}\right| + \left|\frac{x^2}{4(\omega+1)}\right|^2 + \cdots,$$

ou bien

$$(2) \qquad |A_{\omega}| < \frac{|x|^2}{4|\omega+1|^2 - |x|^2}.$$

Posons maintenant

$$a_n\left(\frac{2}{x}\right)^{\nu} J^{\nu+n}(x) = u_n, \quad \frac{a_n\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+n}}{\Gamma(\nu+n+1)} = v_n',$$

où les coefficients a_n désignent des quantités quelconques, indépendantes de x; les formules (1), (2) montrent immédiatement la vérité de cette proposition:

I. *Les deux séries $\Sigma|u_n|$ et $\Sigma|v_n|$ sont en même temps convergentes ou divergentes; de plus, les deux limites:*

$$(\beta) \qquad \lim_{n=\infty}|u_n|, \quad \lim_{n=\infty}|v_n|$$

sont en même temps infiniment petites, finies ou infiniment grandes.

Supposons maintenant que les limites (β) ne soient pas infiniment grandes, nous aurons, en vertu de (α), cette formule

$$(3) \qquad v_n = u_n + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{\nu+n+1}\cdot v_n + \frac{K_n}{(\nu+n+1)^2},$$

où $|K_n|$ est une quantité *finie* ou *infiniment petite.*

Cela posé, regardons la série *neumannienne* de première espèce:

$$(\gamma) \qquad \sum_{n=0}^{n=\infty} b_n\left(\frac{x}{2}\right)^n = \left(\frac{2}{x}\right)^{\nu}\cdot\sum_{p=0}^{p=\infty} a_p\, J^{\nu+p}(x),$$

où les coefficients a_p peuvent être déterminés à l'aide des b par cette formule

$$(\delta) \qquad a_p = (\nu+p)\sum_{s=0}^{\leq \frac{p}{2}} \frac{\Gamma(\nu+p-s)}{s!}\, b_{p-2s},$$

tandis que nous aurons inversement

$$(\varepsilon) \qquad b_n = \frac{1}{\Gamma(\nu+n+1)} \cdot \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} (-1)^s \binom{\nu+n}{s} \cdot a_{n-2s}.$$

Mettons encore

$$b_n \left(\frac{x}{2}\right)^n = t_n,$$

nous aurons, en vertu des formules générales, ces deux équations

$$(4) \qquad v_n = t_n + \sum_{s=1}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2s}}{s!} \cdot \frac{t_{n-2s}}{(\nu+n-1)\cdots(\nu+n-s)},$$

$$(4a) \qquad t_n = v_n + \sum_{s=1}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{2s}}{s!} \cdot \frac{v_{n-2s}}{(\nu+n-s)\cdots(\nu+n-2s+1)},$$

de sorte que nous avons démontré, en vertu de I, cette autre proposition:

II. *Les deux séries $\Sigma|t_n|$, $\Sigma|u_n|$ sont en même temps convergentes ou divergentes; de plus, les deux limites*

$$\lim_{n=\infty} |u_n|, \quad \lim_{p=\infty} |t_p|$$

sont en même temps infiniment petites, finies ou infiniment grandes.

Cela posé, nous avons démontré que la série *neumannienne* ne peut jamais être convergente *à l'extérieur* du cercle de convergence de la série de puissances donnée, tandis qu'elle est toujours absolument convergente *à l'intérieur* de ce même cercle. Quant aux points situés au circonférence du cercle susdit, la série Σu_n ne peut jamais être convergente pour une telle valeur de x si $|t_n|$ croît à l'infini avec n; c'est-à-dire que nous n'avons que de regarder le cas où $|t_n|$ est toujours fini.

Dans ce cas la formule (4) donnera, en vertu de (3), cette autre équation

$$(5) \qquad u_n = t_n + \frac{x^2}{4(\nu+n-1)} \cdot t_{n-2} - \frac{x^2}{4(\nu+n+1)} \cdot t_n + \frac{L_n}{(\nu+n+1)^2},$$

où $|L_n|$ est une quantité *finie ou infiniment petite.* Or, en se rappelant que $|t_n|$ est toujours fini pourvu que $|u_n|$ le soit, nous aurons cette troisième proposition:

III. *Supposons que l'on sache que $|t_n|$ ou $|u_n|$ est fini pour n infini, désignons ensuite par ε une quantité positive donnée auparavant et étant aussi petite qu'on le veut, il est possible de déterminer un positif entier n', de façon que*

$$(6) \qquad \left| \sum_{s=n+1}^{s=n+p} u_s - \sum_{s=n+1}^{s=n+p} t_s \right| < \varepsilon,$$

pourvu que $n > n'$ et que p soit un positif entier quelconque.

Quant aux séries *neumanniennes* de deuxième espèce, nous aurons ces formules fondamentales:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} b_n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} = \left(\frac{2}{x}\right)^{\mu+\nu} \cdot \sum_{p=0}^{p=\infty} a_p J^{\mu+p}(x) J^{\nu+p}(x),$$

où l'on a posé

$$a_p = (\mu + \nu + 2p) \cdot \sum_{s=0}^{s=p} \frac{\Gamma(\mu+s+1)\,\Gamma(\nu+s+1)}{\mu+\nu+2s} \binom{\mu+\nu+p+s-1}{p-s} b_s,$$

et inversement

$$b_n = \frac{(-1)^n}{\Gamma(\mu+n+1)\,\Gamma(\nu+n+1)} \cdot \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s \binom{\mu+\nu+2n}{n-s} a_s,$$

formules qui montrent que tous les résultats que nous venons d'obtenir pour les séries de première espèce gardent leur validité aussi pour celles de deuxième espèce; c'est-à-dire que nous avons démontré ce théorème général:

IV. *Une série neumannienne (de première ou de deuxième espèce) est convergente en tout lieu ou l'est la série de puissances qu'elle représente et inversement; de plus, la convergence de ces deux séries est toujours du même genre: absolue ou non, uniforme ou non.*

Du reste, l'inégalité (6) montre que la série *neumannienne* et la série de puissances correspondantes, ayant leurs termes très éloignés finis et n'étant pas convergentes, possèdent les mêmes propriétés toutes les deux, savoir *être divergentes ou oscillantes entre des limites finies ou infinies.*

Remarquons encore que notre théorème montre qu'une série *neumannienne* possède entièrement le caractère d'une série de puissances ce qui s'accorde bien avec la remarque faite de M. Gram qu'une série *neumannienne* n'est guère convenable pour un calcul numerique, pourvu que $|x|$ ne soit pas petit.

Copenhague, le 10 février 1901.

Querschnittstheorie.

Von

E. B. Christoffel †,

(aus dessen Nachlass mitgetheilt von A. Krazer in Strassburg i. E.*)).

Die Lehre von den Schnitten durch die Fläche T ist veranlasst durch die Frage, unter welchen Bedingungen jeder ringförmige Integrationsweg ein Stück dieser Fläche einschliesst, also der ihm entlang durch die Fläche geführte Schnitt ein Stück der Fläche ablöst. Sie erfordert vor allem Andern eine genaue Classification der Schnitte durch eine solche Fläche.

I.

Der Ringschnitt, der Punktschnitt, die Querschnitte I. und II. Art; Randcurven der Fläche.

Die Fläche T ist eine zusammenhängende, d. h. man kann in ihr von jeder Stelle zu jeder andern gelangen. In ihrem ursprünglichen Zustande fehlt ihr jede Begrenzung; eine solche erlangt sie erst durch Schnitte, welche in ihr ausgeführt werden, und bei diesen und ihrer Classification handelt es sich wesentlich um die Anzahl und die Beschaffenheit der Randcurven, welche sie der Fläche ertheilen.

---

*) Christoffel hatte wiederholt die Absicht gehabt in einer Reihe von Abhandlungen einzelne Fragen aus der Theorie der Abel'schen Functionen zu behandeln. Kurz vor seinem Tode kam er nochmals auf dieses Vorhaben zurück und übergab in diesem Sinne die Abhandlung: „Ueber die Vollwerthigkeit und Stetigkeit analytischer Ausdrücke" der Redaction dieser Annalen. Nach seinem Tode fand sich eine zweite Abhandlung: „Vollständige Theorie der ϑ-Function" mit dem Vermerke: druckreif vor und wurde im 54. Bande veröffentlicht. Bei der Durchsicht des handschriftlichen Nachlasses habe ich nun vor Kurzem eine dritte dieser Abhandlungen, ebenfalls vollständig abgeschlossen vorgefunden, und es kommt dieselbe im Nachstehenden unverändert zum Abdruck, nachdem ich nur zur bequemeren Orientirung des Lesers die einzelnen Abschnitte mit Ueberschriften versehen habe.

Krazer.

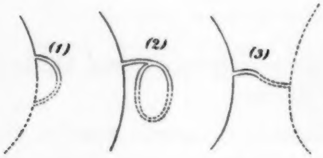
Ein Schnitt durch die ursprüngliche Fläche T kann nur in der Fläche selbst ansetzen; wird er so weit fortgesetzt, bis er zu einer frühern Stelle zurückkehrt, so heisst er *Ringschnitt*; solange das nicht eingetreten ist, *Punktschnitt*.

Durch einen Ringschnitt erhält die Fläche zwei Randcurven, durch einen Punktschnitt nur eine, aber das sind in allen Fällen *geschlossene Curven*, d. h. man darf einer solchen auf der Fläche nur nachgehen um sicher zu sein, dass man zu jeder beliebigen Stelle derselben und nöthigenfalls zur Ausgangsstelle zurückgelangen wird.

Hat nun die Fläche T durch Punkt- und Ringschnitte Ränder erhalten, welche, wie wir nochmals betonen, lauter geschlossene Curven sind, so wird eine dritte und letzte Kategorie von charakteristischen Schnitten möglich, die *Querschnitte* der verschiedenen Arten.

Jeder Querschnitt setzt in einem Rande an und endigt in einem solchen.

Zu einem Querschnitte gehört also, dass er nicht bloss in einem Rande beginnt, sondern auch, dass er in einem solchen endigt. Ein Schnitt, der bloss einen Rand öffnet, aber in der Fläche endigt, ohne zum zweiten Male einen Rand zu treffen, führt keinen besondern Namen, da er weiter nichts leistet, als den Rand zu erweitern, von dem er ausgegangen ist.



Endigt ein Querschnitt im nämlichen Rande, von dem er ausgeht (1) oder in sich selbst (2), so heisst er *Querschnitt I. Art*, endigt er in einer andern Randcurve (3), so heisst er *Querschnitt II. Art.*

Die Ränder eines fertigen Querschnitts I. Art liefern mit dem Rande, von welchem der Querschnitt ausgeht, zusammen *zwei Randcurven* der Fläche, *beides geschlossene Curven;* die Ränder eines Querschnittes II. Art vereinigen sich mit den durch den Querschnitt verbundenen Randcurven zu *einer einzigen, abermals geschlossenen Randcurve.*

Es springt in die Augen, dass jedes beliebige Schnittsystem in der Fläche T sich aus Schnitten der hier aufgezählten Arten zusammensetzen lässt.

II.

Die Flächen I. und II. Art.

Dies vorausgeschickt, möge eine zusammenhängende Fläche als eine Fläche I. Art bezeichnet werden, wenn sie durch jeden Ringschnitt zerstückelt wird; andernfalls heisse sie Fläche II. Art.

Die Frage, welche hier zu beantworten ist, betrifft dann die Kriterien, aus denen sich erkennen lässt, ob eine vorgelegte Fläche von der I. oder II. Art ist; es werden sich dabei von selbst die Hülfsmittel ergeben, um eine Fläche T der II. Art in eine den Bedürfnissen der Integralrechnung entsprechende Fläche T' der I. Art zu verwandeln.

Die vorstehende Classification der Flächen und der Schnitte durch dieselben führt nun zu folgenden Sätzen:

a) *Durch einen Querschnitt II. Art wird eine zusammenhängende Fläche nie zerstückelt;*

denn Verbindungen in der Fläche, welche durch ihn zerstört sind, können durch Einschaltung von Umwegen wieder hergestellt werden, indem man nämlich, an einem Querschnittrande angelangt, zunächst diesem und dann einer Randcurve bis zum andern Querschnittrande folgt, um von dort den unterbrochenen Weg weiter fortzusetzen.

b) *Wird eine zusammenhängende Fläche durch einen Ringschnitt oder einen Querschnitt I. Art überhaupt zerstückelt, so zerfällt sie in zwei Stücke;*

denn die Anzahl dieser Stücke kann nicht grösser sein als die Anzahl der Ränder, an denen entlang sie von einander abgelöst sind.

c) *Wird eine Fläche I. Art durch irgend welche Schnitte in Stücke zerlegt, so sind das lauter Flächen I. Art;*

denn wenn eines dieser Stücke durch einen Ringschnitt R nicht zerstückelt würde, so würde dieser auch die ursprüngliche Fläche nicht in Stücke zerfällen, also wäre dies eine Fläche II. Art.

d) *Eine Fläche I. Art wird nicht bloss durch jeden Ringschnitt, sondern auch durch jeden Querschnitt I. Art in Stücke zerlegt;*

denn wäre das nicht der Fall, so hätte man, nach Ausführung des Querschnittes, eine zusammenhängende Fläche mit zwei, vom Querschnitt herrührenden Randcurven; von diesem Querschnittrande gäbe es also durch die Fläche einen Weg l zum gegenüberliegenden Punkte des andern Querschnittrandes, also l entlang einen Querschnitt II. Art L, welcher die Fläche auch nicht zerstückelt, also würde L für sich allein die ursprüngliche Fläche um so weniger zerstückeln; sie wäre also eine Fläche, welche durch diesen Ringschnitt L nicht zerstückelt wird, also keine Fläche I. Art. Aus b), c), d) zusammengenommen folgt

e) *Jeder Ringschnitt und jeder Querschnitt I. Art zerfällt eine Fläche I. Art in zwei Stücke, und beides sind wieder Flächen I. Art.*

III.

Fortsetzung.

Die Umkehrung des vorstehenden Satzes e) führt nun zu einer Umformung des Kriteriums für Flächen I. und II. Art.

f) *Eine zusammenhängende Fläche τ werde durch einen Ringschnitt Q oder einen Querschnitt I. Art Q in zwei Stücke, E und τ_1 zerlegt. Sind dies Flächen I. Art, so ist τ selbst ebenfalls Fläche I. Art.*

Seien also E und τ_1 von der I. Art; es ist zu beweisen, dass τ nicht von der II. Art sein kann.

1) Jeder Ringschnitt durch E oder τ_1 allein schneidet aus dieser Fläche, also aus τ selbst ein Stück heraus; es ist also nur zu beweisen, dass τ auch durch jeden Ringschnitt zerfällt wird, welcher über Q hinweg alternirend durch E und τ_1 verläuft.

2) Sei R ein solcher Ringschnitt. Folgt man ihm, etwa von E aus, so kommt eine Stelle, wo er über Q hinweg in τ_1 eintritt, und auf jede solche Eintrittstelle folgt eine, wo er aus τ_1 wieder austritt. Ist, in dieser Weise gezählt,

$$\alpha$$

die Anzahl der Ein- also auch der Austrittsstellen, so wird R durch Q in 2α Abtheilungen zerlegt, von denen α durch E und ebensoviel durch τ_1 führen. Jeder von ihnen beginnt auf einem Rande von Q und endigt auf demselben Rande von Q, weil er sonst eine Verbindung zwischen E und τ_1 herstellen würde, während diese durch Q von einander abgelöst sind. Wenn zwei von diesen Abtheilungen sich etwa in E kreuzen würden, so ergäben sie zusammen drei Querschnitte für E. Aber das ist ausgeschlossen, da alle diese Abtheilungen Stücke eines einzigen Ringweges R sind. Also wird R durch Q in α Querschnitte I. Art von E, und ebensoviel Querschnitte I. Art von τ_1 zerlegt.

Bringt man diese für E in irgend eine Reihenfolge, so zerlegt der erste E in zwei Stücke I. Art (e); der zweite führt durch eines dieser Stücke und zerlegt dieses in zwei Stücke erster Art. So setzt sich das fort, und es folgt, dass E, mithin auch τ_1, in $\alpha + 1$ Stücke zerfällt.

Bei den vorliegenden Voraussetzungen wird also τ durch Q und R zusammen in $2\alpha + 2$ Stücke zerlegt. Dass dies Stücke I. Art sind, kommt nicht mehr in Betracht.

3) Dieselben Stücke erhält man auch, wenn man zuerst den Ringschnitt R und dann erst Q ausführt.

Sei τ' die Fläche, in welche τ durch den Ringschnitt R verwandelt wird und

$$x$$

die Anzahl der Stücke, aus denen τ' besteht also entweder $x = 1$ oder (nach b)) $x = 2$. Ist $x = 1$, so ist τ' eine zusammenhängende Fläche, τ Fläche II. Art; der zu beweisende Satz behauptet, dass $x = 2$ ist.

In der ursprünglichen Fläche τ war Q ein Ringschnitt oder ein Querschnitt I. Art; in τ' wird Q von R 2α-mal gekreuzt. Ist Q ein Ringschnitt, so zerfällt er in 2α Querschnitte von τ'; ist Q ein Querschnitt I. Art, so ist $2\alpha + 1$ die Anzahl der Querschnitte von τ', in welche Q zerfällt. Um beide Fälle zu umfassen, bezeichnen wir diese Anzahl durch

$$2\alpha + q,$$

so dass $q = 1$, wenn Q ein Querschnitt, und $q = 0$, wenn Q ein Ringschnitt von τ ist.

Wir zählen die Anzahl der Stücke, in welche τ' jetzt zerfällt, von Neuem ab. Dafür ist es nothwendig zu bemerken, dass im ersten Falle sich unter den Querschnitten, in welche Q zerfällt, mindestens Ein Querschnitt II. Art befindet, nämlich die Abtheilung, welche von einem Rande der ursprünglichen Fläche τ bis zu einem Rande von R reicht. Sei

$$\lambda + q$$

die wirkliche Anzahl aller Querschnitte II. Art unter jenen, so folgt, mag Q Quer- oder Ringschnitt sein,

$$\lambda \geqq 0,$$

und es bleiben $2\alpha - \lambda$ Querschnitte I. Art von τ' übrig. Aber da über die Beschaffenheit der Fläche τ' nichts feststeht, so ist der Fall in Aussicht zu nehmen, dass auch einzelne von diesen keine Zerstückelung von τ' nach sich ziehen. Sei μ ihre Anzahl, also auch

$$\mu \geqq 0,$$

so bleiben $2\alpha - \lambda - \mu$ wirklich zerstückelnde Querschnitte I. Art übrig, und diese machen aus den x Stücken, aus denen τ' besteht, deren

$$x + 2\alpha - \lambda - \mu.$$

Aber das sind die nämlichen $2\alpha + 2$ Stücke, die wir in Nr. 2 fanden, also ist $2\alpha + 2 = x + 2\alpha - \lambda - \mu$, d. i. $\lambda + \mu = x - 2$. Dazu kommt $\lambda + \mu \geqq 0$, das giebt $x \geqq 2$. Aber wir wissen, dass x entweder $= 1$ oder $= 2$ ist, also folgt $x = 2$, $\lambda + \mu = 0$, $\lambda = 0$, $\mu = 0$.

Beschränken wir uns auf das, was wir brauchen, so folgt, dass τ durch jeden Ringschnitt R zerstückelt wird, auch wenn er nicht bloss durch E oder τ_1 allein führt, also ist, wie behauptet, τ eine Fläche I. Art.

Nehmen wir hierzu noch den selbstverständlichen Satz dass

g) *wenn zwar E von der I., aber τ_1 von der II. Art ist, nothwendig τ selbst auch von der letztern Art sein wird,*

so ergiebt sich durch Vereinigung beider der

Lehrsatz A. *Von einer zusammenhängenden Fläche τ werde durch einen Ringschnitt oder einen einzigen Querschnitt ein Stück E abgelöst, und sei τ_1 die Fläche, welche dann noch übrig bleibt. Ist E eine Fläche I. Art, so sind stets τ und τ_1 Flächen derselben Art.*

Um diesen Satz fruchtbar zu machen, bedarf es des Nachweises der charakteristischen Flächenstücke I. Art E; zuvor wollen wir aber die verlangte Umformung der Kriterien für Flächen I. Art zu Ende bringen.

Sei τ eine zusammenhängende Fläche, Q ein Querschnitt II. Art in τ; er verwandle τ in eine Fläche I. Art, welche τ' heissen möge. Es folgt 1) Jeder Ringschnitt von τ' schneidet ein Stück aus τ', also das nämliche Stück aus τ heraus, also wird τ durch jeden Ringschnitt zerfällt, welcher Q nicht überschreitet. 2) Sei R ein Ringschnitt von τ, welcher, wenn man Q ausführt, von diesem geschnitten wird. Durch diesen Ringschnitt wird τ in eine Fläche τ'' verwandelt, welche entweder noch zusammenhängt, oder aus zwei Stücken besteht. Sei

$$y$$

die Anzahl der Stücke, aus denen τ'' besteht, und

$$\alpha$$

die Anzahl der Punkte, in denen Q und R einander kreuzen. Wir zählen nun auf zwei Arten die Anzahl der Stücke ab, in welche τ durch Q und R zerlegt wird.

1) Das sind zunächst die Stücke, in welche τ' durch R zerfällt. Es ist aber nach Voraussetzung τ' eine Fläche I. Art, die beiden Ränder von Q, als Querschnitt II. Art, haben sich mit den durch Q verbundenen Rändern von τ zu einer einzigen Randcurve ϱ von τ' vereinigt. Der ursprüngliche Ringschnitt R wird durch Q in α Abtheilungen zerlegt, die einander nicht kreuzen, jede beginnt und endigt in einem Rande von Q, also auf derselben Randcurve ϱ von τ': sie sind hiernach sämmtlich Querschnitte I. Art von τ' und zerfällen demnach τ' in $\alpha + 1$ Stücke.

Durch R und Q zusammen wird also τ in $\alpha + 1$ Stücke zerlegt.

2) Das aber sind auch die Stücke, in welche τ'' durch Q zerfällt. Aber in dieser Fläche löst Q sich in $\alpha + 1$ Querschnitte auf, darunter mindestens zwei von der II. Art, nämlich der erste und der letzte, da die Randcurve von τ, in welcher einer von diesen beginnt, verschieden ist von dem Rande von R, in welchem er sein Ende erreicht. Sei

$$\lambda + 2$$

unter jenen die genaue Anzahl von Querschnitten II. Art, und unter den noch übrigen $\alpha - \lambda - 1$ Querschnitten I. Art

$$\mu$$

die Anzahl derjenigen, welche keine Zerstückelung nach sich ziehen; es bleiben $\alpha - \lambda - \mu - 1$ zerstückelnde Querschnitte übrig, und diese machen aus den y Stücken, aus denen τ'' besteht, deren $y + \alpha - \lambda - \mu - 1$. Das sind also die $\alpha + 1$ vorigen; es folgt $y + \alpha - \lambda - \mu - 1 = \alpha + 1$, also $\lambda + \mu = y - 2$. Wiederum ist $\lambda \gtreqless 0$, $\mu \gtreqless 0$ also $\lambda + \mu \gtreqless 0$, $y \gtreqless 2$, während y nur $= 1$ oder $= 2$ sein kann. Es folgt $y = 2$, $\lambda = 0$, $\mu = 0$.

Beschränken wir uns auf das, was für unsere Zwecke ausreicht, so haben wir den Satz:

h) *Wird eine zusammenhängende Fläche durch einen Querschnitt II. Art in eine Fläche I. Art verwandelt, so ist sie selbst eine Fläche dieser Art.*

Die Umkehrung dieses Satzes liegt auf der Hand:

i) *Wenn eine Fläche I. Art überhaupt einen Querschnitt II. Art gestattet, so wird sie durch denselben in eine neue Fläche I. Art verwandelt;* denn ein Ringschnitt, welcher letztere nicht zerstückelt, würde auch die ursprüngliche Fläche nicht in Stücke zerlegen.

Beide Sätze zusammengenommen zeigen weiter, dass eine Fläche II. Art durch einen Querschnitt II. Art niemals in eine Fläche I. Art, also, da sie durch ihn nicht zerstückelt wird, stets in eine neue Fläche II. Art verwandelt wird.

Folglich wird durch einen Querschnitt II. Art der Gattungscharakter einer zusammenhängenden Fläche niemals geändert. Und da dies bestehen bleibt, wenn zu jenem ein Querschnitt II. Art nach dem andern kommt, so haben wir den

Lehrsatz B. *Durch Querschnitte II. Art wird die Art einer zusammenhängenden Fläche niemals geändert.*

Dazu kommt nun noch eine Schlussbemerkung.

Riemann nennt *einfachzusammenhängend* jede zusammenhängende Fläche, welche durch jeden Querschnitt zerstückelt wird. Eine solche darf also keinen Querschnitt II. Art gestatten, also nicht mehr als eine Randcurve haben. Sie darf auch nicht unter den Flächen II. Art gesucht werden, denn eine (durch eine Randcurve) begrenzte Fläche, welche durch einen Ringschnitt R nicht zerstückelt wird, wird auch nicht zerfällt durch den Querschnitt I. Art, welcher sich zusammensetzt aus R und einem vom Rande nach R führenden Querschnitt II. Art. Dazu gehört der Satz

k) *Die einfach zusammenhängenden Flächen sind nichts anderes als diejenigen Flächen I. Art, welche nur eine einzige Randcurve haben.*

Dass sie nur unter den Flächen dieser Art zu suchen sind, wurde soeben bewiesen; dass auch umgekehrt jede Fläche I. Art, die nur eine Randcurve hat, im Sinne Riemann's einfach zusammenhängend ist, folgt daraus, dass nach d) eine Fläche I. Art durch jeden Querschnitt I. Art

zerstückelt wird und, wenn sie nur eine Randcurve hat, keinen Querschnitt II. Art, sondern nur Querschnitte I. Art gestattet, also durch jeden Querschnitt überhaupt zerlegt wird.

IV.

Die Stücke E und W erster Art einer Fläche T.

Um von diesen Lehrsätzen Anwendung machen zu können, ist nur noch nöthig, die charakteristischen Stücke einer Fläche T nachzuweisen, welche zu den Flächen I. Art gehören und deren successive Ablösung, wenn sie für jedes Stück durch einen einzigen Ring- oder einen einzigen Querschnitt erreicht wird, die Art der Fläche ungeändert lässt.

Das sind nur zwei verschiedene Gattungen von Flächenstücken. Die Stücke der ersten Gattung sind solche, die sich auch aus einer Ebene herausschneiden lassen, also ebene Stücke von T; wo eine Bezeichnung wünschenswerth ist, mögen sie als

Stücke E von T

bezeichnet werden. Dass ein solches durch jeden Ringschnitt zerfällt, versteht sich von selbst, und liegt der complexen Integration in der Ebene zu Grunde.

Ein Stück der andern Gattung fällt aus T heraus, wenn ein Ringschnitt in einem vollständigen Umlauf um einen Verzweigungspunkt α, aber nicht um mehr als einen, ausgeführt wird. Ein solches gewundenes Stück von T soll als ein

Stück W oder $W(\alpha)$ von T

bezeichnet werden. Dass es eine Fläche I. Art ist, beweist man am einfachsten, indem man durch dasselbe vom Verzweigungspunkte α aus eine genügende Anzahl radialer Schnitte nach seinem Umfange führt. Die beiden ersten Schnitte zusammen und alsdann jeder folgende für sich allein sind lauter Querschnitte I. Art; jeder von ihnen löst von W ein Stück E ab, also ein Stück I. Art nach dem andern; was übrig bleibt, ist selbst ein Stück E und von derselben Art wie W, mithin W von der I. Art.

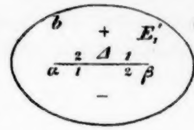
Mit diesen ebenen Stücken E und den gewundenen Stücken W sind aber alle charakteristischen Stücke I. Art von T erschöpft, indem T selbst und jeder Theil von T durch eine hinreichende Anzahl von Ring- und Querschnitten in solche Stücke E und W aufgelöst werden kann, und die Frage nach dem Gattungscharakter von T nur davon abhängt, wieviel solcher Schnitte zur Ablösung eines solchen Stückes erforderlich sind.

V.

Die zweiblättrige Fläche T mit einer einzigen Doppellinie.

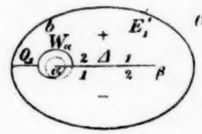
Wir beginnen mit der einfachsten Riemann'schen Fläche, der zweiblättrigen Fläche mit einer einzigen Doppellinie. Es ist nach dem Vorangehenden sehr leicht zu beweisen, dass sie von der I. Art ist: aber der Beweis selbst und einige Nebenumstände, die sich dabei ergeben, liefern uns die Hülfsmittel, mit denen wir auch in allen folgenden Fällen ausreichen. Eine gewisse Ausführlichkeit an dieser Stelle wird dem Folgenden zu Gute kommen.

Seien also zwei Ebenen E_1 und E_2 in einer einzigen Doppellinie Δ aneinander geheftet; die Endpunkte α, β von Δ sind dann die Verzweigungspunkte der so entstandenen Fläche T.



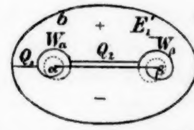
(1)

1) Ein Ringschnitt b zerlegt die Ebene E_1 in zwei Theile, einen äussern und einen innern E_1'; führt b in der Fläche T um Δ herum, so fällt jener ab, dieser bleibt an E_2 haften, und bildet mit E_2 zusammen eine Fläche gleicher Art wie T.



(2)

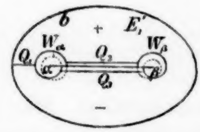
2) In dieser Fläche führen wir von b aus, also in E_1' beginnend, einen Querschnitt I. Art Q_1 so aus, dass er zuletzt um α kreist, bis er sich schliesst. Er schneidet aus der Fläche ein Stück W_α heraus, was von der Fläche übrig ist, ist von der frühern Art.



(3)

3) In dieser Fläche führen wir einen zweiten Querschnitt I. Art Q_2 aus. Er beginnt in E_1' auf dem Rande von W_α, folgt dann dem Rande von $\overset{+}{E}_1'$ und endigt mit einem vollständigen Umlauf um β. Er schneidet aus der vorigen Fläche ein Stück W_β heraus, lässt also die Art der Fläche ungeändert.

In dieser Fläche ist $\overset{+}{E}_1'$ völlig abgelöst von $\overset{-}{E}_2$ aber es haftet noch $\overset{-}{E}_1'$ an $\overset{+}{E}_2'$ von W_α bis W_β.



(4)

4) Nun führe man noch einen Querschnitt I. Art Q_3 aus, er folge dem Rande von $\overset{-}{E}_1'$ und führe von W_α bis W_β. Er löst das, was von E_1' nach Ausscheidung von W_α und W_β noch übrig geblieben ist, von E_2 völlig ab: von T ist nur noch E_2, mit einer sofort zu erwähnenden Modification übrig, das ist eine Fläche I. Art, also ist auch T von der I. Art.

Was hier vorgegangen ist, wird sich im Folgenden stets wiederholen. Wir werden dann nöthigenfalls b als einen zur Doppellinie Δ gehörigen Ringschnitt und Q_1, Q_2, Q_3 als die drei zu b, Δ gehörigen Querschnitte bezeichnen.

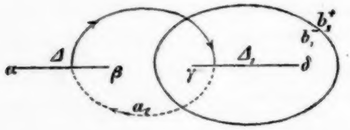
Abgesehen vom äussern Theile des Blattes E_1, bezüglich dessen sich bei den folgenden Aufgaben andere Verhältnisse einstellen werden, leisten die drei zu b, Δ gehörigen Querschnitte folgendes: 1) dass der innere Theil E_1' von E_1 nebst Stücken von E_2 ohne Aenderung der Flächenart abgelöst werden, und 2) in E_2 eine *Lücke* entsteht, indem die zu W_α, W_β gehörigen Stücke von E_2 ausgefallen sind, aber ihre Ränder sind durch die von Q_2 und Q_3 herrührenden Schnittränder von $\overset{-}{E}_2$ und von $\overset{+}{E}_2$ zu einer einzigen Randcurve vereinigt.

Das sind die Operationen und die dabei aufzufassenden Umstände, auf welche wir im Folgenden Bezug nehmen werden.

VI.

Die Fläche T der elliptischen Functionen.

Sei T wieder eine zweiblättrige Fläche aber mit zwei Doppellinien Δ und Δ_1 also vier Verzweigungspunkten $\alpha\, \beta\, \gamma\, \delta$; Δ reiche von α bis β, Δ_1 von γ bis δ.



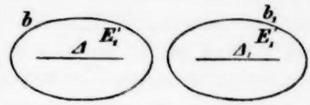
(τ)

Diese Fläche ist nicht von der I. Art. Man führe über das erste Blatt von T, welches wieder E_1 heisen möge, einen Ringschnitt b_1 um Δ_1, so entsteht eine Fläche τ, von welcher wir beweisen werden, dass sie eine zusammenhängende ist. Daraus folgt dann, dass T selbst von der II. Art ist.

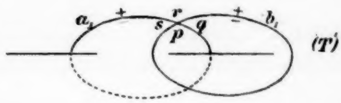
Seien $\overset{-}{b}_1$, $\overset{+}{b}_1$ die beiden Ränder von b_1, und zwar $\overset{-}{b}_1$ derjenige, welcher Δ_1 zugewandt ist. Alle Wege durch T, welche zu $\overset{-}{b}_1$ führen und von $\overset{+}{b}_1$ aus weiter fortzusetzen sind, sind unterbrochen; aber man kann ihre Verbindung durch einen Umweg a_1 wieder herstellen, der von $\overset{-}{b}_1$ durch Δ_1, dann über E_2 nach Δ und durch die Doppellinie hindurch wieder über E_1 nach $\overset{+}{b}_1$ führt. Man kann also in der Fläche τ noch von jeder Stelle aus jede beliebige Stelle von T erreichen, τ ist also eine zusammenhängende Fläche, T selbst eine Fläche II. Art.

Aber τ ist eine Fläche I. Art. Zum Beweise führe man über E_1 zunächst den zu Δ gehörigen Ringschnitt b aus; alles was vom Blatte E_1

ausserhalb b und b_1 liegt, fällt ab; was übrig ist, ist von derselben Art wie τ und besteht aus E_2 und den von b bis Δ und von b_1 bis Δ_1 reichenden innern Theilen E_1' von E_1. Diese werden durch die drei zu b, Δ und die drei zu b_1, Δ_1 gehörigen Querschnitte $Q_1\ Q_2\ Q_3$ abgelöst, wieder ohne Aenderung des Flächencharakters. Was übrig bleibt, ist E_2 mit den beiden von Δ, Δ_1 herrührenden Lücken, also eine Fläche I. Art; also ist auch τ eine Fläche I. Art, wie behauptet wurde.



Aber diese Fläche I. Art τ hat zwei Randcurven, $\overset{-}{b}_1$ und $\overset{+}{b}_2$, sie gestattet also einen Querschnitt II. Art, ohne zu zerfallen und ohne ihre Art zu ändern. Dafür nehmen wir den Schnitt längs des vorhin benutzten Umweges a_1; τ verwandelt sich in eine Fläche I. Art T', die vier Schnittränder $\overset{-}{pb_1q}$, $\overset{+}{qa_1r}$, $\overset{+}{rb_1s}$, $\overset{-}{sa_1p}$ vereinigen sich zu einer einzigen Randcurve, also folgt, *dass diese Fläche T' eine einfach zusammenhängende ist.*



Während also τ durch jeden Ringschnitt, aber nicht durch jeden Querschnitt (z. B. a_1) zerstückelt wird, wird T' durch jeden Ring- und jeden Querschnitt in Stücke zerlegt.

Es ist wohl zu beachten, dass diese Untersuchung nur den Zwecken der Integralrechnung dient. Wir treten in diese Frage sofort ein, um so mehr als das, was sich im vorliegenden Falle noch mit genügender Einfachheit herausstellen wird, vollkommen ausreicht, um die nöthige Aufklärung in die folgenden, wenn auch noch so verwickelten Fälle zu bringen. Sei

$$s = \sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)(z-\delta)}$$

die Irrationalität, welche der vorliegenden Fläche T eindeutig zugeordnet ist,

$$w = \int \frac{dz}{s}$$

das zugehörige Integral I. G. Auf diesen Fall beschränkt, besteht die der Integralrechnung angehörige Frage, welche den Anlass zur Flächentheorie giebt, darin, ob und unter welchen Umständen zwei verschiedene Wege al_1z, al_2z durch T denselben Werth für w liefern; allgemeiner in der Aufgabe, wenn w_1, w_2 die Werthe sind, welche sich auf diesen Wegen für w ergeben, den Werth von $w_1 - w_2$ zu ermitteln. Das ist der Werth den das $\int dw$ auf dem Wege al_1zl_2a erlangt, als Ringweg heisse er R.

Die Frage lässt sich beantworten, sobald R ein Stück der Fläche abgrenzt. In der Fläche T ist das nicht bei jedem Ringwege R der Fall, wohl in der Fläche τ. Für diese soll also $w_1 - w_2$ ermittelt werden.

Sei demnach R Ringweg durch τ; er zerfällt τ in zwei Stücke E und F, und sei E dasjenige von beiden, welches bei der beabsichtigten Integration in *positiver* Richtung umlaufen wird.

Bezüglich E sind nun folgende drei Fälle herstellbar, also möglich: erstens der Fall, wo E von R allein begrenzt ist; zweitens der Fall, wo R und ein Rand von b_1, etwa $\overset{+}{b}_1$ die Begrenzung von E bilden; und drittens der Fall, wo die Begrenzung von E aus R, $\overset{+}{b}_1$ und $\overset{-}{b}_1$ besteht.

In allen Fällen ist das über die ganze Begrenzung von E in positiver Richtung erstreckte $\int dw = 0$:

$$\int\limits_{(E)} dw = 0.$$

Zu ihm liefert R in allen Fällen den Beitrag $w_1 - w_2$; seien $\overset{+}{B}$, $\overset{-}{B}$ die Beiträge, welche $\overset{+}{b}_1$, $\overset{-}{b}_1$ in den übrigen Fällen liefern, so haben wir in den drei aufeinanderfolgenden Fällen

$$(1)\ w_1 - w_2 = 0, \quad (2)\ w_1 - w_2 + \overset{+}{B} = 0, \quad (3)\ w_1 - w_2 + \overset{+}{B} + \overset{-}{B} = 0.$$

Aber da im dritten Falle $\overset{-}{b}_1$ mit denselben Werthen von s wie $\overset{+}{b}_1$ aber in entgegengesetzter Richtung durchlaufen wird, so ist $\overset{-}{B} = -\overset{+}{B}$, und wir erhalten

$$\begin{array}{ll} \text{in den Fällen (1) und (3):} & w_2 = w_1, \\ \text{im zweiten Falle:} & w_2 = w_1 + \overset{+}{B}. \end{array}$$

Die Frage nach der Beziehung zwischen w_2 und w_1 lässt sich also in der Fläche τ beantworten, und insofern löst die Fläche τ die Aufgabe so, wie sie ursprünglich gelautet hat.

Aber die Lösung, welche wir finden, zeigt, dass man die ursprüngliche Aufgabe vervollständigen kann und an ihre Stelle, so weit sie das Integral I. G. betrifft, die Frage stellen kann, ob sich die Fläche τ so modificiren lässt, dass der zweite Fall unmöglich wird, denn dann liefern alle Wege zwischen denselben Endpunkten denselben Werth für w, und *w ist eindeutig geworden.*

Das ist erreicht, wenn man bewirken kann, dass entweder kein Rand von b_1 oder beide zur Begrenzung von E gehören. *Dies leistet der Querschnitt a_1*, da a_1 und b_1 zusammen nur eine einzige Randcurve ergeben.

Ist E Stück von T', so ist entweder R allein seine Begrenzung, oder diese besteht aus R und der genannten vollständigen Randcurve; zum $\int\limits_{(E)} dw$ liefert R den Beitrag $w_1 - w_2$, die Integration über gegenüberliegende Theile der Randcurve hebt sich überall auf; es folgt $w_1 - w_2 = 0$, d. h. $w_2 = w_1$, *also* ist w, *auf die einfach zusammenhängende Fläche* T' *beschränkt, eindeutig.*

Und das rührt, wie man deutlich erkennt, einzig und allein davon her, dass die Ränder des Schnittpaares a_1, b_1 eine einzige Randcurve bilden, dass sie also entweder ganz oder gar nicht zur Begrenzung von E gehört, und dass die Integrationen über diese Randcurve einander aufheben.

Dies ist also der Grund, wesshalb man schon im vorliegenden Falle die Fläche τ aufgiebt, und zu Zwecken der Integralrechnung sich der einfach zusammenhängenden Fläche T' bedient, obgleich auch τ die ursprüngliche Frage der Integralrechnung löst.

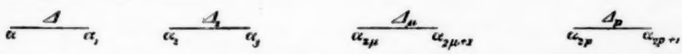
VII.

Die allgemeine Fläche T der ultraelliptischen Functionen.

Der Lehre von den ultraelliptischen Functionen von beliebigem Genus p liegt die Irrationalität

$$s = \sqrt{[(z-\alpha)(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_{2p+1})]}$$

zu Grunde, wo unter dem Wurzelzeichen das Product aus $2p+2$ ungleichen Wurzelfactoren steht, also die $2p+2$ Werthe $\alpha\,\alpha_1 \cdots \alpha_{2p+1}$ ungleich sind. Um sie eindeutig zu machen, bedarf es einer zweifachen z-Ebene T, deren Blätter E_1 und E_2 in $p+1$ Doppellinien $\Delta\,\Delta_1 \cdots \Delta_p$ zusammenhängen. Man kann diese, ohne an der Zuordnung der Werthe von s zu den Punkten der Fläche etwas zu ändern, so anlegen, dass Δ von α bis α_1, Δ_1 von α_2 bis $\alpha_3, \cdots \Delta_\mu$ von $\alpha_{2\mu}$ bis $\alpha_{2\mu+1} \cdots$ und Δ_p von α_{2p} bis α_{2p+1} reicht.



(T)

Dass diese Fläche von der II. Art ist, ergiebt sich wie im vorigen Falle, indem man durch E_1 um jede der p Doppellinien $\Delta_1\,\Delta_2 \cdots \Delta_p$ einen zugehörigen Ringschnitt $b_1\,b_2 \cdots b_p$ legt. Dann entsteht eine neue Fläche τ,

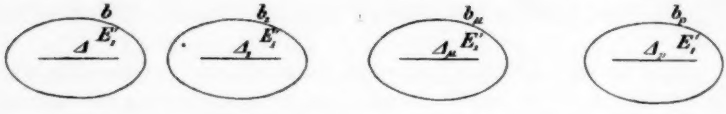
(τ)

von der man wie im vorigen Falle beweist, dass sie eine zusammenhängende ist.

Aber diese Fläche τ ist von der I. Art, d. h. sie wird durch jeden Ringschnitt in Stücke zerlegt.

Der Beweis wird geleistet, indem wir von dieser Fläche τ ein Stück I. Art nach dem andern ablösen, und zwar das erste durch einen Ringschnitt, jedes folgende durch einen Querschnitt I. Art, und zwar so lange, bis als Fläche gleicher Art wie τ ein ebenes Stück übrig bleibt.

Diesen Ringschnitt führen wir durch E_1 um Δ: es ist der Ringschnitt b der folgenden Figur; er löst den ausserhalb $b\,b_1 \cdots b_p$ liegenden Theil



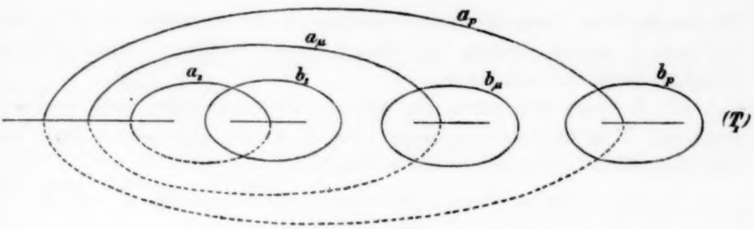
von E_1 ab und lässt übrig eine Fläche, welche aus E_2 und den inneren Theilen E_1' von E_1 besteht. Diese nebst zugehörigen Stücken von E_2 lösen wir ab durch die drei zu b, Δ, zu $b_1, \Delta_1, \cdots$ zu b_p, Δ_p gehörigen Querschnitte $Q_1\,Q_2\,Q_3$: was übrig bleibt, hat den ursprünglichen Flächencharakter, ist aber nichts anderes als E_2 mit den von $\Delta\,\Delta_1 \cdots \Delta_p$ herrührenden Lücken, also eine Fläche I. Art: folglich ist auch τ selbst von dieser Art, wie behauptet.

Sei wieder w ein Integral I. G., um es an dieser Stelle wieder bei diesem einfachsten und wichtigsten Falle zu lassen, und seien w_1, w_2 die Werthe, welche w auf den durch τ führenden Wegen al_1z, al_2z erlangen, mithin $w_1 - w_2$ der Werth, den das $\int dw$ auf dem Ringwege al_1zl_2a, den wir R nennen, erhält. Dieser Weg zerlegt τ in zwei Stücke E und F; sei wieder E dasjenige, an welchem diese Integration in positiver Richtung vorbeiführt. Gehören beide Ränder eines Ringschnittes b_μ zur Begrenzung von E, so hat das, wie beim elliptischen Integral w, auf den Werth von $w_1 - w_2$ gar keinen Einfluss; welchen Werth $w_1 - w_2$ hat, hängt nur davon ab, ob von einigen dieser Ringschnitte nur ein Rand zur Begrenzung von E gehört, und welche das sind. Das richtet sich, wenn der Weg l_1 gegeben ist, ganz und gar nach der Wahl von l_2; in jedem Falle kann man $w_1 - w_2$ ermitteln, aber nicht in jedem Fall findet sich dies $= 0$.

Begnügt man sich nicht mit der Reduction von w_2 auf w_1, so ist der Weg gewiesen um w eindeutig zu machen, so nämlich dass stets $w_1 - w_2 = 0$ wird. Man darf, um das zu erreichen, die Fläche nur so einrichten, dass, *so oft irgend ein Schnittrand zur Begrenzung von E gehört, der gegenüberliegende Rand ihr auch angehört.*

Für b_1 leistet das der Querschnitt II. Art a_1, den wir bei der Fläche der elliptischen Functionen benutzten, und zwar leistet er dies zugleich

für sich selbst, weil die Ränder von a_1, b_1 zusammen eine einzige Curve bilden, die hiernach entweder ganz oder gar nicht zur Begrenzung von E gehört. Für b_2 ergiebt das nach dem nämlichen Muster einen Querschnitt II. Art a_2, u. s. w. bis b_p, zu dem sich ein Querschnitt II. Art a_p ergiebt.



So erhält man jetzt p Schnittpaare $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, $\cdots a_p b_p$, und die Fläche T_1, in welche sie T verwandeln, ist eine zusammenhängende Fläche I. Art. Auf sie beschränkt, ist jedes Integral I. G. eindeutig.

Aber diese Fläche hat p Randcurven, ist also keine einfach zusammenhängende. Fordert die Aufgabe eine solche, was bei den Integralen der Classe nie der Fall ist, so hat man nur zu bewirken, dass alle Randcurven sich zu einer einzigen vereinigen. Das erreicht man durch Querschnitte II. Art: einen von der ersten Randcurve zur zweiten; seine Ränder vereinigen sich mit beiden Randcurven zu einer einzigen; von dieser führt man, mit dem gleichen Erfolge, einen zweiten Querschnitt II. Art zur dritten Randcurve von T_1; fährt man so fort, so erreicht man das vorgesteckte Ziel durch $p-1$ Querschnitte II. Art. Diese kann man, nach dem, was soeben ausgeführt wurde, so anlegen, dass man auf einem Rande des ersten einen Punkt ω annimmt, und von diesem die $p-2$ folgenden alle ausgehen lässt. Dann lassen die $p-1$ Querschnitte II. Art sich auch ansehen als ein Bündel von p Schnitten $c_1\, c_2 \cdots c_p$, die alle von ω ausgehen und, ohne einander zu schneiden, durch die Fläche T_1 nach den Rändern von $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, $\cdots a_p b_p$ führen.

Dann entsteht ein Schnittnetz, welches aus p Querschnittbündeln $c_1 a_1 b_1$, $c_2 a_2 b_2$, $\cdots c_p a_p b_p$ besteht, und die Fläche T in eine einfach zusammenhängende T' verwandelt.

VIII.

Die allgemeine n-blättrige Fläche T.

Diese Principien erledigen auch den Fall, welcher der allgemeinen Lehre von den Abel'schen Functionen zu Grunde liegt, und bei dem die Fläche T aus beliebig viel Blättern besteht, aber der Zusammenhang

zwischen denselben nur durch Doppellinien zwischen je zwei Blättern vermittelt wird. Seien also $E_1 E_2 \cdots E_n$ die Blätter von T,

$$n$$

ihre Anzahl und

$$d$$

die Anzahl ihrer Doppellinien. Zunächst ist die Vorfrage zu erledigen, wie man es sich zu denken hat, dass n Ebenen durch d Doppellinien in Zusammenhang gebracht sind.

An E_1 muss wenigstens ein anderes Blatt angeheftet sein, weil E_1 sonst mit T nicht zusammenhinge. Sei E_2 an E_1 angeheftet. Dazu ist eine Doppellinie erforderlich und hinreichend; sei

$1 + a_1$ die wirkliche Anzahl aller Doppellinien zwischen E_1 und E_2,
also $a_1 \gtreqless 0$.

Eine von diesen wähle man als für den Zusammenhang zwischen E_1 und E_2 wesentlich heraus; die a_1 übrigen sind dann entbehrlich 1) für den Zusammenhang zwischen E_1 und E_2, also 2) für den Zusammenhang von T selbst.

Mit diesen $1 + a_1$ Doppellinien bilden E_1 und E_2 eine zusammenhängende Fläche, welche wir E_{12} nennen werden.

An E_{12} muss mindestens ein anderes Blatt E_3 angeheftet sein, sei

$1 + a_2$ die wirkliche Anzahl aller Doppellinien zwischen E_{12} und E_3,
also $a_2 \gtreqless 0$.

Unter diesen wähle man eine, D_2, als für den Zusammenhang zwischen E_{12} und E_3 wesentlich heraus; die a_2 übrigen sind dann für diesen und für den Zusammenhang von T selbst entbehrlich. Mit diesen $1 + a_2$ Doppellinien bilden E_{12} und E_3 zusammen eine Fläche E_{123}.

Mit dieser muss irgend ein Blatt E_4 in $1 + a_3$, $a_3 \gtreqless 0$ Doppellinien zusammenhängen, von denen irgend eine, D_3, wesentlich ist, die a_3 übrigen überzählig sind. Zusammen bilden E_{123} und E_4 eine Fläche E_{1234}.

So setzt sich die Schlussweise fort bis zu einer aus den $n - 1$ Blättern $E_1 E_2 \cdots E_{n-1}$ gehefteten Fläche $E_{12\ldots n-1}$; an sie muss E_n geheftet sein; ist $1 + a_{n-1}$ die Anzahl der Doppellinien, welche das leisten, so ist irgend eine von ihnen, D_{n-1}, für den angegebenen Zweck wesentlich, die a_{n-1} übrigen sind entbehrlich.

So erhalten wir 1) $n - 1$ Doppellinien $D_1 D_2 \cdots D_{n-1}$, welche für den Zusammenhang der n Blätter ausreichen aber auch unentbehrlich sind, und 2) wenn $a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} = p$, also $p \gtreqless 0$ ist, noch p andere Doppellinien, welche für den Zusammenhang von T entbehrlich sind. Dies giebt als Anzahl aller Doppellinien von T

$$d = n - 1 + p.$$

Ist also eine n-blättrige, zusammenhängende Fläche T nur in Doppellinien geheftet, so ist die Anzahl derselben

$$d \geqq n - 1.$$

Ist insbesondere $d > n - 1$ und

$$d = n - 1 + p,$$

so kann man aus diesen Doppellinien auf mindestens eine Art eine Gruppe von $n - 1$ Doppellinien

$$D_1\, D_2 \cdots D_{n-1}$$

herausheben, welche die n Blätter der Fläche in Zusammenhang bringen, und dann bleiben p Doppellinien

$$\Delta_1\, \Delta_2 \cdots \Delta_p$$

übrig, welche für den Zusammenhang der Blätter entbehrlich sind. Jene werden wir als die wesentlichen, diese als die überzähligen Doppellinien der Fläche T bezeichnen.

Die Untersuchung dieser Fläche T gründet sich auf ihre Beziehung zu der einfacheren Fläche, welche entsteht, wenn zur Heftung von $E_1 E_2 \cdots E_n$ nur die wesentlichen Doppellinien $D_1\, D_2 \cdots D_{n-1}$ verwendet werden; wir wollen dieselbe als eine T_n^0 bezeichnen, so dass, wenn bei der obigen Entstehungsweise von T ebenfalls nur diese Doppellinien, aber nicht die überzähligen benutzt werden, E_1 eine T_1^0, E_{12} eine $T_2^0, \cdots E_{12\ldots n-1}$ eine T_{n-1}^0 heissen wird.

α. Diese Fläche T_n^0 ist von der I. Art.

Sie entsteht, indem E_n mittelst der Doppellinie D_{n-1} an eine T_{n-1}^0 geheftet wird. Man führe durch E_n einen Ringschnitt b um D_{n-1}; er löst den äussern Theil von E_n ab, den innern löse man ab durch die drei zu b, D_{n-1} gehörigen Querschnitte $Q_1\, Q_2\, Q_3$; was übrig bleibt, ist von derselben Art wie T_n^0. Aber was übrig bleibt, ist T_{n-1}^0 bis auf eine von D_{n-1} herrührende Lücke, vermöge deren an T_{n-1}^0 ein ebenes Stück fehlt, und ist aus diesem Grunde von derselben Art wie die vollständige Fläche T_{n-1}^0. Also sind T_n^0, T_{n-1}^0, $T_{n-2}^0, \cdots T_2^0$, T_1^0 alle von derselben, mithin alle von der I. Art.

β. Führt man in der Fläche T um jede überzählige Doppellinie $\Delta_1\, \Delta_2 \cdots \Delta_p$ in einem der beiden Blätter, zu denen sie gehört, einen Ringschnitt $b_1\, b_2 \cdots b_p$ aus, so erhält man eine Fläche τ, welche noch zusammenhängt und von der ersten Art ist.

Dass die Fläche τ eine zusammenhängende ist, ergiebt sich sofort, wenn man für jeden Ringschnitt b den äusseren Theil des Blattes, auf dem er ausgeführt ist, unterscheidet vom innern, welcher von b bis zur zugehörigen Doppellinie Δ reicht. Der Zusammenhang zwischen allen

äussern Theilen ist durch die wesentlichen Doppellinien gesichert, an ihnen haften die innern Theile in den überzähligen Doppellinien.

Um die Art der hiernach zusammenhängenden Fläche τ zu ermitteln, löse man diese innern Theile ab durch je drei zu $b_1\Delta_1$, zu $b_2\Delta_2, \cdots$ und zu $b_p\Delta_p$ gehörige Querschnitte $Q_1 Q_2 Q_3$, was den Charakter der Fläche nicht ändert. Uebrig bleibt dann T_n^0 mit p ebenen Lücken, also eine Fläche I. Art, mithin ist auch τ eine Fläche I. Art.

Bei jedem Ringschnitte b unterscheiden wir seine beiden Ränder, indem wir den einen $\overset{-}{b}$, den andern $\overset{+}{b}$ nennen. In der zusammenhängenden Fläche τ führt ein Weg von $\overset{-}{b}_1$ nach dem gegenüberliegenden Punkte von $\overset{+}{b}_1$; schneidet man ihn durch, so hat man einen Querschnitt II. Art a_1; die neue Fläche ist 1) eine zusammenhängende und 2) von der frühern, also der ersten Art. Die Ränder von a_1, b_1 vereinigen sich zu einer einzigen Randcurve, welche $a_1 b_1$ heissen möge. In dieser neuen Fläche führt auch ein Weg von $\overset{-}{b}_2$ zum gegenüberliegenden Punkte von $\overset{+}{b}_2$: durchgeschnitten, liefert er einen Querschnitt II. Art a_2, seine Ränder vereinigen sich mit $\overset{-}{b}_2$ und $\overset{+}{b}_2$ zu einer einzigen Randcurve $a_2 b_2$, und die Fläche ist noch immer eine zusammenhängende von der I. Art. Diese Schlussweise setzt sich fort, und es folgt:

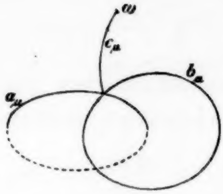
γ. *In der Fläche τ kann man, ohne ihren Zusammenhang zu zerstören, die Ränder jedes Ringschnittes b_μ durch einen Querschnitt II. Art a_μ verbinden. Dann erhält man für die ursprüngliche Fläche T p Schnittpaare $a_1 b_1$, $a_2 b_2, \cdots a_p b_p$, welche sie in eine zusammenhängende Fläche T_1 verwandeln, und diese ist von der I. Art. Auf sie beschränkt ist jedes Integral I. G. eindeutig.*

Aber diese Fläche hat p Randcurven $a_1 b_1$, $a_2 b_2, \cdots a_p b_p$, ist also keine einfach zusammenhängende.

δ. *Um diese Fläche T_1 in eine einfach zusammenhängende T' zu verwandeln, ist es ausreichend, von irgend einem Punkte ω aus durch T_1 nach jeder Randcurve einen Schnitt zu führen, c_1 nach $a_1 b_1$, c_2 nach $a_2 b_2, \cdots c_p$ nach $a_p b_p$, aber so, dass diese Schnitte $c_1 c_2 \cdots c_p$ ausser ω einander nicht mehr kreuzen.*

Denn unter dieser Voraussetzung bilden $c_1 c_2$ zusammen einen Querschnitt II. Art zwischen $a_1 b_1$ und $a_2 b_2$, mit diesen zusammen also eine einzige Randcurve; diese wird durch c_3 mit $a_3 b_3$ zu einem einzigen Rande vereinigt u. s. w., so dass T', weil nur Querschnitte II. Art zur Verwendung kamen, eine zusammenhängende Fläche I. Art, und weil sie nur noch eine Randcurve hat, eine einfach zusammenhängende Fläche ist.

Das Schnittsystem dieser Fläche ist sehr leicht zu übersehen. Führt man, wie üblich ist, jeden Schnitt c_μ nach einer Ecke des Schnittpaares $a_\mu b_\mu$, so bilden diese drei Schnitte ein Querschnittbündel $c_\mu a_\mu b_\mu$, und aus p



vom nämlichen Punkt ω ausgehenden Querschnittbündeln setzt sich das ganze Schnittsystem zusammen.

Lässt man es in der Reihenfolge entstehen, dass man in der Fläche T zuerst die p Schnitte $c_1\, c_2 \cdots c_p$ anlegt, so bilden diese zusammen einen *Punktschnitt*, und an seine Aeste $c_1\, c_2 \cdots c_p$ sind dann die *Querschnittpaare* $a_1 b_1,\, a_2 b_2, \cdots a_p b_p$ angehängt.

Die Anzahl

$$p = d - (n - 1)$$

dieser Querschnittpaare ist durch die Zahl der Blätter und der Doppellinien der Fläche T völlig bestimmt und heisst *das Genus der Fläche T selbst und der ihr zugeordneten Classe von algebraischen Functionen.*

Bemerkungen zum Weierstrass'schen Doppelreihensatz und zur Theorie der gleichmässig convergenten Reihen.

Von

F. v. Dalwigk in Marburg a. L.

§ 1.

In der z-Ebene sei ein endliches und einfach zusammenhängendes Gebiet $\mathfrak{G}$ gegeben und in $\mathfrak{G}$ (einschliesslich der Begrenzung) seien die monogenen Functionen

$$f_0(z),\ f_1(z), \cdots, f_\nu(z), \cdots$$

frei von Singularitäten und die Reihe

$$F = \sum f_\nu(z)^{*})$$

gleichmässig convergent (absolut oder nur bedingt). F ist dann eine stetige Function des Ortes in $\mathfrak{G}$.

Cauchy und Briot-Bouquet**) haben den Satz aufgestellt: Sind $\sum f_\nu(z)$ und $\sum f_\nu'(z)$ beide in $\mathfrak{G}$ gleichmässig convergent, so ist $\sum f_\nu(z)$ eine monogene Function und $\sum f_\nu'(z)$ ihr Differentialquotient.

In dieser Form ist der Satz noch in neuere Werke, z. B. in Jordan's Cours d'Analyse (2. Aufl., 1. Band, S. 314, § 331)***) und in Fricke's analytisch-functionentheoretische Vorlesungen (S. 124, 25) übergegangen.

Man kann jedoch leicht das Integral von F für einen in $\mathfrak{G}$ verlaufenden Weg von z_0 nach z_1 untersuchen, es ist gleich $\sum \int_{z_0}^{z_1} f_\nu(z)\,dz$, d. h. unabhängig von solchen Aenderungen des Weges, bei denen z_0 und z_1 fest bleiben. Und aus Betrachtung einer unendlich kleinen Verschiebung von

*) ν geht von 0 bis ∞.

**) Bei Cauchy ist noch nicht von gleichmässiger Convergenz die Rede.

***) Im Inhaltsverzeichniss steht der Satz in weit grösserer Allgemeinheit ausgesprochen, als er im Text bewiesen ist, und zwar gerade in der nachher zu besprechenden richtigen Form.

z_1 folgt sofort, dass das Integral in Bezug auf z_1 einen eindeutigen (von der Richtung unabhängigen) Differentialquotienten hat und dass dieser gleich dem Werth von F in z_1 ist. Darum ist das Integral eine monogene Function der oberen Grenze, und $F = \sum f_\nu(z)$ ist als der zugehörige Diffferentialquotient auch monogen. So hat die gleichmässige Convergenz von $\sum f_\nu(z)$ allein schon den monogenen Charakter der Reihe zur Folge.

§ 2.

Weiter kann man zeigen, dass $\sum f_\nu'(z)$ mindestens in einem Gebiet $\mathfrak{G}'$ gleichmässig convergirt, welches aus $\mathfrak{G}$ durch Wegnahme eines Randstreifens hervorgeht, und dass $\sum f_\nu'(z)$ in $\mathfrak{G}'$ den Differentialquotienten von $\sum f_\nu(z)$ darstellt*). Als ich vor Jahren in Göttingen diese Sätze vortrug, stellte ich fest, dass Herr Burkhardt schon Beweise dafür besass, die er später in § 50 seiner functionentheoretischen Vorlesungen Bd. I veröffentlichte. Darum gehe ich auch auf den letzten Satz nicht näher ein.

Bemerkt sei noch, dass gleichmässige Convergenz von $\sum |f_\nu(z)|$ in $\mathfrak{G}$ ebensolche Convergenz von $\sum \left| \int\limits_{z_0}^{z_1} f_\nu(z)\, dz \right|$ in $\mathfrak{G}$ und von $\sum |f_\nu'(z)|$ in $\mathfrak{G}'$ zur Folge hat.

§ 3.

Die Beschränkung auf ein Gebiet einfachen Zusammenhanges lässt sich leicht beseitigen. In einem mehrfach zusammenhängenden Gebiet hört im wesentlichen nur die Eindeutigkeit der Reihe der bestimmten Integrale auf. Bei einem Gebiet aus mehreren getrennten Theilen hat $\sum f_\nu(z)$ natürlich in jedem Theil den Charakter einer monogenen Function, ohne dass im Allgemeinen diese einzelnen Functionen durch analytische Fortsetzung zusammenhängen werden.

*) Dieses Ergebniss widerspricht durchaus nicht dem Satz, dass $\sum b^\nu \cdot \cos(a^\nu \cdot x)$ bei $b < 1$ und $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$ nirgends einen Differentialquotienten hat. Denn diese Reihe convergirt nur bei reellem x; sobald x eine complexe Grösse mit noch so geringem imaginären Theil ist, wachsen die Glieder mit ν ins Unendliche. — Interessant war mir immer die Anmerkung von Du Bois-Reymond [Journal f. Math. Bd. 79, S. 31], aus der hervorzugehen scheint, dass nach Weierstrass die Reihe schon bei $ab > 1$ keinen Differentialquotienten mehr hat. In den Weierstrass'schen Veröffentlichungen selbst („Abhandlungen aus der Functionenlehre“ und „ges. Werke“) ist dieser Punkt nicht berührt.

Die Uebertragung der Sätze auf mehrfache unendliche Reihen und auf einfach oder mehrfach unendliche Producte braucht nicht näher besprochen zu werden; manches in der Lehre von den Product-Entwicklungen ganzer transcendenter Functionen wird dadurch erheblich vereinfacht. Allgemeine Folgerungen über den Riemann'schen Functionsbegriff und eine Stelle in Riemann's Dissertation bespreche ich in § 5.

§ 4.

Jetzt werde zunächst ein bekannter Weierstrass'scher Satz als eine fast selbstverständliche Folge des Laurent'schen Satzes und der Sätze von § 1 erwiesen.

Für $0 < R_1 < |z| < R_2$ seien die Reihen

$$\text{(I)} \qquad P_\nu(z) = \sum_{-\infty, +\infty}^{\mu} a_\mu^{(\nu)} \cdot z^\mu \qquad , \quad (\nu = 0, 1, 2, \cdots)$$

convergent. Dann convergiren sie gleichmässig für $R_1 + \delta \leqq |z| \leqq R_2 - \delta$ (bei kleinem positiven δ), und in diesem Bereich sei auch

$$\text{(II)} \qquad \sum_{0, \infty}^{\nu} P_\nu(z) = \sum_{0, \infty}^{\nu} \left(\sum_{-\infty, +\infty}^{\mu} a_\mu^{(\nu)} \cdot z^\mu \right)$$

gleichmässig convergent (bedingt oder unbedingt).

Die Doppelreihe ist in diesem Kreisring eine monogene Function $F(z)$ und lässt sich nach dem Laurent'schen Satz in eine Reihe

$$\text{(III)} \qquad \sum_{-\infty, +\infty}^{\varkappa} A_\varkappa \cdot z^\varkappa$$

entwickeln, die mindestens für $R_1 + \delta < |z| < R_2 - \delta$ convergirt, also für $R_1 + \delta' \leqq |z| \leqq R_2 - \delta'$ (wo $\delta' > \delta$ ist und im Grunde auch nur die Bedingung erfüllt, wesentlich positiv zu sein). Dabei ist

$$A_\varkappa = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(\zeta)}{\zeta^{\varkappa+1}}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int \left(\sum_{0, \infty}^{\nu} \sum_{-\infty, +\infty}^{\mu} a_\mu^{(\nu)} \cdot \zeta^\mu \right) \frac{d\zeta}{\zeta^{\varkappa+1}}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int \left(\sum_{0, \infty}^{\nu} \sum_{-\infty, +\infty}^{\mu} a_\mu^{(\nu)} \cdot \zeta^{\mu - \varkappa - 1} \right) d\zeta$$

und man kann durch zweimalige Anwendung des Satzes von § 1 die Integration gliedweise ausführen. Dabei erhält man aus der bekannten Formel

$$\frac{1}{2\pi i} \int \zeta^{\mu - \varkappa - 1}\, d\zeta = \begin{cases} +1 \cdots \mu = \varkappa \\ \;\; 0 \cdots \mu \gtrless \varkappa \end{cases}$$

den Ausdruck

$$\text{(IV)} \qquad A_\varkappa = \sum_{0,\infty}^{\nu} a_\varkappa^{(\nu)}$$

und hiermit ist für jedes z im Innern*) des ursprünglich gegebenen Kreisringes der Satz erhalten:

$$\text{(V)} \qquad \sum_{0,\infty}^{\nu}\left(\sum_{-\infty,+\infty}^{\mu} a_\mu^{(\nu)}\cdot z^\mu\right) = \sum_{-\infty,+\infty}^{\mu}\left(\sum_{0,\infty}^{\nu} a_\mu^{(\nu)}\right)\cdot z^\mu$$

(wobei wieder μ statt $\varkappa$ geschrieben ist.)

Das ist aber der „Weierstrass'sche Doppelreihensatz", welcher zuerst in den Berliner Monatsberichten vom August 1880, dann in den „Abhandlungen aus der Functionenlehre" (1886)**) veröffentlicht wurde und seitdem in viele Bücher übergegangen ist.

Uebrigens hat Weierstrass den Satz veröffentlicht als Grundlage für den Nachweis, dass eine gleichmässig convergente Summe analytischer Functionen selbst eine analytische Function ist, womit er also gerade den hier in § 1 stehenden Satz erhielt***).

§ 5.

Die Sätze von §§ 1—3 (und darum auch die Folgerung, welche Weierstrass aus seinem Doppelreihensatz zog) haben eine interessante Beziehung zu Riemann's Dissertation. Dort spricht Riemann am Schluss von art. 1 aus, dass eine durch Verbindung der einfachen Grössenoperationen bestimmte Function w von z stets einen von der Richtung unabhängigen Differentialquotienten $\frac{dw}{dz}$ hat, und er legt dann „dieses Merkmal aller irgendwie durch Grössenoperationen bestimmbaren Functionen" seinen folgenden Untersuchungen als Definition zu Grunde „ohne jetzt dessen

---

*) Auch wenn die Reihen (I) und (II) für $R_1 \leqq |z| \leqq R_2$ gleichmässig convergent wären, würde die Formel (V) doch im Allgemeinen nur für $R_1 < |z| < R_2$ gelten wegen der beim Laurent'schen Satz nöthigen Voraussetzungen.

**) S. 73—76 und Werke II, S. 205—08. Die dort nicht angeführte Arbeit auf S. 67—74 des I. Bandes zeigt, dass Weierstrass den Satz schon im Jahre 1841 fand.

***) Noch früher findet man diesen Satz in der Litteratur insofern, als Herr H. A. Schwarz 1870 den gleichwerthigen Satz für eine absolut und gleichmässig convergente Reihe logarithmischer Potentiale aussprach. [Berliner Monatsberichte vom Okt. 1870, S. 783—784; gesammelte Abhandlungen II, S. 160, obere Hälfte; in der ursprünglichen Züricher Mittheilung — ges. Abhandlungen II, S. 139 oben — findet sich dieser Beweis noch nicht.]

Allgemeingültigkeit und Zulänglichkeit · · · zu beweisen". Im art. 20 spricht Riemann weiter hierüber und erklärt in einer Anmerkung (am Schluss) den Begriff der Grössenoperation genauer. Nimmt man zu dem von ihm gesagten hinzu, dass die convergenten unendlichen Processe (Summationen und Productbildungen), um welche es sich dort neben den Elementaroperationen im wesentlichen handelt, gleichmässig convergent sein sollen und dass man sich auf ein zusammenhängendes Gebiet beschränken muss, dann ist die Riemann'sche Behauptung in der That richtig.

Marburg a. L., im Juni 1900.

The hyperorthogonal groups.

By

Leonard Eugene Dickson of Chicago.

Introduction.

In volume 52 of the *Annalen**), the writer investigated the linear homogeneous groups definied by an invariant

$$\lambda_1 \xi_1^r + \lambda_2 \xi_2^r + \cdots + \lambda_m \xi_m^r$$

and showed that, for $r > 2$, the structures of such groups in any Galois Field depend upon the structure of the group in the Galois Field of order p^{2s} defined by the invariant $\xi_1^{p^s+1} + \cdots + \xi_m^{p^s+1}$. Using the results there obtained for the order, generators and structure of the latter group, the present paper investigates the character of its substitutions and their distribution into sets of conjugates within the group.

In §§ 2—5, the group is shown to possess successive generality, a property of certain linear groups defined in § 2.

In §§ 6—13, the group is represented as a transitive substitution group; likewise for the simple quotient-group.

In §§ 14—23, the fundamental properties of the characteristic equation of a hyperorthogonal substitution are proved. If x be a root of such an equation, then is also x^{-p^s} a root. Every equation having this property is the characteristic equation of some hyperorthogonal substitution. Such an equation is never irreducible in the field if it is not a cubic; it decomposes into linear factors and a single non-linear irreducible factor only when the latter is a cubic.

The rest of the paper is devoted to the reduction of hyperorthogonal substitutions to canonical forms belonging to the group and a study of their distribution into complete sets of conjugate substitutions. The

*) *Math. Ann.*, 52, pp. 561—581. It will be referred to by page or section.

results are exhaustive for the case $m = 3$, a table being given in § 37. For $p^s = 3$, a more explicit table of the substitutions is given in § 38.

Definition of the hyperorthogonal group.

1. The hyperorthogonal group $H_{m,p,s}$ is composed of all substitutions

$$S:\ \xi_i' = \alpha_{i1}\xi_1 + \alpha_{i2}\xi_2 + \cdots + \alpha_{im}\xi_m \qquad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

with coefficients in the $GF[p^{2s}]$ of determinant unity such that S leaves formally invariant the function

$$\psi \equiv \xi_1^{p^s+1} + \xi_2^{p^s+1} + \cdots + \xi_m^{p^s+1}.$$

The conditions for the invariance of ψ are the following:

$$(1)\qquad \alpha_{1j}^{p^s+1} + \alpha_{2j}^{p^s+1} + \cdots + \alpha_{mj}^{p^s+1} = 1 \qquad (j = 1, 2, \cdots, m),$$

$$(2)\qquad \alpha_{1j}^{p^s}\alpha_{1k} + \alpha_{2j}^{p^s}\alpha_{2k} + \cdots + \alpha_{mj}^{p^s}\alpha_{mk} = 0 \qquad (j, k = 1, \cdots, m;\ j \neq k).$$

If the coefficients α_{ij} belong to the $GF[p^s]$, the conditions (1) and (2) reduce to the known orthogonal relations. Hence the group $H_{m,p,s}$ contains as a subgroup the group of all orthogonal substitutions of determinant unity, so that the larger group may be called the *hyperorthogonal group*.

In view of (1) and (2), the inverse of S is (*Annalen*, § 1)

$$S^{-1}:\ \xi_i' = \alpha_{1i}^{p^s}\xi_1 + \alpha_{2i}^{p^s}\xi_2 + \cdots + \alpha_{mi}^{p^s}\xi_m \qquad (i = 1, 2, \cdots, m).$$

Since the inverse of a hyperorthogonal substitution of determinant unity is obtained by replacing α_{ij} by $\alpha_{ji}^{p^s}$, *the adjoint (first minor with proper sign prefixed) of* α_{ij} *in the determinant* $|\alpha_{ij}|$ *equals* $\alpha_{ij}^{p^s}$. Making the above replacement in (1) and (2), we obtain the conditions that S^{-1} shall leave ψ invariant:

$$(3)\qquad \alpha_{j1}^{p^s+1} + \alpha_{j2}^{p^s+1} + \cdots + \alpha_{jm}^{p^s+1} = 1 \qquad (j = 1, 2, \cdots, m),$$

$$(4)\qquad \alpha_{j1}\alpha_{k1}^{p^s} + \alpha_{j2}\alpha_{k2}^{p^s} + \cdots + \alpha_{jm}\alpha_{km}^{p^s} = 0 \qquad (j, k = 1, \cdots, m;\ j \neq k).$$

The order of the group $H_{m,p,s}$ is (*Annalen*, p. 570, p. 573)

$$O_{m,p,s} \equiv [p^{sm} - (-1)^m]\,p^{s(m-1)}\,[p^{s(m-1)} - (-1)^{m-1}]\,p^{s(m-2)} \cdots [p^{2s} - 1]\,p^s.$$

Except for $p^s = 2$, $m \geqq 3$, $H_{m,p,s}$ is generated by the substitutions*)

$$O_{i,j}^{\lambda,\mu}:\ \begin{cases} \xi_i' = \lambda\xi_i + \mu\xi_j \\ \xi_j' = -\mu^{p^s}\xi_i + \lambda^{p^s}\xi_j \end{cases} \qquad \left(\lambda^{p^s+1} + \mu^{p^s+1} = 1\right).$$

---

*) *Annalen*, top of p. 579, where $m = 3$ should read $m \geqq 3$.

Successive generality of the hyperorthogonal group.

2. For any set of solutions in the $GF[p^{2s}]$ of

$$\alpha_{11}^{p^s+1} + \alpha_{12}^{p^s+1} + \cdots + \alpha_{1m}^{p^s+1} = 1 \tag{5}$$

there exists a substitution of $H_{m,p,s}$ which replaces ξ_1 by $\alpha_{11}\xi_1 + \cdots + \alpha_{1m}\xi_m$ (*Annalen*, p. 571). A new proof of this theorem is given in § 5. If we consider the conditions, viz., (3) for $j = 1$ and 2, (4) for $j = 1$, $k = 2$, upon the coefficients of the first and second rows of the matrix of a hyperabelian substitution, it is shown (§ 4) that for an arbitrary set of solutions of these conditions there exists a substitution in $H_{m,p,s}$ having these solutions as the first and second rows of its matrix. In general, for arbitrary marks of the $GF[p^{2s}]$ satisfying the hyperabelian conditions (3) and (4) for $j, k \overline{\overline{<}}\, r$, where r is a positive integer $\overline{\overline{<}}\, m$, there exists in $H_{m,p,s}$ a substitution having these marks as the first r rows of its matrix*). The linear group is thus said to possess successive generality. This property is possessed by the abelian, the first and second hyperabelian, and the two orthogonal groups**).

Another statement of the property is as follows: it is impossible to derive by elimination between the conditions (3) and (4) a relation involving only $\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \cdots, \alpha_{jm}$ $(j = 1, \cdots, r)$ which is independent of the explicit relations (3) and (4) for $j, k = 1, \cdots, r$.

Using this explicit definition, certain linear groups***), in whose defining relations the coefficients enter to a degree > 2, are seen not to possess successive generality.

3. Theorem. — *For any set of solutions in the* $GF[p^{2s}]$ *of*

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_{1i}^{p^s+1} = 1, \quad \sum_{i=1}^{m} \beta_i^{p^s+1} = 1, \quad \sum_{i=1}^{m} \beta_i \alpha_{1i}^{p^s} = 0 \tag{6}$$

there exists in the group $H_{m,p,s}$ *a substitution* S *which replaces* ξ_1 *by* $\sum_{i=1}^{m} \alpha_{1i}\xi_i$ *and* ξ_2 *by* $\sum_{i=1}^{m} \beta_i \xi_i$.

By § 2, $H_{m,p,s}$ contains a substitution of the form

$$A:\ \xi_j' = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ji}\xi_i \qquad (j = 1, 2, \cdots, m),$$

*) For $r = m$, the theorem follows from the definition of the group.

**) *American Journal of Math.*, Vol. XXIII, pp. 337—377.

***) Dickson, *Quarterly Journal*, July, 1899; *Proc. Lond. Math. Soc.*, Vol. XXX, p. 200.

and therefore its inverse (see § 1):

$$A^{-1}:\quad \xi_j' = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij}^{p^s}\,\xi_i \qquad (j=1,2,\cdots,m).$$

By the hypotheses (6), not every α_{1i} is zero and not every β_i is zero; moreover, the ratios α_{11}/β_1, $\alpha_{12}/\beta_2, \cdots$, α_{1m}/β_m are not all equal. Hence there exists a linear substitution S_1 with coefficients in the $GF[p^{2s}]$ and of determinant not zero which replaces ξ_1 and ξ_2 by the same functions that S does. The product $A^{-1}S_1 \equiv R$ is seen to replace ξ_1 by ξ_1, and ξ_2 by a linear function $\sum_{i=1}^{m} R_k \xi_k$, where

$$R_k \equiv \sum_{i=1}^{m} \beta_i \alpha_{ki}^{p^s} \qquad (k=1,2,\cdots,m). \tag{7}$$

By (6), $R_1 = 0$ and, since A belongs to the group $H_{m,p,s}$,

$$\sum_{k=1}^{m} R_k^{p^s+1} = \sum_{i=1}^{m}\left\{\beta_i^{p^s+1}\sum_{k=1}^{m}\alpha_{ki}^{p^s+1}\right\} + \sum_{i\neq j}^{i,j=1,\cdots,m}\left\{\beta_i\beta_j^{p^s}\sum_{k=1}^{m}\alpha_{ki}^{p^s}\alpha_{kj}\right\} \tag{8}$$
$$= \sum_{i=1}^{m}\beta_i^{p^s+1} = 1.$$

In order that $S_1 \equiv AR$ shall be the required substitution S belonging to $H_{m,p,s}$, it suffices that R be any substitution of $H_{m,p,s}$ having the form

$$\xi_1' = \xi_1,\quad \xi_2' = \sum_{k=2}^{m} R_k\xi_k,\quad \xi_i' = \sum_{k=2}^{m} \varrho_{ik}\xi_k \qquad (i=3,4,\cdots,m), \tag{9}$$

where the R_k are defined by (7). But in view of the relation (8), a set of marks ϱ_{ik} may indeed be found (by § 2, applied to $m-1$ indices) such that (9) does belong to the group $H_{m,p,s}$. Hence if R be such a substitution (9), the product AR is the required S.

This theorem admits of the generalization given in the next section.

4. Theorem. — *For any set of solutions in the $GF[p^{2s}]$ of*

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ji}^{p^s+1} = 1,\quad \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ki}\alpha_{ji}^{p^s} = 0 \qquad (j,k=1,\cdots,\mu;\ j\neq k), \tag{10}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \beta_i^{p^s+1} = 1,\quad \sum_{i=1}^{m} \beta_i\alpha_{ji}^{p^s} = 0 \qquad (j=1,\cdots,\mu), \tag{11}$$

where μ *is any positive integer* $< m$, *there exists in the group* $H_{m,p,s}$ *a substitution* S *which replaces* ξ_j *and* $\xi_{\mu+1}$ *by respectively*

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ji}\xi_i, \qquad \sum_{i=1}^{m} \beta_i \xi_i$$

for j *any one of the integers* $1, 2, \cdots, \mu$.

The proof proceeds by induction. Assuming the theorem true when the coefficients α_{ji} of the first μ rows of the matrix are given marks satisfying relations (10), it will be proven to hold when the coefficients α_{ji}, β_i of the first $\mu + 1$ rows are given marks satisfying relations (10) and (11). By § 3, the theorem is true for $\mu = 1$. The induction will therefore be complete*).

By our hypothesis, there exists in $H_{m,p,s}$ a substitution

$$A: \quad \xi_j' = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ji}\xi_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, m).$$

As in § 3, we define the marks

$$R_k \equiv \sum_{i=1}^{m} \beta_i \alpha_{ki}^{p^s} \qquad (k = 1, 2, \cdots, m).$$

In view of (10), we have $R_1 = R_2 = \cdots = R_\mu = 0$. By (8)

$$R_{\mu+1}^{p^s+1} + R_{\mu+2}^{p^s+1} + \cdots + R_m^{p^s+1} = 1.$$

Hence, by § 2, there exists in $H_{m,p,s}$ a substitution of the form

$$R: \begin{cases} \xi_j' = \xi_j \quad (j = 1, 2, \cdots, \mu), \\ \xi_{\mu+1}' = \sum\limits_{j=\mu+1}^{m} R_j \xi_j, \qquad \xi_{\mu+i}' = \sum\limits_{j=\mu+1}^{m} \varrho_{\mu+i\,j}\, \xi_j, \end{cases}$$

for $i = 2, \cdots, m$. It affects only the indices $\xi_{\mu+1}, \xi_{\mu+2}, \cdots, \xi_m$. The product AR may be taken as the required substitution S, since it replaces ξ_j by $\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_{ji}\xi_i$, for $i = 1, \cdots, \mu$, and replaces $\xi_{\mu+1}$ by

$$\sum_{k,i}^{1\cdots m} R_k \alpha_{ki}\xi_i = \sum_{i=1}^{m} a_i \xi_i,$$

*) The induction might proceed from the case $\mu = 0$, when the theorem is true by § 2. But the notations become artificial for $\mu = 0$; moreover, the treatement of the case $\mu = 1$ makes the present proof more intelligible.

where

$$a_i \equiv \sum_{k=1}^{m} R_k \alpha_{ki} = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \left(\sum_{k=1}^{m} \alpha_{ki} \alpha_{kj}^{p^s} \right) = \beta_i .$$

Corollary. The (ordinary) orthogonal group possesses successive generality [see § 1].

5. The preceding results, including that quoted at the beginning of § 2, may be established otherwise. We first prove that, if $\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \cdots, \alpha_{jm}$ $(j = 1, \cdots, m-1)$ be given marks satisfying (3) and (4) for $j, k \overline{\gtrless} m-1$, marks $\alpha_{m1}, \alpha_{m2}, \cdots, \alpha_{mm}$ may be determined so that (3) and (4) are satisfied also for $j = m,\ k = 1, 2, \cdots, m-1$, viz.,

$$\alpha_{m1} \alpha_{k1}^{p^s} + \alpha_{m2} \alpha_{k2}^{p^s} + \cdots + \alpha_{mm} \alpha_{km}^{p^s} = 0 \qquad (k = 1, 2, \cdots, m-1), \tag{12}$$

$$\alpha_{m1}^{p^s+1} + \alpha_{m2}^{p^s+1} + \cdots + \alpha_{mm}^{p^s+1} = 1. \tag{13}$$

Relations (12) are linearly independent*) and determine the ratios of the α_{mi}:

$$\alpha_{m1} = \varrho (-1)^{m-1} A_{m1}, \cdots, \alpha_{mi} = \varrho (-1)^{m-i} A_{mi}, \cdots, \alpha_{mm} = \varrho A_{mm},$$

where A_{mi} denotes the first minor of $\alpha_{mi}^{p^s}$ in $D \equiv \left| \alpha_{ji}^{p^s} \right|$ $(j, i = 1, \cdots, m)$. Substituting these values in (13) we find that $\varrho D = 1$. Substituting for α_{mi} and $\alpha_{mi}^{p^s}$ their values, (13) gives the condition

$$\varrho^{p^s+1} \left\{ A_{m1}^{p^s+1} + A_{m2}^{p^s+1} + \cdots + A_{mm}^{p^s+1} \right\} = 1, \tag{14}$$

which determines ϱ^{p^s+1} and therefore ϱ in terms of the given marks $\alpha_{j1}, \cdots, \alpha_{jm}$ $(j = 1, \cdots, m-1)$. In order that the substitution (α_{ji}) shall have determinant unity, it is necessary and sufficient that $D = |\alpha_{ji}|^{p^s}$ shall be unity. Hence ϱ must be unity (in accord with the theorem of § 1). The condition (14) may be written

$$\begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{m-12} & \alpha_{m-13} & \cdots & \alpha_{m-1m} \end{vmatrix}^{p^s+1} + \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{m-11} & \alpha_{m-12} & \cdots & \alpha_{m-1m} \end{vmatrix}^{p^s+1} + \cdots$$

$$+ \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1m-1} \\ \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{2m-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{m-11} & \cdots & \alpha_{m-1m-1} \end{vmatrix}^{p^s+1} = 1.$$

*) For example, let $m = 3$. If $\alpha_{1i} = \tau \alpha_{2i}$ $(i = 1, 2, 3)$ relations (12) and (13) require $\tau = 0$, in contradiction to the given relation (5).

This relation is a consequence of the given relations (3), (4), $j, k \overline{\gtrless} m-1$. For example, if $m=3$, the left member equals (modulo p)

$$\left(\alpha_{11}^{p^s+1}+\alpha_{12}^{p^s+1}+\alpha_{13}^{p^s+1}\right)\left(\alpha_{21}^{p^s+1}+\alpha_{22}^{p^s+1}+\alpha_{23}^{p^s+1}\right) \\ -\left(\alpha_{11}\alpha_{21}^{p^s}+\alpha_{12}\alpha_{22}^{p^s}+\alpha_{13}\alpha_{23}^{p^s}\right)^{p^s+1}.$$

To prove the general theorem (§ 2), we should proceed from the case $r=m-1$ just established to the case $r=m-2$, etc. The method will be illustrated by the case $m=3$. We are to prove that, if $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}$ be any marks satisfying

$$(5') \qquad \alpha_{11}^{p^s+1}+\alpha_{12}^{p^s+1}+\alpha_{13}^{p^s+1}=1,$$

there exists a substitution in H_{3,p^s}, having $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}$ in the first row of its matrix. By the theorem just proved, it suffices to show that marks $\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23}$ may be found such that

$$(15) \qquad \alpha_{21}^{p^s+1}+\alpha_{22}^{p^s+1}+\alpha_{23}^{p^s+1}=1, \qquad \alpha_{11}\alpha_{21}^{p^s}+\alpha_{12}\alpha_{22}^{p^s}+\alpha_{13}\alpha_{23}^{p^s}=0.$$

From the symmetry of the equations we may suppose that $\alpha_{11} \neq 0$. The second condition (15) determines $\alpha_{21}^{p^s}$ and therefore α_{21}. The first condition (15) is then equivalent to the condition

$$\left(\alpha_{11}^{p^s+1}+\alpha_{12}^{p^s+1}\right)\alpha_{22}^{p^s+1}+\left(\alpha_{11}^{p^s+1}+\alpha_{13}^{p^s+1}\right)\alpha_{23}^{p^s+1}+\alpha_{12}\alpha_{13}^{p^s}\alpha_{22}^{p^s}\alpha_{23} \\ +\alpha_{12}^{p^s}\alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{23}^{p^s}=\alpha_{11}^{p^s+1}.$$

If $\alpha_{11}^{p^s+1}+\alpha_{12}^{p^s+1} \neq 0$, we may take $\alpha_{23}=0$ and determine a solution α_{22} in the $GF[p^{2s}]$. If $\alpha_{11}^{p^s+1}+\alpha_{13}^{p^s+1} \neq 0$, we may take $\alpha_{22}=0$ and determine α_{23} in the field. If both sums vanish, then $\alpha_{13} \neq 0$, $\alpha_{12} \neq 0$, and the condition may be written

$$w^{p^s}+w=\alpha_{11}^{p^s+1}, \qquad w \equiv \alpha_{12}^{p^s}\alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{23}^{p^s}.$$

Raising both members to the power p^s, we find that $w^{p^{2s}}=w$, so that all the roots of the equation belong to the $GF[p^{2s}]$. Taking any root w and any mark $\alpha_{22} \neq 0$, α_{23} is determined in the field.

Representation of the hyperorthogonal group as a transitive substitution group.

6. The general linear homogeneous group on m variables ξ_i with coefficients in the $GF[p^s]$ is known to be capable of representation as a transitive substitution group on $p^{ms}-1$ letters. The simple group defined as a quotient-group of the general linear group may be represented as a doubly transitive substitution group. In these representations the hyperorthogonal group and the corresponding simple quotient-group

appear as intransitive substitution-groups, owing to the invariance of the function ψ of $\xi_1, \cdots, \xi_m$. In §§ 7—12, a method is developed by which the groups in question are represented as transitive substitution group on a comparatively small number of letters. The method is general and has been applied by the writer to various linear group (*American Journal*, Vol. XXIII, pp. 337—377).

7. The general substitution of the group $H_{m,p,s}$

$$A:\quad \xi_i' = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}\xi_j \qquad (i=1,2,\cdots,m)$$

replaces $\lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2 + \cdots + \lambda_m\xi_m$ by $\mu_1\xi_1 + \mu_2\xi_2 + \cdots + \mu_m\xi_m$ where

$$\mu_i \equiv \lambda_1\alpha_{1i} + \lambda_2\alpha_{2i} + \cdots + \lambda_m\alpha_{mi} \qquad (i=1,2,\cdots,m).$$

The matrix of coefficients (α_{ji}) is therefore the transposed of the matrix (α_{ij}) of A. The former defines a substitution of $H_{m,p,s}$ since the conditions (§ 1) are symmetrical with respect to the rows and columns. It follows that

$$\mu_1^{p^s+1} + \mu_2^{p^s+1} + \cdots + \mu_m^{p^s+1} = \lambda_1^{p^s+1} + \lambda_2^{p^s+1} + \cdots + \lambda_m^{p^s+1}.$$

The substitutions of $H_{m,p,s}$ *permute amongst themselves the linear functions* $\lambda_1\xi_1 + \cdots + \lambda_m\xi_m$ *in which* $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ *are marks of the* $GF[p^{2s}]$ *which satisfy the relation*

$$\lambda_1^{p^s+1} + \lambda_2^{p^s+1} + \cdots + \lambda_m^{p^s+1} = c = \textit{constant}. \tag{16}$$

8. The left member of (16) is unchanged upon being raised to the power p^s. Hence we may set $c = \sigma^{p^s+1}$, σ being a mark of the $GF[p^{2s}]$. Supposing that $c \neq 0$, we have

$$\left(\frac{\lambda_1}{\sigma}\right)^{p^s+1} + \left(\frac{\lambda_2}{\sigma}\right)^{p^s+1} + \cdots + \left(\frac{\lambda_m}{\sigma}\right)^{p^s+1} = 1.$$

Hence, by § 2, there exists a substitution of $H_{m,p,s}$ which replaces ξ_1 by $\sigma^{-1}(\lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2 + \cdots + \lambda_m\xi_m)$. *The group* $H_{m,p,s}$ *permutes transitively the functions* $\lambda_1\xi_1 + \cdots + \lambda_m\xi_m$ *defined by* (16), $c \neq 0$.

For $c = 0$, we consider the function $D\xi_1 + E\xi_2$ in which

$$D^{p^s+1} + E^{p^s+1} = 0, \quad D \neq 0, \quad E \neq 0. \tag{17}$$

The conditions that A shall replace $D\xi_1 + E\xi_2$ by a function $\lambda_1\xi_1 + \cdots + \lambda_m\xi_m$, where $\lambda_1, \cdots, \xi_m$ (not all of which vanish) satisfy (16) for $c = 0$, are

$$D\alpha_{1j} + E\alpha_{2j} = \lambda_j \qquad (j=1,2,\cdots,m). \tag{18}$$

Hence the first two rows of the matrix of A are

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \cdots \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \cdots \alpha_{2m} \end{pmatrix}, \qquad \alpha_{2j} \equiv E^{-1}\lambda_j - E^{-1}D\alpha_{1j}.$$

In order that $H_{m,p,s}$ shall contain such a substitution A, it is necessary and sufficient (§ 3) that α_{1j}, α_{2j} satisfy

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_{1j}^{p^s+1} = 1, \quad \sum_{j=1}^{m} \alpha_{2j}^{p^s+1} = 1, \quad \sum_{j=1}^{m} \alpha_{1j}^{p^s} \alpha_{2j} = 0.$$

Substituting the values of α_{2j} in the third condition, we get

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_{1j}^{p^s} \lambda_j = D \sum_{j=1}^{m} \alpha_{1j}^{p^s+1} = D.$$

Likewise, the second condition reduces to the form

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j^{p^s+1} + D^{p^s+1} \sum_{j=1}^{m} \alpha_{1j}^{p^s+1} - D \sum_{j=1}^{m} \alpha_{1j} \lambda_j^{p^s} - D^{p^s} \sum_{j=1}^{m} \alpha_{1j}^{p^s} \lambda_j = E^{p^s+1}.$$

Applying the previous condition and the same raised to the power p^s, the second condition reduces to (17), viz.,

$$D^{p^s+1} - D^{p^s+1} - D^{p^s+1} = E^{p^s+1}.$$

Hence the three conditions reduce to the two:

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_{1j}^{p^s+1} = 1, \quad \sum_{j=1}^{m} \alpha_{1j}^{p^s} \lambda_j = D. \tag{19}$$

Since $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ enter symmetrically in (16) and (19), we may suppose that $\lambda_1 \neq 0$ and then, in view of (16), that $\lambda_2 \neq 0$.

If $m = 3$, we take $\alpha_{12}^{p^s} \lambda_2 + \alpha_{13}^{p^s} \lambda_3 = 0$, thus determining α_{12}, when the conditions become $\alpha_{11}^{p^s} \lambda_1 = D$ and

$$\left(\frac{D}{\lambda_1}\right)^{p^s+1} + \alpha_{13}^{p^s+1}\left[1 + \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_2}\right)^{p^s+1}\right] = 1.$$

Since $\lambda_1 \neq 0$, (16) gives $\lambda_2^{p^s+1} + \lambda_3^{p^s+1} \neq 0$. The last condition determines $\alpha_{13}^{p^s+1}$ as a mark of the $GF[p^s]$, so that values of α_{13} exist in the $GF[p^{2s}]$.

If $m = 2$, we eliminate α_{11} between the conditions (19) and get

$$-\left(\lambda_1^{p^s+1} + \lambda_2^{p^s+1}\right) \alpha_{12}^{p^s+1} + D\alpha_{12} \lambda_2^{p^s} + D^{p^s} \alpha_{12}^{p^s} \lambda_2 = D^{p^s+1} - \lambda_1^{p^s+1}.$$

Since the first term vanishes by (16), the equation takes the form (20) below and hence has solutions α_{12} in the $GF[p^{2s}]$. Then the second condition (19) determines α_{11} in that field.

For general m, we may fix the notation so that the λ_i different from zero are $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$, $2 < r \overline{\gtrless} m$. We take $\alpha_{1r+1} = \cdots = \alpha_{1m} = 0$.

The determination of $\alpha_{11}, \cdots, \alpha_{1r}$ has been shown possible for $r = 2$ and $r = 3$. For r odd, we take

$$\alpha_{12}^{p^s}\lambda_2 + \alpha_{13}^{p^s}\lambda_3 = \alpha_{14}^{p^s}\lambda_4 + \alpha_{15}^{p^s}\lambda_5 = \cdots = \alpha_{1r-1}^{p^s}\lambda_{r-1} + \alpha_{1r}^{p^s}\lambda_r = 0.$$

The conditions (19) then become $\alpha_{11}^{p^s}\lambda_1 = D$ and

$$\alpha_{13}^{p^s+1}\left[1+\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_2}\right)^{p^s+1}\right] + \alpha_{15}^{p^s+1}\left[1+\left(\frac{\lambda_5}{\lambda_4}\right)^{p^s+1}\right] + \cdots + \alpha_{1r}^{p^s+1}\left[1+\left(\frac{\lambda_r}{\lambda_{r-1}}\right)^{p^s+1}\right]$$
$$= 1 - \left(\frac{D}{\lambda_1}\right)^{p^s+1}.$$

The sums in brackets are not all zero by (16), so that one of the terms $\alpha_{1j}^{p^s+1}$ is determined in the $GF[p^s]$ and hence α_{1j} in the $GF[p^{2s}]$.

For r even, $r \geq 4$, we take

$$\alpha_{12}^{p^s}\lambda_2 + \alpha_{13}^{p^s}\lambda_3 = \alpha_{14}^{p^s}\lambda_4 + \alpha_{15}^{p^s}\lambda_5 = \cdots = \alpha_{1r-2}^{p^s}\lambda_{r-2} + \alpha_{1r-1}^{p^s}\lambda_{r-1} = 0,$$

when the conditions become

$$\alpha_{11}^{p^s}\lambda_1 = D - \alpha_{1r}^{p^s}\lambda_r,$$

$$\left[1+\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_2}\right)^{p^s+1}\right]\alpha_{13}^{p^s+1} + \left[1+\left(\frac{\lambda_5}{\lambda_4}\right)^{p^s+1}\right]\alpha_{15}^{p^s+1} + \cdots + \left[1+\left(\frac{\lambda_{r-1}}{\lambda_{r-2}}\right)^{p^s+1}\right]\alpha_{1r-1}^{p^s+1}$$
$$+\left[1+\left(\frac{\lambda_r}{\lambda_1}\right)^{p^s+1}\right]\alpha_{1r}^{p^s+1} - \lambda_1^{-p^s-1}\left(D^{p^s}\alpha_{1r}^{p^s}\lambda_r + D\,\alpha_{1r}\lambda_r^{p^s}\right) = 1 - \left(\frac{D}{\lambda_1}\right)^{p^s+1}.$$

If the coefficient of $\alpha_{1j}^{p^s+1}$ is not zero, for any $j = 3, 5, \cdots,$ or $r-1$, then $\alpha_{1j}^{p^s+1}$ is determined in the $GF[p^s]$, so that α_{1j} belongs to the $GF[p^{2s}]$. If all these coefficients vanish, then by (16) will the coefficient of $\alpha_{1r}^{p^s+1}$ vanish, when the equation become

$$(20) \qquad x^{p^s} + x = D^{p^s+1} - \lambda_1^{p^s+1}, \qquad x \equiv D\alpha_{1r}\lambda_r^{p^s}.$$

Raising it to the power p^s, we find that $x^{p^{2s}} = x$, so that all its roots belong to the $GF[p^{2s}]$ and consequently α_{1r} does.

The group $H_{m,p,s}$ permutes transitively the functions $\lambda_1\xi_1 + \cdots + \lambda_m\xi_m$ defined by (16) for any given mark c of the $GF[p^s]$.

9. The number of sets of solutions in the $GF[p^{2s}]$ of equation (16) for $c = 1$ is (*Annalen*, p. 570)

$$P_{m,p,s} = p^{s(2m-1)} - (-1)^m p^{s(m-1)}.$$

Upon multiplying all these sets of solutions by a fixed mark σ such that $\sigma^{p^s+1} = c$, we obtain all the distinct sets of solutions of (16) for given c. Hence the various marks $c \neq 0$ of the $GF[p^s]$ lead to the same number $P_{m,p,s}$ of sets of solutions. Denote by $N_{m,p,s}$ the number of sets of solutions of (16) for $c = 0$. Then

$$N_{m,p,s} + (p^s - 1)\, P_{m,p,s} = p^{2ms};$$
$$N_{m,p,s} = p^{s(2m-1)} + (-1)^m p^{sm} - (-1)^m p^{s(m-1)}.$$

10. If $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ satisfy (16) for $c \neq 0$, then will also $\tau\lambda_1, \tau\lambda_2, \cdots, \tau\lambda_m$, where τ is any mark such that $\tau^{p^s+1} = 1$. The corresponding $p^s + 1$ linear functions may be combined into a symbol

$$\{\lambda_1 \xi_1 + \cdots + \lambda_m \xi_m\} \equiv \{\tau\lambda_1 \xi_1 + \cdots + \tau\lambda_m \xi_m\} \qquad (\tau^{p^s+1} = 1).$$

These symbols are permuted amongst themselves transitively (§ 8) by the substitutions of $H_{m,p,s}$. They are unaltered by the substitutions

$$(21) \qquad \xi_i' = \varrho \xi_i \qquad (i = 1, \cdots, m) \qquad [\varrho^{p^s+1} = 1,\ \varrho^m = 1]$$

and by no other substitutions of $H_{m,p,s}$, except when $p^s = 2$, $m = 2$ In fact, among the symbols occur

$$\{\sigma\xi_1\}, \quad \{\sigma\xi_2\}, \cdots, \{\sigma\xi_m\}, \quad \{\mu_i\xi_i + \mu_j\xi_j\},$$

where

$$\sigma^{p^s+1} = c, \quad \mu_i^{p^s+1} + \mu_j^{p^s+1} = c,$$

solutions $\mu_i \neq 0$, $\mu_j \neq 0$ existing in the $GF[p^{2s}]$ if $p^s > 2$. If $p^s = 2$, $m \geqq 3$, we use $\{\mu_i\xi_i + \mu_j\xi_j + \mu_k\xi_k\}$. Denote by $HO(m, p^{2s})$ the quotient-group of $H_{m,p,s}$ by the invariant subgroup formed of the substitutions (21). It is a simple group*), except in the three cases $m = 2$, $p^s = 2$; $m = 2$, $p^s = 3$; $m = 3$, $p^s = 2$. If d denotes the greatest common divisor of m and $p^s + 1$, the order of $HO(m, p^{2s})$ is

$$\frac{1}{d}\,[p^{sm} - (-1)^m]\, p^{s(m-1)}\, [p^{s(m-1)} - (-1)^{m-1}]\, p^{s(m-2)} \cdots [p^{2s} - 1]\, p^s.$$

We may state our results in the following form:

*The hyperorthogonal quotient-group $HO(m, p^{2s})$ may be represented**) as a transitive substitution group on the*

$$[p^{s(2m-1)} - (-1)^m p^{s(m-1)}] \div [p^s + 1]$$

symbols $\{\lambda_1\xi_1 + \cdots + \lambda_m\xi_m\}$ in which $\lambda_1^{p^s+1} + \cdots + \lambda_m^{p^s+1}$ is a constant $\neq 0$. The case $m = 2$, $p^s = 2$ is an exception; $HO(2, 4)$ is of order 6 and the number of symbols is 2.

11. For $c = 0$, we combine into one symbol $\{\lambda_1\xi_1 + \cdots + \lambda_m\xi_m\}$ the $p^{2s} - 1$ linear functions $\mu(\lambda_1\xi_1 + \cdots + \lambda_m\xi_m)$ in which μ runs through the series of marks $\neq 0$ of the $GF[p^{2s}]$, the case

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m = 0$$

*) *Mathematische Annalen* Vol. 52, pp. 573—580.

**) Since the isomorphism between the two groups is holoedric.

being excluded. The number of symbols is therefore

$$(N_{m,p,s}-1)/(p^{2s}-1).$$

These symbols are permuted transitively (§ 8) by the substitutions of $H_{m,p,s}$. Suppose that a substitution S of the latter group leaves fixed every symbol. Consider the p^s+1 symbols (where $j>1$)

$$\{\xi_1+\mu_i\xi_j\} \qquad \mu_i^{p^s+1}=-1 \qquad (i=1,2,\cdots,p^s+1).$$

Let S multiply $\xi_1+\mu_1\xi_j$ by α_1 and $\xi_1+\mu_2\xi_j$ by α_2, where $\alpha_i^{p^s+1}=1$. There S will replace $(\mu_1-\mu_2)\xi_1$ by

$$(\alpha_2\mu_1-\alpha_1\mu_2)\xi_1+\mu_1\mu_2(\alpha_2-\alpha_1)\xi_j.$$

If $m>2$, there exist at least two values 2 and 3 of j. Hence $\alpha_2-\alpha_1=0$, so that S multiplies ξ_1 and ξ_j by α_1 and has the form (21). A like result follows for $m=2$ unless the multipliers $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{p^s+1}$ corresponding to $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_{p^s+1}$ are all distinct. Supposing the latter to be the case, one of the multipliers, say α_1, must be the solution 1 of $\alpha^{p^s+1}=1$. Introducing $x\equiv\xi_1+\mu_1\xi_2$ as a new index in place of ξ_1, the substitution S takes the form

$$S':\qquad x'=x,\quad \xi_2'=\varkappa\xi_2+\lambda x,$$

while $\xi_1+\mu_i\xi_2$ takes the form $\varkappa_i\xi_2+\lambda_i x$. Since S' must multiply the latter function by α_i, we have $\alpha_i\varkappa_i=\varkappa\varkappa_i$. But $\varkappa_i\neq 0$, so that $\alpha_i=\varkappa$, a constant. Hence, contrary to hypothesis, S multiplies p^s functions $\xi_1+\mu_i\xi_2$ $(i>1)$ by the same constant. It follows that the isomorphism between the quotient-group $HO[m,p^{2s}]$ and the corresponding substitution group is holoedric as well for $c=0$ as for $c\neq 0$*).

The quotient-group $HO(m,p^{2s})$ may be represented as a transitive substitution group on the

$$\omega_m\equiv[p^{ms}-(-1)^m][p^{s(m-1)}-(-1)^{m-1}]\div[p^{2s}-1]$$

symbols $\{\lambda_1\xi_1+\cdots+\lambda_m\xi_m\}$ *in which* $\lambda_1^{p^s+1}+\cdots+\lambda_m^{p^s+1}=0$, *not every* $\lambda_i=0$.

12. The number of letters required by the representation when $c\neq 0$ exceeds the number required when $c=0$ except in the case $p^s=2$, m even. Indeed, the condition may be written

$$p^{s(m-1)}(p^s-1)>p^{s(m-1)}-(-1)^{m-1},$$

and is satisfied if $p^s>2$ (m being >1) or if $p^s=2$, m odd. But for $c\neq 0$ the representation fails if $p^s=2$, $m=2$. We may state the result:

*) A second proof follows from the simplicity of $HO(m,p^{2s})$, the three exceptional cases requiring special consideration

By the present methods, the minimum number of letters necessary for the transitive representation of $HO(m, p^{2s})$ is ω_m except when $p^s = 2$, m even, $m > 2$, when the minimum number (given by $c = 1$) is $\frac{1}{3}(2^{2m-1} - 2^{m-1})$.

13. For $m = 2$, $\omega_2 = p^s + 1$, a result in accord with the isomorphism of $HO[2, p^{2s}]$ with the linear fractional group in the $GF[p^s]$ *). The latter group may be represented as a substitution group on $p^s + 1$ letters, but on no fewer number except when $p^s = 5, 7, 9, 11$ **).

For $m = 4$, $p^s = 2$, the number of letters is 40. The group $HO(4, 2^2)$ of order 25920 may be identified***) with the simple group occurring in the theory of the 27 straight lines upon a general surface of the third order; there are known resolvent equations of degree 40.

For $m = 4$, $p^s > 2$, the number of letters is $\omega_4 \equiv (p^{2s}+1)(p^{3s}+1)$. But $HO(4, p^{2s})$ is isomorphic with the senary second hypoabelian simple group $SH(6, 2^s)$, the senary first orthogonal simple group in the $GF[p^s]$, or the senary second orthogonal simple group, according as p^s has the form 2^s, $4l - 1$, or $4l + 1$, respectively †). The latter groups may be represented as transitive substitution groups on ††)

$$(2^{3s} + 1)(2^s + 1), \quad p^{3s} + 1, \quad p^{3s} + 1$$

letters respectively. Hence a reduction in degree takes place. For $p^s = 2$, the number is 27, which is the lowest possible degree (Jordan, Traité, p. 319).

Characteristic equation of a hyperorthogonal substitution.

14. The determination of an ultimate canonical form for a given linear substitution S depends upon the existence of a function

$$\omega \equiv A_1 \xi_1 + A_2 \xi_2 + \cdots + A_m \xi_m$$

which S replaces by $\varkappa\omega$, $\varkappa$ being a constant. The conditions for A_i and $\varkappa$ are

$$(22) \qquad \sum_{i \neq j}^{1,\cdots,m} A_i \alpha_{ij} + A_j(\alpha_{jj} - \varkappa) = 0 \qquad (j = 1, 2, \cdots, m).$$

---

*) *Annalen*, p. 568; *Proc. Lond. Math. Soc.*, Vol. 31, p. 39, foot-note.

**) The famous Galois theorem when $s = 1$; for $s > 1$, proofs by Moore and Wiman.

***) *Proc. Lond. Math. Soc.*, Vol. 31; *Comptes Rendus*, Vol. 128, p. 873.

†) *Bull. Amer. Math. Soc.*, May 1900, pp. 323—8.

††) *American Journal*, Vol. 23, pp. 337—377.

The determinant of the coefficients of $A_1, \cdots, A_m$ equals

$$\Delta(x) \equiv \begin{vmatrix} \alpha_{11}-x & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-x & \alpha_{23} & \cdots \alpha_{2m} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}-x & \cdots \alpha_{3m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \alpha_{m3} & \cdots \alpha_{mm}-x \end{vmatrix}$$

Hence x must be a root of the characteristic equation $\Delta(x) = 0$. We expand $\Delta(x)$ according to powers of $-x$. The constant term $\Delta(0)$ is unity being the determinant of S. We set

$$\sigma_1 \equiv \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ii}, \quad \sigma_2 = \sum_{i,j}^{1,\cdots,m} \begin{vmatrix} \alpha_{ii} & \alpha_{ij} \\ \alpha_{ji} & \alpha_{jj} \end{vmatrix}, \quad \sigma_3 = \sum_{i,j,k}^{1,\cdots,m} \begin{vmatrix} \alpha_{ii} & \alpha_{ij} & \alpha_{ik} \\ \alpha_{ji} & \alpha_{jj} & \alpha_{jk} \\ \alpha_{ki} & \alpha_{kj} & \alpha_{kk} \end{vmatrix}, \cdots,$$

where $i < j < k < \cdots$ in each of the summations. Hence

$$(23) \quad \Delta(x) \equiv (-x)^m + \sigma_1(-x)^{m-1} + \sigma_2(-x)^{m-2} + \cdots + \sigma_{m-1}(-x) + 1.$$

In σ_{m-1} the terms are the first minors of $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \cdots, \alpha_{mm}$ in the determinant $|\alpha_{ij}|$, and hence equal $\alpha_{11}^{p^s}, \alpha_{22}^{p^s}, \cdots, \alpha_{mm}^{p^s}$, respectively (§ 1). By the theory of determinants it follows that

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}^{p^s} & \alpha_{12}^{p^s} \\ \alpha_{21}^{p^s} & \alpha_{22}^{p^s} \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mm} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m3} & \cdots & \alpha_{mm} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{32} & \cdots & \alpha_{3m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mm} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} & \cdots & \alpha_{3m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m3} & \cdots & \alpha_{mm} \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

equals the product of the determinant $|\alpha_{ij}| \equiv 1$ by the determinant

$$\begin{vmatrix} \alpha_{33} & \cdots & \alpha_{3m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{m3} & \cdots & \alpha_{mm} \end{vmatrix}.$$

But σ_{m-2} is formed from such determinants. Proceeding thus,

$$(24) \quad \sigma_{m-1} = \sigma_1^{p^s}, \; \sigma_{m-2} = \sigma_2^{p^s}, \; \sigma_{m-3} = \sigma_3^{p^s}, \cdots, \sigma_1 = \sigma_{m-1}^{p^s}.$$

If therefore we raise $\Delta(x)$ to the power p^s and divide by $(-x^{p^s})^m$, we get

$$1+\sigma_1^{p^s}(-x^{-p^s})+\sigma_2^{p^s}(-x^{-p^s})^2+\cdots+\sigma_{m-1}^{p^s}(-x^{-p^s})^{m-1}+(-x^{-p^s})^m$$
$$=(-x^{-p^s})^m+\sigma_1(-x^{-p^s})^{m-1}+\sigma_2(-x^{-p^s})^{m-2}+\cdots+\sigma_{m-2}(-x^{-p^s})^2$$
$$+\sigma_{m-1}(-x^{-p^s})+1,$$

which is seen to be $\Delta(x^{-p^s})$. We have therefore the theorem:

If x be a root of the characteristic equation of a hyperorthogonal substitution, then x^{-p^s} is likewise a root.

The theorem holds true for hyperorthogonal substitutions of determinant Δ, necessarily a root of $\Delta^{p^s+1}=1$. For example, for $m=3$, the characteristic equation is then

$$x^3-\sigma x^2+\sigma^{p^s}\Delta x-\Delta=0.$$

Raising it to the power p^s and dividing the result by $-x^{3p^s}\Delta^{-1}$,

$$x^{-3p^s}-\sigma x^{-2p^s}+\sigma^{p^s}\Delta x^{-p^s}-\Delta=0,$$

so that x^{-p^s} is a root of the former equation. The substitution

$$\begin{pmatrix} 0 & \Delta & 0 \\ -\sigma^{p^s} & 0 & \beta \\ \beta^{p^s} & 0 & \sigma \end{pmatrix} \qquad (\sigma^{p^s+1}+\beta^{p^s+1}=1)$$

satisfies the hyperorthogonal conditions and has the above cubic as its characteristic equation. Given the quantities

$$x,\quad x^{p^{2s}},\quad x^{-p^s}\qquad (x^{p^{2s}-p^s+1}=\Delta,\ x^{p^s+1}\neq 1),$$

we may find, as in § 17, a hyperorthogonal substitution whose characteristic equation has these quantities as is roots, the equation being irreducible in the $GF[p^{2s}]$.

15. We proceed to prove for $m \gtreqless 4$ that, inversely, if $\sigma_1,\cdots,\sigma_{m-1}$ be arbitrary marks of the $GF[p^{2s}]$ such that $\sigma_{m-i}=\sigma_i^{p^s}$ (for $i=1,2,\cdots,m-1$), there exists a substitution in $H_{m,p,s}$ whose characteristic determinant has the form (23). The theorem is doubtless true for general m.

For $m=3$, $\Delta(x)=-x^3+\sigma_1x^2-\sigma_1^{p^s}x+1$, and the required substitution may be taken to be

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \sigma_1^{p^s} & 0 & \delta^{p^s} \\ -\delta & 0 & \sigma_1 \end{pmatrix}$$

where $\sigma_1^{p^s+1}+\delta^{p^s+1}=1$, an equation having solutions δ in the field.

For $m=2$, $\Delta(x)=x^2-\sigma_1 x+1$, subject to the condition $\sigma_1=\sigma_1^{p^s}$. The general substitution of $H_{2,p,s}$ has the form

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^{p^s} & \alpha^{p^s} \end{pmatrix} \qquad (\alpha^{p^s+1}+\beta^{p^s+1}=1).$$

It remains to prove that there exists a solution α in the $GF[p^{2s}]$ of the pair of equations

$$\alpha+\alpha^{p^s}=\sigma_1, \quad \alpha\alpha^{p^s}=1-\beta^{p^s+1},$$

in which $\sigma_1=\sigma_1^{p^s}$ and β is a mark of the $GF[p^{2s}]$, the choice of which is at our command. The equation

$$x^2-\sigma_1 x+1-\beta^{p^s+1}=0$$

has its coefficients in the $GF[p^s]$ and therefore its roots in the $GF[p^{2s}]$. If it be irreducible in the $GF[p^s]$, one root may be chosen as the required mark α, since the second root is then α^{p^s}. If $p>2$, the equation is irreducible if $\sigma_1^2-4+4\beta^{p^s+1}$ is a not-square in the $GF[p^s]$, a condition readily satisfied since the expression takes any value in the $GF[p^s]$ by suitable choice of β. For $p=2$, with $\sigma_1=0$, we make the evident choice $\alpha=0$; while for $\sigma_1 \neq 0$, the substitution $x/\sigma_1=y$ leads to the equation

$$y^2-y+\delta=0, \quad \delta\equiv(1-\beta^{p^s+1})/\sigma_1^2.$$

By suitable choice of β in the $GF[p^{2s}]$, δ may be given any desired value in the $GF[p^s]$ and hence one for which

$$\delta+\delta^2+\delta^{2^2}+\cdots+\delta^{2^{s-1}}=1,$$

when the above equation will be irreducible in the $GF[2^s]$*).

For $m=4$, $\Delta(x)\equiv x^4-\sigma_1 x^3+\sigma_2 x^2-\sigma_1^{p^s}x+1$. To determine a substitution with the characteristic determinant $\Delta(x)$, we consider

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & \beta & 0 \\ \beta^{p^s}\delta^{p^s} & 0 & \alpha^{p^s}\delta^{p^s} & \gamma \\ -\beta^{p^s}\gamma^{p^s} & 0 & -\alpha^{p^s}\gamma^{p^s} & \delta \end{pmatrix}$$

which belongs to $H_{4,p,s}$ if, and only if,

(25) $$\alpha^{p^s+1}+\beta^{p^s+1}=1, \quad \gamma^{p^s+1}+\delta^{p^s+1}=1.$$

It has the characteristic determinant $\Delta(x)$ if

(26) $$\alpha+\alpha^{p^s}=\sigma_2, \quad \delta+\alpha^{p^s}\delta^{p^s}=\sigma_1.$$

*) *American Journal of Mathematics*, vol. XXI, p. 224.

For $\alpha^{p^s+1} \neq 1$, the second equation is equivalent to

$$\delta(1-\alpha^{p^s+1}) = \sigma_1 - \alpha^{p^s}\sigma_1^{p^s}.$$

It therefore remains to be shown that α may be determined in the $GF[p^{2s}]$ so that, for some mark $\mu \neq 1$ of the $GF[p^s]$,

$$\alpha + \alpha^{p^s} = \sigma_2, \quad \alpha^{p^s+1} = \mu \neq 1.$$

Then δ is determined and then solutions β, γ of (25) exist in the $GF[p^{2s}]$. Now α and α^{p^s} will be the roots of

$$x^2 - \sigma_2 x + \mu = 0,$$

if it be irreducible in the $GF[p^s]$. If $p > 2$, the latter condition is satisfied if $\sigma_2{}^2 - 4\mu$ is a not-square in the $GF[p^s]$. Since μ has $p^s - 1$ possible values, at least one value makes $\sigma_2{}^2 - 4\mu$ a not-square. Indeed, if $p > 3$, $p^s - 1 > \frac{1}{2}(p^s+1)$, the latter being the number of marks which are squares or zero. If $p^s = 3$, and if $\sigma_2 \neq 0$, we take $\mu = -1$; if $p^s = 3$ and if $\sigma_2 = 0$, we take $\mu = 0$, whence $\alpha = 0$, $\delta = \sigma_1$. If $p = 2$, we proceed as in the case $m = 2$ above, an exception occurring if $s = 1$, $\sigma_2 = 1$, since the value $\mu = 1$ is excluded. For the latter case, equations (26) become

$$\alpha + \alpha^2 = 1, \quad \delta + \alpha^2\delta^2 = \sigma_1.$$

By squaring the second, we see that $\sigma_1{}^2 = \sigma_1$. If $\sigma_1 = 0$, we take $\delta = 0$. For $\sigma_1 = 1$, the first equation gives $\alpha^3 = 1$, so that the second gives $\delta^2 + \alpha\delta = \alpha$. Squaring the latter, we get

$$\delta + \alpha^2\delta^2 = \alpha^2 \neq 1.$$

Hence, for $p^s = 2$, the above substitution cannot have the characteristic determinant $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$. We may define the $GF[2^2]$ by means of the irreducible congruence

$$j^2 \equiv j + 1 \pmod{2}.$$

Then $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ decomposes into (Compare § 21)

$$(x^2 + jx + 1)(x^2 + j^2x + 1),$$

each factor being irreducible in the $GF[2^2]$. Among the substitutions of $H_{4,2,2}$ having this quartic as characteristic determinant we find*)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ j & 0 & 1 & j^2 \\ j & 0 & j^2 & 1 \\ j & 0 & j & j \end{pmatrix}.$$

*) This substiuttion is related to the additional generator W (*Annalen*, p. 571) necessary in the case $p^s = 2$, $m \gtreqless 3$. See the end of § 24.

16. If x satisfies $\Delta(x)=0$, equations (22) reduce to at most $m-1$ linearly independent equations. We drop the equation given by $j=m$.

For $m=3$, he have

$$A_1=\varrho\begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{22}-x & \alpha_{32} \end{vmatrix},\quad A_2=\varrho\begin{vmatrix} \alpha_{31} & \alpha_{11}-x \\ \alpha_{32} & \alpha_{12} \end{vmatrix},\quad A_3=\varrho\begin{vmatrix} \alpha_{11}-x & \alpha_{21} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22}-x \end{vmatrix}.$$

In view of § 1, these determinants equal respectively

(27) $$\alpha_{13}^{p^s}+x\alpha_{31},\quad \alpha_{23}^{p^s}+x\alpha_{32},\quad x^2-x(\alpha_{11}+\alpha_{22})+\alpha_{33}^{p^s}.$$

If these quantities all vanish, equations (22) impose a single condition on A_1, A_2, A_3.

17. Suppose that $\Delta(x)=0$ is irreducible in the $GF[p^{2s}]$. Then, if λ be one root, the m distinct roots are

(29) $$\lambda,\ \lambda^{p^{2s}},\ \lambda^{p^{4s}},\cdots,\ \lambda^{p^{2s(m-1)}} \qquad (\lambda^{p^{2sm}}\equiv\lambda).$$

By § 14, λ^{-p^s}, $\lambda^{-p^{3s}}$, $\lambda^{-p^{5s}},\cdots,\lambda^{-p^{s(2m-1)}}$ are also roots of $\Delta(x)=0$. If $\lambda^{-p^s}=\lambda$, then $\lambda^{p^{2s}}=\lambda^{-p^s}=\lambda$, which is impossible if $m>1$. Hence, for $m=2$, $\lambda^{-p^s}=\lambda^{p^{2s}}$. For $m>2$, $\lambda^{-p^s}\neq\lambda^{p^{2s}}$; for, if so, $\lambda^{p^{3s}}=\lambda^{-p^{2s}}=\lambda^{p^s}$, whence $\lambda^{p^{4s}}=\lambda^{p^{2s}}$ and therefore $\lambda=\lambda^{p^{2sm}}=\lambda^{p^{2s}}$. Hence, for $m=3$, $\lambda^{-p^s}=\lambda^{p^{4s}}$. If $m>3$, $\lambda^{-p^s}\neq\lambda^{p^{4s}}$; for, if equal, $\lambda^{p^{7s}}=\lambda^{p^s}$, whence

$$\lambda\equiv\lambda^{p^{2sm}}=\lambda^{p^{2s}} \text{ or } \lambda^{p^{4s}} \text{ or } \lambda^{p^{6s}},$$

which is impossible. Hence, if $m=4$, $\lambda^{-p^s}=\lambda^{p^{6s}}$. Proceeding similarly we find that, for general m,

$$\lambda^{-p^s}=\lambda^{p^{2s(m-1)}}.$$

Raising the two members to the power p^{2s}, we find that

$$\lambda^{-p^{3s}}=\lambda.$$

It follows that $\lambda^{p^{6s}}=\lambda$, so that $m=3$.

For $m=3$, the roots may be written

(30) $$\lambda,\ \lambda^{p^{2s}},\ \lambda^{-p^s} \qquad (\lambda^{p^{2s}-p^s+1}=1,\ \lambda^{p^s+1}\neq 1),$$

since their product is unity and $\lambda^{-p^s}\neq\lambda$.

Inversely, any set of marks (30) *are the roots of the irreducible characteristic equation of some hyperorthogonal substitution.*

In fact, if σ_1 denote the sum of these three marks, we have

$$\lambda\lambda^{p^{2s}}+\lambda\lambda^{-p^s}+\lambda^{p^{2s}}\lambda^{-p^s}=\lambda^{p^s}+\lambda^{-p^{2s}}+\lambda^{-1}=\sigma_1^{p^s}.$$

Hence the given marks are the roots of

(31) $$-\Delta(x)\equiv x^3-\sigma_1x^2+\sigma_1^{p^s}x-1=0.$$

Since $\sigma_1^{p^{2s}}=\sigma_1$, this equation belongs to the $GF[p^{2s}]$. It has no linear

factor in the field and hence is irreducible, since none of the marks (30) belong to the $GF[p^{2s}]$. Indeed, since $\lambda^{p^{3s}+1}=1$, either

$$\lambda^{p^{2s}}=\lambda,\ (\lambda^{p^{2s}})^{p^{2s}}=\lambda^{p^{2s}},\ \text{or}\ (\lambda^{-p^s})^{p^{2s}}=\lambda^{-p^s}$$

would require $\lambda^{p^s+1}=1$, contrary to one of the assumptions (30). The group $H_{3,p,s}$ contains the substitution

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \sigma_1^{p^s} & 0 & \delta^{p^s} \\ -\delta & 0 & \sigma_1 \end{pmatrix} \qquad (\sigma_1^{p^s+1}+\delta^{p^s+1}=1)$$

whose characteristic determinant is given by (31). Indeed, for σ_1 arbitrary the condition determines marks δ in the $GF[p^{2s}]$.

The characteristic equation $\Delta(x)=0$ *is never irreducible in the* $GF[p^{2s}]$ *if* $m\neq 3$. *For* $m=3$, *it is irreducible if, and only if, its roots have the form* (30); *to every such set of roots* (30) *there corresponds at least one substitution of* $H_{3,p,s}$.

18. Let $m>2$ and suppose that $\Delta(x)$ decomposes in the $GF[p^{2s}]$ into a linear factor and an irreducible factor of degree $m-1$. The distinct roots of the latter may be expressed as follows:

$$(32)\qquad \lambda,\ \lambda^{p^{2s}},\ \lambda^{p^{4s}},\cdots,\lambda^{p^{2s(m-2)}} \qquad (\lambda^{p^{2s(m-1)}}=\lambda).$$

Then λ^{-p^s} is a root of $\Delta(x)=0$. It is not a root of the linear factor equated to zero, since $(\lambda^{-p^s})^{p^{2s}}=\lambda^{-p^s}$ requires $\lambda^{p^{3s}}=\lambda^{p^s}$ and therefore also $\lambda=\lambda^{p^{2s(m-1)}}=\lambda^{p^{2s}}$, which is impossible if $m>2$. Hence λ^{-p^s} must occur amony the roots (32). As in § 17, this requires that $m-1=3$.

If $m=4$, we have

$$\lambda^{p^{4s}}=\lambda^{-p^s},\ \lambda^{p^{6s}}=\lambda,$$

so that $\lambda=\lambda^{p^{6s}}=\lambda^{-p^{3s}}$, whence $\lambda^{p^{3s}+1}=1$. If μ be the root of the linear factor, so that μ belongs to the $GF[p^{2s}]$, we have

$$\lambda^{p^{2s}-p^s+1}=\mu^{-1},\quad \mu^{p^s+1}=1,$$

the latter following from the identity $(p^{2s}-p^s+1)(p^s+1)=p^{3s}+1$. Hence the four roots may be written in the form

$$(33)\qquad \lambda,\ \lambda^{p^{2s}},\ \lambda^{-p^s};\ \lambda^{p^s-p^{2s}-1}=\mu \quad (\mu^{p^s+1}=1,\ \lambda^{p^s+1}\neq 1).$$

Inversely, any set of marks of the form (33) are the roots of an equation

$$(34)\qquad x^4-\sigma_1x^3+\sigma_2x^2-\sigma_1^{p^s}x+1=0,$$

where

$$\sigma_1=\mu+\lambda+\lambda^{p^{2s}}+\lambda^{-p^s},$$

$$\sigma_2=(\lambda^{p^{2s}-p^s}+\lambda^{p^s-1})+(\lambda^{p^{2s}+1}+\lambda^{-p^{2s}+p^s})+(\lambda^{-p^s+1}+\lambda^{-p^{2s}-1}),$$

whence $\sigma_1^{p^{2s}} = \sigma_1$, $\sigma_2^{p^s} = \sigma_2$, the quantities in each parenthesis of σ_2 being equal to their $(p^s)^{\text{th}}$ powers. The equation (34) has therefore its coefficients in the $GF[p^{2s}]$. Moreover, it decomposes into a linear and an irreducible cubic factor in the field. Since $\lambda^{p^{3s}+1} = 1$, the irreducibility of the cubic follows as in § 17.

The following substitution of $H_{4,p,s}$

$$\begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \tau^{p^s}\mu^{-1} & 0 & \varrho^{p^s}\mu^{-1} \\ 0 & -\varrho & 0 & \tau \end{pmatrix} \qquad (\tau^{p^s+1} + \varrho^{p^s+1} = 1)$$

has the characteristic determinant

$$(x-\mu)(x^3 - \tau x^2 + \tau^{p^s}\mu^{-1}x - \mu^{-1}) \equiv x^4 - \sigma_1 x^3 + \sigma_2 x^2 - \sigma_1^{p^s} x + 1,$$

if we take

$$(35) \qquad \tau \equiv \lambda + \lambda^{p^{2s}} + \lambda^{-p^s}, \quad \mu = \lambda^{p^s - p^{2s} - 1}.$$

The condition between τ and ϱ may then be solved for ϱ in the field.

The characteristic determinant has an irreducible factor of degree $m-1$ in the $GF[p^{2s}]$ only when $m = 4$ and the roots of $\Delta(x) = 0$ are of the form (33). Inversely, to any such set of four marks there corresponds at least one substitution of $H_{4,p,s}$.

19. It follows for $m = 3$ that $\Delta(x)$ is either irreducible in the $GF[p^{2s}]$ or else decomposes into three linear factors. For $m = 2$, $\Delta(x)$ decomposes into two linear factors.

For $m > 3$, a repetition of the previous argument shows that $\Delta(x)$ decomposes in the $GF[p^{2s}]$ into two linear factors and an irreducible factor of degree $m-2$ only when $m - 2 = 3$, and that for $m = 5$, we must have

$$\lambda^{-p^s} = \lambda^{p^{2s(m-3)}} \equiv \lambda^{p^{4s}}, \ \lambda^{p^{6s}} = \lambda.$$

In general, $\Delta(x)$ decomposes in the $GF[p^{2s}]$ into linear factors and a single irreducible factor of degree > 1 only when the latter is a cubic with roots of the form

$$\lambda, \ \lambda^{p^{2s}}, \ \lambda^{-p^s} \qquad (\lambda^{p^{3s}+1} = 1, \ \lambda^{p^s+1} \neq 1).$$

Let the linear factors vanish for the values $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_{m-3}$ respectively. Since $\mu_i^{-p^s}$ is a root (§ 14) and belongs to the $GF[p^{2s}]$, it equals one of the set $\mu_1, \cdots, \mu_{m-3}$. If $\mu_1^{-p^s} \neq \mu_1$, we may choose the notation so that $\mu_2 = \mu_1^{-p^s}$. Then $\mu_2^{-p^s} = \mu_1$. If $\mu_3^{-p^s} \neq \mu_3$, we set $\mu_4 = \mu_3^{-p^s}$, whence $\mu_4^{-p^s} = \mu_3$. If $m - 3$ be odd, at least one μ_i satisfies $\mu^{p^s+1} = 1$. In general, the $m-3$ roots μ_i may be exhibited in the form

$$\mu_2,\ \mu_1 = \mu_2^{-p^s},\ \mu_4,\ \mu_3 = \mu_4^{-p^s},\ \cdots,\ \mu_{2r},\ \mu_{2r-1} = \mu_{2r}^{-p^s},\ \mu_{2r+1},\ \cdots,\ \mu_{m-3},$$

where

$$\mu_{2i}^{p^s+1} \neq 1 \quad (i=1,\cdots,r), \qquad \mu_j^{p^s+1} = 1 \quad (j=2r+1,2r+2,\cdots,m-3).$$

The characteristic determinant $\Delta(x)$ then equals

$$\prod_{i=1}^{r}\left[x^2 - x\left(\mu_{2i}+\mu_{2i}^{-p^s}\right) + \mu_{2i}^{-p^s+1}\right]\prod_{j=2r+1}^{m-3}[x-\mu_j]\cdot\left(x^3 - x^2\tau + x\tau^{p^s} - \mu^{-1}\right)$$

where τ and μ are defined in terms of λ by (35). Since $\mu^{p^s+1}=1$, the constant term in the above product is unity. To prove that the group $H_{m,p,3}$ contains a substitution whose characteristic determinant equals the above product, consider first the factor given by $i=1$. The binary substitution

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^{p^s}\mu_2^{-p^s+1} & \alpha^{p^s}\mu_2^{-p^s+1} \end{pmatrix} \quad \left(\alpha^{p^s+1}+\beta^{p^s+1}=1\right)$$

has the characteristic determinant

$$x^2 - x\left(\alpha + \alpha^{p^s}\mu_2^{-p^s+1}\right) + \mu_2^{-p^s+1}.$$

It is identical with the factor given by $i=1$ if

$$\alpha + \alpha^{p^s}\mu_2^{-p^s+1} = \mu_2 + \mu_2^{-p^s}.$$

Dividing by μ_2, we obtain the equivalent condition

$$\left(\frac{\alpha}{\mu_2}\right) + \left(\frac{\alpha}{\mu_2}\right)^{p^s} = 1 + \frac{1}{\mu_2^{p^s+1}}.$$

Upon raising it to the power p^s, we find, since $\mu_2^{p^{2s}} = \mu_2$, that $\alpha^{p^{2s}} = \alpha$. Hence it has p^s roots α in the field. Corresponding to each root α, we derive one or p^s+1 marks β in the field. The required substitution may therefore be chosen in the form:

$$\begin{pmatrix}
\alpha_2 & \beta_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
-\beta_2^{p^s}\mu_2^{-p^s+1} & \alpha_2^{p^s}\mu_2^{-p^s+1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \alpha_4 & \beta_4 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\beta_4^{p^s}\mu_4^{-p^s+1} & \alpha_4^{p^s}\mu_4^{-p^s+1} & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \mu_{2r+1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \tau^{p^s}\mu^{-1} & 0 & \varrho^{p^s}\mu^{-1} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & -\varrho & 0 & \tau
\end{pmatrix}$$

in which ϱ is determined so that $\varrho^{p^s+1} + \tau^{p^s+1} = 1$.

The results of §§ 17—19 may be combined into the theorem:

If the characteristic determinant $\Delta(x)$ *of a substitution of the group* $H_{m,p,s}$ *decomposes in the* $GF[p^{2s}]$ *into linear factors and a single (non-linear) irreducible factor, the latter is a cubic with the roots* $\lambda, \lambda^{p^{2s}}, \lambda^{-p^s}$ *where* $\lambda^{p^{3s}+1} = 1$, $\lambda^{p^s+1} \neq 1$. *To any such decomposition of* $\Delta(x)$ *there corresponds at least one substitution of the group. In particular,* $\Delta(x)$ *is never irreducible when* $m \neq 3$.

20. Passing to the general case, let $\Delta(x)$ have a factor $f_t(x)$ of degree t belonging to and irreducible in the $GF[p^{2s}]$. Its distinct roots may be exhibited in the form

$$\lambda,\ \lambda^{p^{2s}},\ \lambda^{p^{4s}},\ \cdots,\ \lambda^{p^{2s(t-1)}} \qquad (\lambda^{p^{2st}} \equiv \lambda). \tag{36}$$

By § 14, $\Delta(x) = 0$ has also the roots, all of which are distinct,

$$\lambda^{-p^s},\ \lambda^{-p^{3s}},\ \lambda^{-p^{5s}},\ \cdots,\ \lambda^{-p^{s(2t-1)}}.$$

They are the roots of an irreducible factor f_t' *of* $\Delta(x)$. In the first place, they satisfy an equation of degree t with coefficients in the $GF[p^{2s}]$. Indeed, $\lambda^{-1}, \lambda^{-p^{2s}}, \lambda^{-p^{4s}}, \cdots$, satisfy the equation $F_t(x) \equiv x^t f_t(x^{-1}) = 0$ whose coefficients belong to the field. Then $\lambda^{-p^s}, \lambda^{-p^{3s}}, \cdots$, satisfy the equation*)

$$f_t'(x) \equiv \{F_t(x^{1/p^s})\}^{p^s} = 0$$

whose coefficients are the (p^s)-th powers of the coefficients of $F_t(x) = 0$ and hence belong to the field. [Another method of building $f_t'(x)$ is illustrated in the examples of §§ 21—23.] In the second place, $f_t'(x)$ is irreducible in the field. For, if reducible, it would have an irreducible factor of degree $d < t$, which vanishes for the d quantities

$$\lambda^{-p^s},\ \lambda^{-p^{3s}},\ \cdots,\ \lambda^{-p^{s(2d-1)}} \qquad \left(\lambda^{-p^{s(2d+1)}} \equiv \lambda^{-p^s}\right).$$

Every symmetric function of these quantities would belong to the field and their product would not vanish. Hence the elementary symmetric fonctions of

$$\lambda^{p^s},\ \lambda^{p^{3s}},\ \cdots,\ \lambda^{p^{s(2d-1)}}$$

would belong to the field. Raising these functions to the power p^s, we obtain the elementary symmetric functions of

$$\lambda^{p^{2s}},\ \lambda^{p^{4s}},\ \cdots,\ \lambda^{p^{2sd}} \qquad \left(\lambda^{p^{2s(d+1)}} = \lambda^{p^{2s}}\right)$$

as marks of the field. Hence these d roots of $f_t(x) = 0$ would satisfy an equation belonging to the field, contrary to the irreducibility of $f_t(x)$.

*) The quantity in brackets is raised to the power p^s to produce a function of x containing only positive integral powers.

If $\Delta(x)$ *has in the* $GF[p^{2s}]$ *an irreducible factor* $f_t(x)$, *it has also the complementary irreducible factor* $x^t\left\{f_t\left(x^{-1/p^s}\right)\right\}^{p^s}$ *of equal degree.*

If these two factors have a common root, they have all their roots in common. Then $f_t(x)=0$ will have the root λ^{-p^s} and therefore t must be 3 (§ 17). *Hence an irreducible factor of degree* $t \neq 3$ *must be distinct from its complementary factor.*

21. As an example, consider the case $m=4$ and suppose that $\Delta(x)$ has (distinct) completementary irreducible quadratic factors in the $GF[p^{2s}]$. Let one factor be

$$x^2-\alpha x+\beta \equiv (x-\lambda)(x-\lambda^{p^{2s}}) \qquad (\lambda^{p^{4s}}=\lambda),$$

where $\beta \neq 0$. The complementary factor is then

$$(x-\lambda^{-p^s})(x-\lambda^{-p^{3s}}) \equiv x^2-x\left(\frac{\lambda^{p^s}+\lambda^{p^{3s}}}{\lambda^{p^{3s}+p^s}}\right)+\frac{1}{\lambda^{p^{3s}+p^s}}$$
$$\equiv x^2-x\alpha^{p^s}\beta^{-p^s}+\beta^{-p^s}.$$

Hence $\Delta(x)$ must have the form

$$x^4-x^3(\alpha+\alpha^{p^s}\beta^{-p^s})+x^2(\beta+\beta^{-p^s}+\alpha^{p^s+1}\beta^{-p^s}$$
$$-x(\alpha\beta^{-p^s}+\alpha^{p^s}\beta^{-p^s+1})+\beta^{-p^s+1}.$$

Since the constant term of $\Delta(x)$ is unity, the determinant of the substitution, we have $\beta^{p^s-1}=1$, so that β belongs to the $GF[p^s]$. Setting

$$\sigma_1 \equiv \alpha+\alpha^{p^s}\beta^{-1}, \quad \sigma_2 \equiv \beta+\beta^{-1}+\alpha^{p^s+1}\beta^{-1},$$

we see that $\Delta(x)$ has the form

$$x^4-\sigma_1x^3+\sigma_2x^2-\sigma_1^{p^s}x+1, \qquad \sigma_2 \equiv \sigma^{p^s}.$$

By § 15, there exist substitutions in $H_{4,p,s}$ with this characteristic determinant.

For $m=4$, *every pair of complementary irreducible quadratic factors of* $\Delta(x)$ *in the* $GF[p^{2s}]$ *may be given the form*

$$x^2-x\alpha+\beta, \quad x^2-x\alpha^{p^s}\beta^{-1}+\beta^{-1} \qquad (\beta \textit{ in the } GF[p^s]).$$

There exist substitutions in $H_{4,p,s}$ *whose characteristic determinant is the product of any such pair of irreducible quadratics.*

22. Suppose that, when $m=5$, $\Delta(x)$ has in the $GF[p^{2s}]$ a linear factor $x-\mu$ and two complementary irreducible quadratic factors. As in § 21, the quadratic factors must have the form

$$x^2-x\alpha+\beta, \quad x^2-x\alpha^{p^s}\beta^{-p^s}+\beta^{-p^s}.$$

Hence must $\mu\beta\beta^{-p^s}=1$. Since $\Delta(x)=0$ has a single root μ in the

$GF[p^{2s}]$, $\mu^{-p^s} = \mu$ (§ 14), in accord with the result $\mu = \beta^{p^s-1}$. By actual multiplication we verify that the product of the three factors has the form

$$x^5 - \sigma_1 x^4 + \sigma_2 x^3 - \sigma_2^{p^s} x^2 + \sigma_1^{p^s} x - 1,$$

a result evident in view of the origin of these factors.

23. Consider, for $m=6$ the general pair of complementary irreducible cubic factors in the $GF[p^{2s}]$. If one factor be

$$x^3 - \alpha x^2 + \beta x - y \equiv (x-\lambda)(x-\lambda^{p^{2s}})(x-\lambda^{p^{4s}}) \quad (\lambda^{p^{6s}-1}=1),$$

the complementary factor is

$$(x-\lambda^{-p^s})(x-\lambda^{-p^{3s}})(x-\lambda^{-p^{5s}}) \equiv x^3 - \left(\frac{\beta}{y}\right)^{p^s} x^2 + \left(\frac{\alpha}{y}\right)^{p^s} x - \left(\frac{1}{y}\right)^{p^s}.$$

Since the constant term of $\Delta(x)$ is unity, we have $y^{p^s-1} = 1$, so that y must be a mark of the $GF[p^s]$. The second factor may also be obtained from the first factor by raising the latter to the power p^s, dividing the result by $-y^{p^s} x^{3p^s}$ and afterwards replacing x^{-p^s} by x. The product of the two cubics is therefore a sextic having the properties indicated in § 14.

Reduction of hyperorthogonal substitutions to canonical forms within the group $H_{m,p,s}$.

24. Theorem. — *If $p^s > 2$, any substitution S of $H_{m,p,s}$ is conjugate within the group with some substitution replacing ξ_1 by a function of ξ_1 and ξ_2 only.*

The theorem has been proved*) except in the case when

$$(37) \qquad \alpha_{11}^{p^s+1} = 1, \quad \alpha_{12}^{p^s+1} + \alpha_{13}^{p^s+1} = 0, \quad \alpha_{1j} = 0 \quad (j=4,\cdots,m),$$

with $\alpha_{12} \neq 0$, $m \gtrless 3$. It remains to show that a substitution S in which (37) holds is conjugate within the group with a substitution having $\alpha_{11}^{p^s+1} \neq 1$. If $\alpha_{22}^{p^s+1} \neq 1$, we transform S by $O_{1,2}^{0,1}$ and obtain the desired substitution. Suppose, therefore, that in S relations (37) hold and that $\alpha_{22}^{p^s+1} = 1$. We transform S by $O_{1,2}^{\lambda,\mu}$, whose inverse (§ 1) is $O_{1,2}^{\bar\lambda,-\mu}$ $(\bar\lambda \equiv \lambda^{p^s})$, and obtain a hyperorthogonal substitution of matrix (A_{ij}), where in particular

$$A_{11} = \lambda^{p^s+1}\alpha_{11} + \mu^{p^s+1}\alpha_{22} + \lambda^{p^s}\mu\,\alpha_{21} + \lambda\mu^{p^s}\alpha_{12}.$$

To prove that, if $p^s > 3$, solutions λ, μ in the $GF[p^{2s}]$ of

$$(38) \qquad \lambda^{p^s+1} + \mu^{p^s+1} = 1$$

*) *Annalen*, p. 574 for $p > 2$; p. 575 and top of p. 576 for $p = 2$.

exist such that $A_{11}^{p^s+1} \neq 1$, we suppose that every set of solutions of (38) make $A_{11}^{p^s+1} = 1$ and prove that a contradiction results. The latter equation may be written

$$[\alpha_{11} + \mu\bar{\mu}(\alpha_{22} - \alpha_{11}) + \bar{\lambda}\mu\alpha_{21} + \lambda\bar{\mu}\alpha_{12}][\bar{\alpha}_{11} + \mu\bar{\mu}(\bar{\alpha}_{22} - \bar{\alpha}_{11}) + \lambda\bar{\mu}\bar{\alpha}_{21} + \bar{\lambda}\mu\bar{\alpha}_{12}] = 1,$$

upon setting $\bar{\mu} = \mu^{p^s}$, $\bar{\alpha}_{ij} = \alpha_{ij}^{p^s}$, $\bar{\lambda} = \lambda^{p^s}$. Expanded, it becomes

$$\mu\bar{\mu}\beta_1 - \mu^2\bar{\mu}^2\beta_1 + \bar{\lambda}\mu\beta_3 + \lambda\bar{\mu}\bar{\beta}_3 + \bar{\lambda}\mu^2\bar{\mu}\beta_5 + \lambda\bar{\mu}^2\mu\bar{\beta}_5 + \lambda\bar{\lambda}\mu\bar{\mu}\beta_7 + \lambda^2\bar{\mu}^2\alpha_{12}\bar{\alpha}_{21} + \bar{\lambda}^2\mu^2\bar{\alpha}_{12}\alpha_{21} = 0, \tag{39}$$

where

$$\beta_1 \equiv \alpha_{11}\bar{\alpha}_{22} + \bar{\alpha}_{11}\alpha_{22} - 2, \qquad \beta_3 \equiv \alpha_{11}\bar{\alpha}_{12} + \bar{\alpha}_{11}\alpha_{21},$$
$$\beta_5 \equiv \alpha_{21}(\bar{\alpha}_{22} - \bar{\alpha}_{11}) + \bar{\alpha}_{12}(\alpha_{22} - \alpha_{11}), \qquad \beta_7 \equiv \alpha_{12}\bar{\alpha}_{12} + \alpha_{21}\bar{\alpha}_{21}.$$

Relation (39) is satisfied if $\mu = 0$; or if $\lambda = 0$, so that $\mu\bar{\mu} = 1$ by (38). Consider the values $\mu \neq 0$ and set $\lambda = \omega\mu$. Then will

$$\mu\bar{\mu} = (1 + \omega\bar{\omega})^{-1}, \tag{40}$$

the $p^s + 1$ marks ω for which $\omega\bar{\omega} = -1$ being excluded. Each of the $p^{2s} - p^s - 1$ marks ω of the $GF[p^{2s}]$ lead to marks μ in the field, and therefore to corresponding marks $\lambda \equiv \omega\mu$. Substitute $\omega\mu$ for λ in (39), divide the resulting equation through by $\mu^2\bar{\mu}^2$, and replace the terms $1/\mu\bar{\mu}$ which remain by $1 + \omega\bar{\omega}$. We obtain the equation

$$(1 + \omega\bar{\omega})(\beta_1 + \bar{\omega}\beta_3 + \omega\bar{\beta}_3) - \beta_1 + \bar{\omega}\beta_5 + \omega\bar{\beta}_5 + \omega\bar{\omega}\beta_7 + \omega^2\alpha_{12}\bar{\alpha}_{21} + \bar{\omega}^2\bar{\alpha}_{12}\alpha_{21} = 0,$$

which must be satisfied by $p^{2s} - p^s - 1$ values of ω. Its degree being $2p^s + 1$, it is an identity in ω unless

$$p^{2s} - p^s - 1 \overline{\gtrless} 2p^s + 1, \quad \text{or} \quad (p^s - 1)(p^s - 2) \overline{\gtrless} 4,$$

viz., unless $p^s = 2$ or 3. Supposing $p^s > 3$, no combination of terms can take place in the identity on account of a reduction by $\omega^{p^{2s}} = \omega$. Among the conditions for the identity occur

$$\beta_3 = 0, \quad \alpha_{12}\bar{\alpha}_{21} = 0,$$

whence $\alpha_{12} = \alpha_{21} = 0$, contrary to hypothesis.

For $p^s = 3$, we consider only the solutions of (38) in which $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$. Then $\lambda^4 = \pm 1$. It follows that $\lambda^4 = -1$, $\mu^4 = -1$. Then

$$A_{11}^4 \equiv \{\lambda^3\mu\alpha_{21} + \lambda\mu^3\alpha_{12} - \alpha_{11} - \alpha_{22}\}\{\lambda^3\mu\alpha_{12}^3 + \lambda\mu^3\alpha_{21}^3 - \alpha_{11}^3 - \alpha_{22}^3\}$$
$$\equiv -\lambda^3\mu y_1 - \lambda\mu^3 y_1^3 - \lambda^2\mu^2 y_2 + 1 + y_3,$$

where

$$y_1 \equiv \alpha_{21}\alpha_{11}^3 + \alpha_{21}\alpha_{22}^3 + \alpha_{12}^3\alpha_{11} + \alpha_{12}^3\alpha_{22}, \quad y_2 \equiv \alpha_{21}\alpha_{12}^3 + \alpha_{12}\alpha_{21}^3,$$
$$y_3 \equiv 1 + \alpha_{11}\alpha_{22}^3 + \alpha_{11}^3\alpha_{22} + \alpha_{21}^4 + \alpha_{12}^4.$$

Set $\lambda = \tau\mu$, so that $\tau^4 = 1$. If $A_{11}^4 = 1$, we have

$$\tau^3 y_1 + \tau y_1^3 + \tau^2 y_2 + y_3 = 0.$$

If this cubic be satisfied by every root of $\tau^4 = 1$, then

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = 0.$$

Since either α_{12}^4 or α_{13}^4 is unity, we can suppose that $\alpha_{13} = 1$, $\alpha_{12}^4 = -1$, applying if necessary a transformation within the group [Compare § 25]. If $\alpha_{21} = 0$, then $y_1 = 0$ would give $\alpha_{22} = -\alpha_{11}$ whence $y_3 = 1$. Hence must $\alpha_{21} \neq 0$, so that the conditions $y_i = 0$ become

$$\alpha_{21}(\alpha_{11}^3 + \alpha_{22}^3) + \alpha_{12}^3(\alpha_{11} + \alpha_{22}) = 0, \quad \alpha_{12}^2 + \alpha_{21}^2 = 0, \quad \alpha_{11}\alpha_{22}(\alpha_{22}^2 + \alpha_{11}^2) = 1.$$

Upon squaring the last condition, we find $\alpha_{11}^2 = \alpha_{22}^2$ and then $\alpha_{22} = -\alpha_{11}$.

Transforming S by $O_{1,3}^{\lambda,\mu}$, we may suppose that $A_{11}^4 \neq 1$ unless

$$\alpha_{31}(\alpha_{11}^3 + \alpha_{33}^3) + \alpha_{13}^3(\alpha_{11} + \alpha_{33}) = 0, \quad \alpha_{31}\alpha_{13}^3 + \alpha_{13}\alpha_{31}^3 = 0,$$
$$1 + \alpha_{11}\alpha_{33}^3 + \alpha_{11}^3\alpha_{33} + \alpha_{31}^4 + \alpha_{13}^4 = 0.$$

If $\alpha_{31} = 0$, then $\alpha_{11} + \alpha_{33} = 0$ and the third condition is satisfied. By one of the hyperorthogonal conditions (4), we find that $\alpha_{12}^3\alpha_{32} - \alpha_{11} = 0$, whence $\alpha_{32} = -\alpha_{11}\alpha_{12}$. If $\alpha_{31} \neq 0$, the second condition gives $\alpha_{31}^2 = -1$. Then the third equation requires that $\alpha_{11}^2 + \alpha_{33}^2 = 0$. Then $\alpha_{11} + \alpha_{33} \neq 0$, so that the first equation gives $-\alpha_{31}\alpha_{11}\alpha_{33} + 1 = 0$, whence $\alpha_{31} = -\alpha_{11}\alpha_{33}$. By one of the conditions (4) we find that $\alpha_{32} = 0$.

Similarly, by transforming S by $O_{2,3}^{\lambda,\mu}$, we may make $A_{22}^4 \neq 1$ unless

$$\alpha_{32}(\alpha_{22}^3 + \alpha_{33}^3) + \alpha_{23}^3(\alpha_{22} + \alpha_{33}) = 0, \quad \alpha_{32}\alpha_{23}^3 + \alpha_{23}\alpha_{32}^3 = 0,$$
$$1 + \alpha_{22}\alpha_{33}^3 + \alpha_{22}^3\alpha_{33} + \alpha_{32}^4 + \alpha_{23}^4 = 0.$$

These conditions are shown to be impossible. For $\alpha_{31} = 0$, we had

$$\alpha_{33} = -\alpha_{11}, \quad \alpha_{22} = -\alpha_{11}, \quad \alpha_{32} = -\alpha_{11}\alpha_{12}, \quad \alpha_{11}^4 = 1, \quad \alpha_{12}^4 = -1.$$

By the third condition, $\alpha_{32}^4 + \alpha_{23}^4 = 0$, whence $\alpha_{23}^4 \equiv 1$. Then the second conditions requires $\alpha_{23}^2 + \alpha_{32}^2 = 0$, giving $\alpha_{32}^4 = \alpha_{23}^4 = -1$.

For $\alpha_{31} \neq 0$, we had $\alpha_{32} = 0$, $\alpha_{33}^2 = -\alpha_{11}^2$, $\alpha_{22} = -\alpha_{11}$. Hence $\alpha_{33} + \alpha_{22} \neq 0$, so that the first condition gives $\alpha_{23} = 0$. The left member of the third condition thus equals unity.

For $p^s = 2$, the preceding method does not serve to transform S into a substitution with $A_{11}^{p^s+1} \neq 1$, since one of the solutions λ, μ of (38) is necessarily zero. For $p^s = 2$, $m = 3$, the theorem fails. Indeed, a substitution of $H_{3,2,1}$ which replaces ξ_1 by a function of ξ_1 and ξ_2 only

is seen to be conjugate with one of the following substitutions in which $a^3 = b^3 = 1$:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a^{-1}b^{-1} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & a^{-1}b^{-1} & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ b^{-1} & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$$

of periods 1 or 3; 2 or 6; 3; 2 or 6, respectively. Hence no one of them is conjugate with the following substitution of the group:

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix} \qquad [j^2 \equiv j + 1 \pmod{2}],$$

having period 4. The group $H_{3,2,1}$ of order 72 is solvable.

25. Owing to the interest attached to the simple group $H_{3,3,1}$ of order 6048, a direct proof will be given of the theorem of § 24 for the case $m = 3$, $p^s = 3$. Incidentally, illustration is afforded of general methods to be employed later in the paper. As shown at the beginning of § 24, we may assume that, in the given substitution S,

(41) $\alpha_{11}^4 = 1,\ \alpha_{22}^4 = 1,\ \alpha_{33}^4 = 1,\ \alpha_{12}^4 + \alpha_{13}^4 = \alpha_{21}^4 + \alpha_{23}^4 = \alpha_{31}^4 + \alpha_{32}^4 = 0.$

By the hyperorthogonal conditions (1), we have

$$\alpha_{21}^4 + \alpha_{31}^4 = 0, \quad \alpha_{12}^4 + \alpha_{32}^4 = 0, \quad \alpha_{13}^4 + \alpha_{23}^4 = 0.$$

Since $\alpha_{13} \neq 0$, we have

(42) $\alpha_{13}^4 = \alpha_{32}^4 = \alpha_{21}^4 = \pm 1, \quad \alpha_{12}^4 = \alpha_{31}^4 = \alpha_{23}^4 = \mp 1.$

Tranforming S by

$$O_{1,3}^{\tau,0}\, O_{2,3}^{\sigma,0}: \qquad \xi_1' = \tau\xi_1,\ \xi_2' = \sigma\xi_2,\ \xi_3' = \tau^{-1}\sigma^{-1}\xi_3,$$

we obtain the substitution

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \tau\sigma^{-1}\alpha_{12} & \tau^2\sigma\alpha_{13} \\ \tau^{-1}\sigma\alpha_{21} & \alpha_{22} & \tau\sigma^2\alpha_{23} \\ \tau^{-2}\sigma^{-1}\alpha_{31} & \tau^{-1}\sigma^{-2}\alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}.$$

It is possible to choose τ and σ so that

$$\tau^4 = \sigma^4 = 1, \quad \tau\sigma^{-1}\alpha_{12} = 1, \quad \tau^{-2}\sigma^{-1}\alpha_{31} = 1.$$

In view of (42), we may satisfy the resulting conditions

$$\tau = \alpha_{12}/\alpha_{31}, \quad \sigma = \alpha_{12}^2/\alpha_{31}.$$

Hence S is conjugate within the group with the substitution

$$\sum = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 1 & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ 1 & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \quad \begin{bmatrix} \alpha_{11}^4 = \alpha_{22}^4 = \alpha_{33}^4 = 1 \\ \alpha_{23}^4 = 1,\ \alpha_{13}^4 = -1 \\ \alpha_{32}^4 = -1,\ \alpha_{21}^4 = -1 \end{bmatrix}.$$

By § 1, we have

$$\alpha_{22}^3 = \alpha_{11}\alpha_{33} - \alpha_{13}, \quad \alpha_{33}^3 = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}, \quad 1 = \alpha_{23} - \alpha_{13}\alpha_{22},$$
$$\alpha_{11}^3 = \alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{32}\alpha_{23}, \quad \alpha_{32}^3 = - \alpha_{11}\alpha_{23} + \alpha_{21}\alpha_{13}.$$

It follows readily that

$$\alpha_{13} = \alpha_{11}\alpha_{33} - \alpha_{22}^3, \quad \alpha_{21} = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{33}^3, \quad \alpha_{23} = \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33},$$
$$\alpha_{32} = \alpha_{11}^3 + \alpha_{22}\alpha_{33} = \alpha_{11}^3 - \alpha_{11}^2\alpha_{22}^3\alpha_{33}^3.$$

In particular, we have $\alpha_{11}^2\alpha_{22}^2\alpha_{33}^2 = -1$, so that

$$\alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} = -i \qquad (i^2 = -1).$$

Hence Σ takes the following form

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & 1 & \alpha_{11}\alpha_{33}(1-i) \\ \alpha_{33}^3(-1-i) & -i\alpha_{11}^3\alpha_{33}^3 & -i \\ 1 & \alpha_{11}^3(1-i) & \alpha_{33} \end{pmatrix} \quad (\alpha_{11}^4 = 1, \alpha_{33}^4 = 1),$$

satisfying the conditions (3) and (4) and having determinant unity. Since α_{11} and α_{33} have only the values ± 1, $\pm i$, at least one of the diagonal terms in Σ is $\pm i$. If $\alpha_{11} = -i$, $\alpha_{33} = -i$, then

$$-i\alpha_{11}^3\alpha_{33}^3 = +i.$$

Hence at least one of the diagonal terms is $+i$. By an evident transformation within the group, we obtain a conjugate substitution of the above form with $\alpha_{11} = i$. Then $\alpha_{22} = -\alpha_{33}^3$. If $\alpha_{33} = \pm 1$, then $\alpha_{22} = \mp 1$ and either Σ itself or its transform by $O_{2,3}^{0,1}$ will have $\alpha_{33} = 1$, $\alpha_{22} = -1$. If $\alpha_{33} = \pm i$, then $\alpha_{22} = \pm i$. Hence Σ is conjugate with one of the three types:

$$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} i & 1 & 1+i \\ -1-i & -1 & -i \\ 1 & -1-i & 1 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_\pm = \begin{pmatrix} i & 1 & \mp 1 \pm i \\ \mp 1 \pm i & \pm i & -i \\ 1 & -1-i & \pm i \end{pmatrix}.$$

The sum of the diagonal terms is different in the three substitutions and therefore their characteristic determinants are different. Hence no two are conjugate.

For Σ_1, the characteristic equation has the roots i, $i-1$, $-i+1$. Taking $x = i$, the quantities (27) are seen to equal 1, 1, $i+1$ respectively. The sum of their fourth powers is unity in the field. Hence Σ_1 multiplies the function

$$\sum_{j=1}^{3} A_j \xi_j \equiv \xi_1 + \xi_2 + (i+1)\xi_3 \qquad (\Sigma A_j^4 = 1)$$

by i. Hence Σ_1 is conjugate within $H_{3,3,1}$ with a substitution which replaces ξ_1 by $i\xi_1$.

The characteristic equation of Σ_- has the roots $-i, i+1, -i-1$. Taking $x = -i$, we determine by § 16 the quantities

$$A_1 = i+1, \quad A_2 = i, \quad A_3 = 1, \qquad \sum_{j=1}^{3} A_j^4 = 1,$$

by observing that the determinants (27) equal $1, -i-1, i-1$ respectively and then setting $\varrho = i+1$. We may verify that Σ_- multiplies

$$\sum_{j=1}^{3} A_j \xi_j \equiv (i+1)\xi_1 + i\xi_2 + \xi_3$$

by $-i$. Hence Σ_- is conjugate with a substitution of the group which replaces ξ_1 by $-i\xi_1$.

The characteristic equation of Σ_+ has a triple root $+1$. Since $x = 1$, the quantities (27) equal $-i, -1, 1$ respectively. Hence

$$A_1^4 + A_2^4 + A_3^4 = 0.$$

Hence Σ_+ is not conjugate within the group with a substitution which multiplies ξ_1 by a constant.

For Σ_- the quantity A_{11} of § 24 takes the form

$$A_{11} = i + \lambda^3\mu(i-1) + \lambda\mu^3.$$

We seek to determine solutions λ, μ of $\lambda^4 + \mu^4 = 1$ such that $A_{11}^4 \neq 1$. The value $\lambda = 0$ is evidently not suitable, likewise for $\mu = 0$. Hence must $\lambda^4 \equiv \mu^4 \equiv -1 \pmod{3}$. Then $A_{11} A_{11}^3$ equals

$$1 + \lambda\mu\{\lambda^2(1-i) + \mu^2(1+i) - \lambda\mu\}.$$

The expression in brackets vanishes for at most two values of the ratio λ/μ. The desired solutions therefore exist. For $\lambda = \mu$, we have $A_{11} = 0$.

26. Consider a substitution (α_{ij}) of $H_{3,p,s}$ in which $\alpha_{13} = 0$. By § 1,

$$\alpha_{21}^{p^s} = -\alpha_{12}\alpha_{33}, \quad \alpha_{22}^{p^s} = \alpha_{11}\alpha_{33}, \quad \alpha_{31}^{p^s} = \alpha_{12}\alpha_{23}, \quad \alpha_{32}^{p^s} = -\alpha_{11}\alpha_{23}.$$

Hence S takes the form $\left(\text{where } \bar{\alpha}_{ij} \equiv \alpha_{ij}^{p^s}\right)$:

$$S = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 \\ -\bar{\alpha}_{12}\bar{\alpha}_{33} & \bar{\alpha}_{11}\bar{\alpha}_{33} & \alpha_{23} \\ \bar{\alpha}_{12}\bar{\alpha}_{23} & -\bar{\alpha}_{11}\bar{\alpha}_{23} & \alpha_{33} \end{pmatrix},$$

the hyperorthogonal conditions reducing to the two*)

(43) $$\alpha_{11}^{p^s+1} + \alpha_{12}^{p^s+1} = 1, \quad \alpha_{23}^{p^s+1} + \alpha_{33}^{p^s+1} = 1.$$

For example, the determinant of S equals the product of the two sums in the left numbers of (43) and hence is unity.

*) Notice that $S \equiv O_{2,3}^{\bar{\alpha}_{33},\alpha_{23}}\, O_{1,2}^{\alpha_{11},\alpha_{12}}$.

The characteristic equation of S is (§ 14)

$$x^3 - x^2\sigma + x\sigma^{p^s} - 1 = 0, \quad \sigma \equiv \alpha_{11} + \bar{\alpha}_{11}\bar{\alpha}_{33} + \alpha_{33}. \tag{44}$$

If either $\alpha_{12} = 0$ or $\alpha_{23} = 0$, S multiplies one index by a constant. Suppose next that $\alpha_{12} \neq 0$, $\alpha_{23} \neq 0$ and consider the conditions under which S is conjugate within $H_{3,p,s}$ with a substitution which multiplies an index by a constant. In order that S shall multiply

$$\omega \equiv A_1\xi_1 + A_2\xi_2 + A_3\xi_3$$

by x, we must have (§ 16)

$$A_1 : A_2 : A_3 = x\bar{\alpha}_{12}\bar{\alpha}_{23} : \bar{\alpha}_{23} - x\bar{\alpha}_{11}\bar{\alpha}_{23} : x^2 - x(\alpha_{11} + \bar{\alpha}_{11}\bar{\alpha}_{33}) + \bar{\alpha}_{33},$$

since $\bar{\alpha}_{12}\bar{\alpha}_{23} \neq 0$ by hypothesis and hence not all the second minors A_1, A_2, A_3 vanish. If the sum

$$\delta \equiv A_1^{p^s+1} + A_2^{p^s+1} + A_3^{p^s+1}$$

has a value different from zero, it may be made equal to unity by a proper choice of the factor of proportionality. If also

$$x^{p^s+1} = 1, \tag{45}$$

the function ω may be introduced as a new index by a transformation of indices representing a hyperorthogonal substition. Hence, if (44) has a root x which satisfies (45) and makes $\delta \neq 0$, the substitution S is conjugate within the group with a substitution multiplying ξ_1 by x. If every such root x makes $\delta = 0$, the conjugacy fails. We examine the latter case. For a root x of (44) which satisfies (45) and makes $\delta = 0$, we have

$$\alpha_{12}^{p^s+1}\alpha_{23}^{p^s+1} + \alpha_{23}^{p^s+1}(1 - x\bar{\alpha}_{11})(1 - x^{-1}\alpha_{11})$$
$$+ [x^2 - x(\alpha_{11} + \bar{\alpha}_{11}\bar{\alpha}_{13}) + \bar{\alpha}_{33}]^{p^s+1} = 0.$$

Expanding this equation and applying (43), we get

$$x^2\alpha_{33} + x^{-2}\bar{\alpha}_{33} - 2x(\bar{\sigma} - \bar{\alpha}_{33}) - 2x^{-1}(\sigma - \alpha_{33}) + \sigma\bar{\sigma} - \sigma\bar{\alpha}_{33} - \bar{\sigma}\alpha_{33} + 3 = 0.$$

Replacing x^2 and x^{-2} by the values derived by multiplying (44) by x^{-1} and x^{-2}, we get

$$Vx + V^{p^s}x^{-1} + W = 0, \tag{46}$$

$$V \equiv \sigma\alpha_{33} - 2\bar{\sigma} + 3\bar{\alpha}_{33}, \quad W \equiv \sigma\bar{\sigma} - 2\sigma\bar{\alpha}_{33} - 2\bar{\sigma}\alpha_{33} + 3.$$

The condition that (44) and (46) shall have a common root is that their resultant shall vanish, viz:

$$V^3 + \bar{V}^3 + \sigma^2 V\bar{V}^2 + \bar{\sigma}^2 V^2\bar{V} - 2\sigma V^2\bar{V} - 2\bar{\sigma} V\bar{V}^2 - 3WV\bar{V}$$
$$+ \bar{\sigma}V^2W + \sigma\bar{V}^2W + \sigma VW^2 + \bar{\sigma}\bar{V}W^2 + \sigma\bar{\sigma}V\bar{V}W + W^3 = 0$$

where $\bar{V} \equiv V^{p^s}$. Substituting the values of V and W and setting

$$a \equiv \alpha_{33}, \quad b = \alpha_{33}^3 + \bar{\alpha}_{33}^3 - 3\alpha_{33}\bar{\alpha}_{33} + 1, \quad c \equiv \bar{\alpha}_{33} - 2\alpha_{33}^2 + \alpha_{33}\bar{\alpha}_{33}^2,$$

the condition takes the following form:

$$\begin{aligned} &-a\sigma^4\bar{\sigma}^2 - \bar{a}\bar{\sigma}^4\sigma^2 + 4a\sigma^5 + 4\bar{a}\bar{\sigma}^5 + (4\bar{a}-c)\sigma^3\bar{\sigma}^2 + (4a-\bar{c})\bar{\sigma}^3\sigma^2 \\ &-(1+a\bar{a})(4\bar{\sigma}^4\sigma + 4\sigma^4\bar{\sigma} - \sigma^3\bar{\sigma}^3) + 4c\sigma^4 + 4\bar{c}\bar{\sigma}^4 + (18+18a\bar{a}-b)\sigma^2\bar{\sigma}^2 \\ &+(4c-18\bar{a})\bar{\sigma}^3\sigma + (4\bar{c}-18a)\sigma^3\bar{\sigma} + 4b\sigma^3 + 4b\bar{\sigma}^3 - 18c\sigma^2\bar{\sigma} - 18\bar{c}\bar{\sigma}^2\sigma \\ &+27a\sigma^2 + 27\bar{a}\bar{\sigma}^2 - (18b+27a\bar{a}+27)\sigma\bar{\sigma} + 27c\sigma + 27\bar{c}\bar{\sigma} + 27b = 0. \end{aligned}$$

For the special case $\alpha_{11} = 0$, whence $\sigma = a$, the left number was observed to have the factors $(1-a\bar{a})^2$ and

$$(47) \qquad 4\sigma^3 + 4\bar{\sigma}^3 - \sigma^2\bar{\sigma}^2 - 18\sigma\bar{\sigma} + 27.$$

Likewise in the general case, the expression (47) is found to be a factor, the other factor being

$$(48) \qquad a\sigma^2 + \bar{a}\bar{\sigma}^2 - (1+a\bar{a})\sigma\bar{\sigma} + c\sigma + \bar{c}\bar{\sigma} + b.$$

The expression (48) may be written in the form

$$(\sigma - \bar{a}\bar{\sigma} + \bar{a}^2 - a)(-\bar{\sigma} + a\sigma - a^2 + \bar{a}) + (1-a\bar{a})^2.$$

Employing the value of σ given by (44), we find that

$$\sigma - \bar{a}\bar{\sigma} + \bar{a}^2 - a \equiv \alpha_{11}(1-a\bar{a}), \quad a \equiv \alpha_{33}.$$

Hence the expression (48) equals

$$(1-\alpha\bar{\alpha}_{11})(1-\alpha_{33}\bar{\alpha}_{33})^2.$$

If it vanished, either $\alpha_{12} = 0$ or else $\alpha_{23} = 0$ by (43), contrary to hypothesis. Hence the expression (48) is not zero. Hence must the expression (47) vanish. We proceed to prove that (47) is the discriminant of equation (44). By Sylvester's dialytic method, the eliminant of (44) and the equation derived by differentiation

$$(49) \qquad 3x^2 - 2\sigma x + \bar{\sigma} = 0$$

is found to be the expression (47). Without having recourse to differentiation, but employing methods valid for the Galois field theory, we may prove that a double root of (44) must satisfy equation (49). A double root x_1 must belong to the $GF[p^{2s}]$, to which the coefficients belong. Moreover, $x_1^{p^s+1} = 1$. Indeed, by § 14, $x_1^{-p^s}$ is a root of (44) and therefore equal to x_1 or x_1^{-2}. If the second alternative holds, then $x_1^{p^s-1} = x_1$, so that, by raising to the power p^s+1, we have $1 = x_1^{p^s+1}$. From the relations between the roots and the coefficients of (44), we get

$$2x_1 + x_1^{-2} = \sigma, \quad x_1^2 + 2x_1^{-1} = \bar{\sigma}.$$

The second may be derived by raising the first to the power p^s. From the first, $2x^3 + 1 = \sigma x^2$. Eliminating x^3 by means of (44), we find that $\sigma x^2 - 2\bar{\sigma}x + 3 = 0$. Raising it to the power p^s, we get (49).

A common root x_1 of equations (44) *and* (45) *makes $\delta = 0$ if, and only if, x_1 be a double root of* (44).

To complete the investigation, we examine the case in which (44) has a double root x_1*). As shown above x_1, and hence also x_1^{-2}, satisfies $x^{p^s+1} = 1$. If x_1^{-2} differs from x_1, it is a simple root of (44) and therefore does not make $\delta = 0$. In this case S is conjugate with a substition multiplying one index by x_1^{-2}. Hence the conjugacy fails only in the two cases: first, when (44) has no root satisfying (45); second, when (44) has a triple root, necessarily a root of (45). We proceed to prove that, in the first case, (44) is irreducible in the $GF[p^{2s}]$.

By § 18, equation (44) can not have an irreducible quadratic factor belonging to the $GF[p^{2s}]$. Hence (44) is either an irreducible cubic or decomposes into three linear factors. *In the latter case at least one root satisfies equation* (45). Denoting the roots by x_1, x_2, x_3, it follows from § 14 that $x_1^{-p^s}, x_2^{-p^s}, x_3^{-p^s}$ are likewise roots. If $x_1^{-p^s} \neq x_1$, we may set $x_2 = x_1^{-p^s}$. Then $x_2^{-p^s} = x_1^{p^{2s}} = x_1$. Hence must $x_3^{-p^s} = x_3$.

Incorporating the result of § 24, we have the final theorem:

Within the group $H_{3,p,s}$, $p^s > 2$, a substitution whose characteristic determinant is neither an irreducible cubic nor a perfect cube in the $GF[p^{2s}]$ is conjugate with a substitution multiplying one index by a constant.

27. A substitution of $H_{3,p,s}$ which multiplies ξ_1 by a constant may be given the form (see beginning of § 26):

$$[\mu, \alpha, \beta] \equiv \begin{pmatrix} \mu^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & -\mu\beta^{p^s} & \mu\alpha^{p^s} \end{pmatrix} \quad (\mu^{p^s+1} = 1,\ \alpha^{p^s+1} + \beta^{p^s+1} = 1).$$

It has the characteristic determinant

$$(50) \qquad \Delta(x) \equiv (x - \mu^{-1})\left\{x^2 - x(\alpha + \mu\alpha^{p^s}) + \mu\right\}.$$

Transforming this substitution by $O_{1,3}^{\tau,0}$, we obtain $[\mu, \alpha, \tau\beta]$. Since τ may be any root of $\tau^{p^s+1} = 1$, the substitutions $[\mu, \alpha, \beta]$, in which μ and α are fixed marks, are all conjugate within $H_{3,p,s}$.

By § 26, a substitution S of the group whose characteristic determinant $\Delta(x)$ is neither an irreducible cubic nor a perfect cube in the $GF[p^{2s}]$ is conjugate with a substitution of the form $[\mu, \alpha, \beta]$ in which μ^{-1} is a simple root of $\Delta(x) = 0$. A second substitution conjugate with S must have the same characteristic determinant $\Delta(x)$ and is therefore conjugate within the group with a substitution $[\mu, A, B]$ where

*) For $p = 3$, $\sigma \neq 0$, the roots are $-\bar{\sigma}\sigma^{-1}$, $-\bar{\sigma}\sigma^{-1}$ and $\sigma - \bar{\sigma}\sigma^{-1}$.

$$A^{p^s+1}+B^{p^s+1}=1.$$

By (50), they have the same $\Delta(x)$ if, and only if,

(51) $$\alpha+\mu\alpha^{p^s}=A+\mu A^{p^s}.$$

Hence $A-\alpha$ must be a root x of

(52) $$\mu x^{p^s}+x=0.$$

Raising the latter to the power p^s and multiplying the resulting equation by μ, we find that $x^{p^{2s}}+\mu x^{p^s}=0$. Hence (52) has p^s roots in the $GF[p^{2s}]$.

We proceed to determine a set of conditions necessary and sufficient for the conjugacy of $[\mu, \alpha, \beta]$ and $[\mu, A, B]$ within the group $H_{3,p,s}$. The investigation will also determine the number and form of the substitutions commutative with $[\mu, \alpha, \beta]$. We seek the conditions under which the ternary substitution $\Sigma\equiv(\alpha_{ij})$ will transform $[\mu, \alpha, \beta]$ into $[\mu, A, B]$. The conditions for the identity

$$[\mu, \alpha, \beta]\Sigma=\Sigma[\mu, A, B]$$

are the following (where $\bar{\alpha}\equiv\alpha^{p^s}, \cdots$):

(53) $$(1-\mu\alpha)\alpha_{12}+\bar{\beta}\mu^2\alpha_{13}=0, \quad \beta\mu\alpha_{12}-(1-\mu^2\bar{\alpha})\alpha_{13}=0,$$

(54) $$(1-\mu A)\alpha_{21}-B\mu\alpha_{31}=0, \quad \bar{B}\mu^2\alpha_{21}+(1-\mu^2\bar{A})\alpha_{31}=0,$$

(55) $$(\alpha-A)\alpha_{22}=\bar{\beta}\mu\alpha_{23}+B\alpha_{32},$$

(56) $$(\bar{\alpha}-\bar{A})\alpha_{33}=-\bar{B}\alpha_{23}-\beta\mu^{-1}\alpha_{32},$$

(57) $$\beta\alpha_{22}-B\alpha_{33}+(\mu\bar{\alpha}-A)\alpha_{23}=0,$$

(58) $$\mu\bar{B}\alpha_{22}-\mu\bar{\beta}\alpha_{33}+(\alpha-\mu\bar{A})\alpha_{32}=0.$$

The determinant of the coefficients of α_{12}, α_{13} in (53) equals

$$-\mu^3+\mu^2\bar{\alpha}+\mu\alpha-1\neq 0,$$

since μ^{-1} is not a double root of $\Delta(x)=0$ given by (50). Similarly the determinant of the coefficients in (54) is

$$\mu^3-\mu^2\bar{A}-\mu A+1\neq 0.$$

Hence $\alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{21}, \alpha_{31}$ are all zero. Hence Σ becomes

$$\Sigma_1=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & 0 & 0\\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\ 0 & -\alpha_{11}^{-1}\bar{\alpha}_{23} & \alpha_{11}^{-1}\bar{\alpha}_{22}\end{pmatrix}$$

subject to the hyperorthogonal conditions

(59) $$\alpha_{11}^{p^s+1}=1, \quad \alpha_{22}^{p^s+1}+\alpha_{23}^{p^s+1}=1.$$

Then conditions (55) and (57) take the respective forms

$$(60)\qquad (\alpha - A)\alpha_{22} = \bar{\beta}\mu\alpha_{23} - B\bar{\alpha}_{11}\bar{\alpha}_{23},$$

$$(61)\qquad (A - \mu\bar{\alpha})\alpha_{23} = \beta\alpha_{22} - B\bar{\alpha}_{11}\bar{\alpha}_{22}.$$

Conditions (56) and (58) may be derived from (60) and (61) respectively by raising them to the powers p^s. We observe from (51) that

$$(62)\qquad C^{p^s} = -\mu^{-1}C,\quad C \equiv A - \mu\alpha^{p^s}.$$

If $C = 0$, conditions (59), (60), (61) are satisfied by*)

$$\alpha_{22} = 0,\quad \alpha_{23} = 1,\quad \alpha_{11} = \frac{B}{\mu\bar{\beta}}.$$

Hence $[\mu, \alpha, \beta]$ is conjugate with every $[\mu, \mu\bar{\alpha}, B]$ in which $B\bar{B} = \beta\bar{\beta}$. This result is directly proved by observing that

$$O_{2,3}^{0,1}:\quad \xi_1' = \xi_1,\quad \xi_2' = \xi_3,\quad \xi_3' = -\xi_2$$

transforms $[\mu, \alpha, \beta]$ into $[\mu, \mu\bar{\alpha}, \mu\bar{\beta}]$. At the beginning of the section, the latter substitution was shown to be conjugate with $[\mu, \mu\bar{\alpha}, B]$.

For $C \neq 0$, we substitute the value of α_{23} given by (61) into the relation (60) and apply (62) and obtain the condition:

$$(\alpha - A)C\alpha_{22} = \mu(\beta\bar{\beta} - B\bar{B})\alpha_{22}.$$

But by (51) and the relations between α, β and A, B, we have

$$0 = (A + \mu\bar{A} - \alpha - \mu\bar{\alpha})A = A^2 - \alpha A - \mu\bar{\alpha}A + \mu - \mu B\bar{B}$$
$$= \mu\beta\bar{\beta} - \mu B\bar{B} - (\alpha - A)(A - \mu\bar{\alpha}).$$

Hence (60) follows from (61) and (51) and may be dropped.

Since $C \neq 0$, we have $\alpha_{22} \neq 0$, so that (61) may be written

$$(63)\qquad \beta - C\alpha_{23}/\alpha_{22} = B\bar{\alpha}_{11}\alpha_{22}^{p^s-1}.$$

Raising this to the power $p^s + 1$ and setting $y \equiv \alpha_{23}/\alpha_{22}$, we get

$$(64)\qquad (\beta - Cy)(\bar{\beta} + \mu^{-1}Cy^{p^s}) = B^{p^s+1},$$

if α_{22} belongs to the $GF[p^{2s}]$. As at the beginning of the section, B need be determined only up to a factor τ for which $\tau^{p^s+1} = 1$. Hence (64) may be taken in place of condition (63). Then (50) becomes

$$(65)\qquad y^{p^s+1} + 1 = \alpha_{22}^{-p^s-1}.$$

If there be a root y of (64) which belongs to the $GF[p^{2s}]$ and makes $y^{p^s+1} + 1 \neq 0$, then (65) determines marks α_{22} in the field, when y gives the corresponding values of α_{23}. Upon simplification, (64) may be written

$$(66)\qquad C^2y^{p^s+1} - \beta Cy^{p^s} + \bar{\beta}\mu Cy + \mu\alpha\bar{\alpha} - \mu A\bar{A} = 0.$$

---

*) If also $\beta = 0$, $A\bar{A} = \alpha\bar{\alpha} = 1$ requires that $B = 0$. If $A \neq \alpha$, we take $\alpha_{22} = 0$, $\alpha_{23} = 1$.

Raising this to the power p^s and multiplying by μ^2, we get

$$C^2 y^{p^{2s}+p^s} + \bar\beta\mu C y^{p^{2s}} - \beta C y^{p^s} + \mu\alpha\bar\alpha - \mu A\bar A = 0.$$

Subtracting (66), we find that

$$(y^{p^{2s}} - y)(C^2 y^{p^s} + \bar\beta\mu C) = 0.$$

If the first factor is not zero, then $y^{p^s} = -\bar\beta\mu C^{-1}$, when (66) gives

$$\mu\beta\bar\beta + \mu\alpha\bar\alpha - \mu A\bar A = 0,$$

whence $A\bar A = 1$, so that $B = 0$. Hence, if $B \neq 0$, every root of (66) belongs to the $GF[p^{2s}]$. If every root of (66) makes $y^{p^s+1} + 1 = 0$, then must $\beta = 0$, $\mu\alpha\bar\alpha - \mu A\bar A = C^2$, whence $\mu B\bar B = C^2$. But

$$\mu B\bar B - \mu\beta\bar\beta = (A - \alpha)(A - \mu\bar\alpha). \tag{67}$$

In the present case, $\beta = 0$, so that $C^2 = (A - \alpha)C$. Hence $\alpha = \mu\bar\alpha$. Then $\alpha\bar\alpha = 1$ gives $\alpha^2 = \mu$. The roots of (50) are now α, α, α^{-2}, so that $\alpha^3 \neq 1$. Since $C \neq 0$, we have $A \neq \alpha$. That the substitutions $[\mu, \alpha, \beta]$ and $[\mu, A, B]$ are not conjugate in the present case is evident.

There remains the case $B = 0$, $y^{p^s} = -\bar\beta\mu C^{-1}$. By (63), $y = \beta C^{-1}$. Then $y^{p^s+1} + 1 = 0$ only when $\mu\beta\bar\beta = C^2$. By (67), $A = \mu\bar A$. As before, the two substitutions are not conjugate.

For the case $\beta = 0$ and $\alpha = \mu\bar\alpha$, the equation $A + \mu A^{p^s} = 2\alpha$ has p^s roots in the $GF[p^{2s}]$. Indeed, by raising its members to the power p^s and multiplying the resulting equation by μ, we get

$$A^{p^{2s}} + \mu A^{p^s} = 2\bar\alpha\mu = 2\alpha.$$

Hence $A^{p^{2s}} = A$. For the root $A = \alpha$, we have $B = 0$, so that

$$[\mu, \alpha, \beta] \equiv [\mu, A, B].$$

The remaining $p^s - 1$ roots A lead to as many conjugate substitutions $[\mu, A, B]$, none of which are conjugate with $[\mu, \alpha, 0]$, $\alpha = \mu\bar\alpha$.

Within the group $H_{3,p,s}$ two substitutions having a common characteristic equation $\Delta(x) = 0$, which is reducible in the $GF[p^{2s}]$ but has no double root, are conjugate. The substitutions for which $\Delta(x) = 0$ has a simple root μ^{-1} and a double root δ are conjugate with one of the substitutions

$$\xi_1' = \delta^{-2}\xi_1, \quad \xi_2' = \delta\xi_2, \quad \xi_3' = \delta\xi_3 \quad (\delta^{p^s+1} = 1,\ \delta^3 \neq 1), \tag{68}$$

$$[\mu, \alpha, \beta],\ \alpha + \mu\alpha^{p^s} = 2\delta,\ \mu = \delta^2,\ \alpha \neq \delta,\ \delta^3 \neq 1,\ \alpha^{p^s+1} + \beta^{p^s+1} = 1. \tag{69}$$

28. To determine the substitutions Σ commutative with $[\mu, \alpha, \beta]$, when μ^{-1} is a simple root of $\Delta(x) = 0$, we have only to set $A = \alpha$, $B = \beta$ in the conditions (53)—(58). By (53) and (54), α_{12}, α_{13}, α_{21}, α_{31}

are zero. Then Σ takes the form Σ_1 subject only to the conditions (59) and the following special forms of (60) and (61):

(70) $$\bar{\beta}\mu\alpha_{23} = \beta\bar{\alpha}_{11}\bar{\alpha}_{23}, \quad C\alpha_{23} = \beta\alpha_{22} - \beta\bar{\alpha}_{11}\bar{\alpha}_{22} \quad (C \equiv \alpha - \mu\bar{\alpha}).$$

Suppose first that $C = 0$. If $\beta = 0$, the conditions reduce to (59), so that the number of substitutions Σ_1 is $(p^s+1)(p^{2s}-1)p^s$ (*Annalen*, p. 568). Let $\beta \neq 0$. For $\alpha_{22} = 0$, there are p^s+1 values of α_{23} satisfying $\alpha_{23}^{p^s+1} = 1$, each of which determines $\alpha_{11} = \frac{\beta}{\mu\bar{\beta}}\alpha_{23}^{p^s-1}$ so that $\alpha_{11}^{p^s+1} = 1$; there results p^s+1 substitutions Σ_1. For $\alpha_{22} \neq 0$, conditions (70) give

$$\alpha_{11} = \alpha_{22}^{p^s-1}, \quad \bar{\beta}\mu\left(\frac{\alpha_{23}}{\alpha_{22}}\right) = \beta\left(\frac{\alpha_{23}}{\alpha_{22}}\right)^{p^s}.$$

If α_{22} be determined in the $GF[p^{2s}]$, the first relation gives $\alpha_{11}^{p^s+1} = 1$. The second relation and the last relation (59) may be written

(71) $$y^{p^s} = \mu\beta^{p^s-1}y, \quad y^{p^s+1} + 1 = \alpha_{22}^{-p^s-1} \qquad (y \equiv \alpha_{23}/\alpha_{22}).$$

For $y = 0$, we obtain p^s+1 marks α_{22} in the $GE[p^{2s}]$ and therefore p^s+1 substitutions Σ_1. For $y \neq 0$, there exists a common solution of

$$y^{p^s-1} = \mu\beta^{p^s-1}, \quad y^{p^s+1} + 1 = 0$$

only when

(72) $$(-\mu\beta^{p^s-1})^{(p^s+1)/2} = -1.$$

We suppose that $p > 2$, since for $p = 2$ (72) imposes no condition on μ and β. For $\alpha = 0$, then $\beta^{p^s+1} = 1$ and (72) requires that the power $(p^s+1)/2$ of $-\mu$ shall be -1, so that a root of $x^2 + \mu = 0$ satisfies $x^{p^s+1} = -1$. If (72) is not satisfied, its left member equals $+1$, so that $x^{p^s+1} = 1$. For $\alpha \neq 0$, $C=0$ gives $\mu = \alpha^{-p^s+1}$, so that (72) requires that

$$(\beta/\alpha)^{(p^{2s}-1)/2} = (-1)^{(p^s-1)/2}.$$

Since $\alpha = \mu\bar{\alpha}$, the equation [see (50)]

(73) $$x^2 - x(\alpha + \mu\bar{\alpha}) + \mu = 0$$

may be written in the forms

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{\alpha}\right) + \alpha^{-p^s-1} = 0, \quad \left(\frac{x}{\alpha} - 1\right)^2 = -\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{p^s+1}.$$

Hence (72) is satisfied if, and only if, x/α belongs to the $GF[p^s]$, viz.

$$x^{p^s-1} = \alpha^{p^s-1} = \mu^{-1}.$$

If the root (§ 14) x^{-p^s} of $\Delta(x) = 0$ differs from x, the product $x^{-p^s}x = \mu$. But if $x^{-p^s} = x$, the second*) root μ/x of (73) differs from x^{-p^s}, whence $x^{-p^s+1} \neq \mu$. Hence (72) is satisfied if, and only if, $x^{p^s+1} \neq 1$. According

*) In the present case, $\beta \neq 0$, $\alpha = \mu\bar{\alpha}$, $p \neq 2$, (73) has no double root.

as (72) is satisfied or not, there are $(p^s-2)(p^s+1)$ or $p^s(p^s+1)$ sets of solutions y, α_{22} in the $GF[p^{2s}]$ of equations (71). Including the result for $\alpha_{22}=0$, *we find for $p>2$ that $[\mu, \alpha, \beta]$, $\alpha\equiv\mu\bar{\alpha}$, $\beta\neq 0$, is commutative with $(p^s+1)^2$ or $p^{2s}-1$ substitutions according as the roots of* (73) *satisfy*

$$(74) \qquad x^{p^s+1}=1$$

or do not; for $p=2$, the first alternative always holds true. Each substitution (68) *is commutative with $(p^s+1)(p^{2s}-1)p^s$ substitutions.*

Suppose next that $C\neq 0$. For $\beta=0$, (70) gives $\alpha_{23}=0$. Then α_{11} and α_{22} are arbitrary roots of (74). Hence there are $(p^s+1)^2$ commutative substitutions. Let $\beta\neq 0$. If $\alpha_{23}=0$, we have

$$\alpha_{11}=\alpha_{22}^{p^s-1},\quad \alpha_{11}^{p^s+1}=1,\quad \alpha_{22}^{p^s+1}=1,$$

leading to p^s+1 substitutions Σ_1. Assume henceforth that $\alpha_{23}\neq 0$. The first relation (70) is seen to be a consequence of the second. The former gives

$$\alpha_{11}=\mu^{-1}\beta^{-p^s+1}\alpha_{23}^{p^s-1},$$

so that, if α_{23} be determined in the $GF[p^{2s}]$, $\alpha_{11}^{p^s+1}=1$ will be satisfied. The remaining relations under (59) and (70) may be written

$$(75) \qquad (\beta^{-1}Cw)^{p^s+1}+1=\alpha_{23}^{-p^s-1},\quad 1=w+w^{p^s}\quad \left(w=\frac{\beta}{C}\,\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{23}}\right).$$

The second equation has p^s roots w in the $GF[p^{2s}]$. If a root w gives to the left number of the first equation (75) a value $\neq 0$, the latter determines p^s+1 marks α_{23} in the field. In the contrary case, w and w^{p^s} are the roots of the quadratic

$$(76) \qquad W^2-W-\left(\frac{\beta}{C}\right)^{p^s+1}=0,$$

whose coefficients belong to the $GF[p^s]$.

If (76) be irreducible in the $GF[p^s]$, and one root be designated by w, the second root is w^{p^s}. Hence only p^s-2 values of w lead to solutions of (75). The number of substitutions Σ_1 is thus

$$p^s+1+(p^s-2)(p^s+1).$$

If (76) be reducible, a root w makes $w+w^{p^s}=1$ only when $p>2$ and $w=1/2$, requiring $1/4=-(\beta C^{-1})^{p^s+1}$. Then, by (62),

$$C^2=4\mu\beta\bar{\beta},\quad (\alpha+\mu\bar{\alpha})^2=4\mu.$$

Hence (73) has a double root $\mu^{1/2}$. According as the reducible equation (76) has equal or distinct roots in the $GF[p^s]$, the number of commutative substitutions is $p^s(p^s+1)$ or $(p^s+1)^2$.

Equation (76) *is reducible in the* $GF[p^s]$ *if, and only if, the roots of* (73) *satisfy the condition* (74).

Indeed, (76) is transformed into (73) by setting

$$W=(\alpha-x)C^{-1}.$$

Then, if (76) be reducible, so that $W^{p^s}=W$, we have

$$\mu x^{p^s}+x=\mu\alpha^{p^s}+\alpha,$$

when (73) takes the form

$$\mu(x^{p^s+1}-1)=0.$$

Inversely, if a root x of (73) satisfies (74), then

$$x+\mu x^{-1}=x+\mu x^{p^s}=\alpha+\mu\alpha^{p^s},\quad W^{p^s}=W.$$

We may combine our results into the theorem:

A substitution $[\mu,\alpha,\beta]$ *whose characteristic equation has no double root is commutative with* $(p^s+1)^2$ *or* $p^{2s}-1$ *substitutions of* $H_{3,p,s}$ *according as every root or not every root satisfies* $x^{p^s+1}=1$. *For a double root* $\neq\mu^{-1}$, *the substitution is commutative with* $(p^s+1)(p^{2s}-1)p^s$ *or* $(p^s+1)p^s$ *substitutions according it has the form* (68) *or* (69).

29. Let d denote the greatest common divisor of p^s+1 and 3. There are p^s+1-d substitutions of type (68) and as many of type (69); none of these substitutions are conjugate within $H_{3,p,s}$.

We proceed to classify the non-conjugate substitutions $[\mu,\alpha,\beta]$ whose characteristic equations have no multiple roots. Let λ be a root of (73). Then λ^{-p^s} is also a root of (73), a result following from the equation obtained by raising (73) to the power p^s.

If $\lambda^{p^s+1}\neq 1$, then $\lambda^{-p^s}\neq\lambda$. The product λ^{-p^s+1} equals the constant term μ of (73). Then $\mu^{-1}\equiv\lambda^{p^s-1}$, λ, λ^{-p^s} are all distinct. Indeed, $\lambda^{p^s-1}=\lambda$ raised to the power p^s+1 gives $1=\lambda^{p^s+1}$; $\lambda^{p^s-1}=\lambda^{-p^s}$ raised to the power p^s gives $\lambda^{-p^s+1}=\lambda^{-1}$, whence $\lambda^{p^s+1}=1$. Hence every set of three marks λ, λ^{-p^s}, λ^{p^s-1} of the $GF[p^{2s}]$, such that $\lambda^{p^s+1}\neq 1$, leads to a characteristic determinant (50) having distinct roots, there being solutions α in the field for

$$\alpha+\mu\alpha^{p^s}=\lambda+\lambda^{-p^s},\quad \mu\equiv\lambda^{-p^s+1}.$$

The replacement of λ by λ^{-p^s} leads to the same characteristic equation, while any other replacement of λ does not. *There are*

$$\tfrac{1}{2}\{(p^{2s}-1)-(p^s+1)\}\equiv\tfrac{1}{2}(p^s+1)(p^s-2)$$

non-conjugate substitutions $[\mu, \alpha, \beta]$ *for which the roots of* (73) *are unequal and do not satisfy* (74).

If the roots of (73) satisfy (74), they are

$$\lambda, \ \mu\lambda^{-1} \qquad \left(\lambda^{p^s+1} = 1, \ \mu^{p^s+1} = 1\right).$$

They are distinct and differ from μ^{-1} if λ is not $\pm\mu^{1/2}$, μ^{-1} or μ^2. But $\lambda^2 = \mu$ requires that $\mu^{(p^s+1)/2} = 1$. We consider three cases. If $\mu^{(p^s+1)/2} = 1$ and $\mu^d \neq 1$, then $\mu^3 \neq 1$ and 4 or 3 values of λ must be excluded according as $p > 2$ or $p = 2$. If $\mu^d = 1$, 2 or 1 values of λ are to be excluded. If $p > 2$ and $\mu^{(p^s+1)/2} = -1$, then $\mu^d \neq 1$ and 2 values of λ are to be excluded. Hence if $p > 2$ there are

$$\left(\frac{p^s+1}{2} - d\right)(p^s-3) + d(p^s-1) + \left(\frac{p^s+1}{2}\right)(p^s-1) \equiv (p^s+1)(p^s-2) + 2d$$

sets of distinct roots. If $p = 2$, the number is

$$(2^s+1-d)(2^s-2) + d\,2^s \equiv (2^s+1)(2^s-2) + 2d.$$

Allowing for the 6 permutations of the roots, which lead to conjugate substitutions by § 27, we obtain the result:

There are $\frac{1}{6}(p^s+1)(p^s-2) + \frac{d}{3}$ *non-conjugate substitutions* $[\mu, \alpha, \beta]$ *whose characteristic equations have distinct roots satisfying* (74).

30. Suppose that $\Delta(x) = 0$ has a triple root μ^{-1}. By § 14, μ^{p^s} is a root, so that $\mu^{p^s+1} = 1$. Also $\mu^3 = 1$ and therefore $\mu^d = 1$, d being the greatest common divisor of 3 and $p^s + 1$.

For substitutions $[\mu, \alpha, \beta]$, equation (50) requires that

$$(77) \qquad \alpha + \mu\bar{\alpha} = 2\mu^2.$$

If $\beta = 0$, then $\alpha\bar{\alpha} = 1$, when (77) gives $\alpha = \mu^{-1}$. Then $[\mu, \alpha, \beta]$ multiplies each index by μ^{-1} and is therefore conjugate only with itself. Supposing $\beta \neq 0$, we have $\alpha - \mu^2 \neq 0$. The conditions that $\Sigma \equiv (\alpha_{ij})$ shall transform $[\mu, \alpha, \beta]$ into $[\mu, A, B]$, $B \neq 0$, are given by formulae (53)—(58), where now the second conditions of the sets (53) and (54) may be dropped. As in § 27, the two substitutions are conjugate if $A = \alpha$. Assuming that $\alpha - A \neq 0$, conditions (57) and (58) are seen to follow from (55) and (56). Although α_{12} and α_{13} are not necessarily zero, it will be found sufficient to choose them to be zero. Then $\alpha_{32} = -\bar{\alpha}_{11}\bar{\alpha}_{23}$, $\alpha_{33} = \bar{\alpha}_{11}\bar{\alpha}_{22}$ and Σ takes the form Σ_1. Condition (56) now follows from (55) by raising the latter to the power p^s. The conditions upon Σ_1 are therefore (59) and (55), the latter being reducible to (60). The proof in § 27 therefore leads to the result that *the substitutions* $[\mu, \alpha, \beta]$ *and* $[\mu, A, B]$, *connected by the relation* (51), *are conjugate within* $H_{3,p,s}$.

The conditions that Σ shall be commutative with $[\mu, \alpha, \beta]$, $\beta \neq 0$, are derived from (53)—(58) by setting $A = \alpha$, $B = \beta$, viz:

$$(1-\mu\alpha)\alpha_{12} + \bar{\beta}\mu^2\alpha_{13} = 0, \quad (1-\mu\alpha)\alpha_{21} - \beta\mu\alpha_{31} = 0,$$
$$\bar{\beta}\mu\alpha_{23} + \beta\alpha_{32} = 0, \quad \beta\alpha_{22} - \beta\alpha_{33} + (\mu\bar{\alpha}-\alpha)\,\alpha_{23} = 0.$$

It will be convenient to set

$$\sigma \equiv \bar{\beta}\mu/(\alpha-\mu^2).$$

In view of (77), we find that

$$\sigma^{p^s} = -\beta/(\alpha-\mu^2), \quad \sigma^{p^s+1} = -1.$$

The substitution Σ takes the form

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \sigma\alpha_{13} & \alpha_{13} \\ \sigma^{p^s}\alpha_{31} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & -\mu\beta^{p^s-1}\alpha_{23} & \alpha_{22}-2\sigma\alpha_{23} \end{pmatrix}.$$

Since $\mu^3 = 1$, the conditions (3) and (4) reduce to the following:

$$(78) \qquad \begin{cases} \alpha_{11}^{p^s+1} = 1, \quad -\alpha_{31}^{p^s+1} + \alpha_{22}^{p^s+1} + \alpha_{23}^{p^s+1} = 1, \\ \sigma\alpha_{11}\bar{\alpha}_{31} + \sigma\alpha_{13}\bar{\alpha}_{22} + \alpha_{13}\bar{\alpha}_{23} = 0, \end{cases}$$

$$\alpha_{31}^{p^s+1} + \alpha_{23}^{p^s+1} + (\alpha_{22}-2\sigma\alpha_{23})^{p^s+1} = 1,$$
$$\sigma\alpha_{31}^{p^s+1} - \mu\beta^{p^s-1}\bar{\alpha}_{22}\alpha_{23} + \alpha_{22}\bar{\alpha}_{23} - 2\sigma\alpha_{23}^{p^s+1} = 0.$$

Upon applying (78), the latter two reduce to

$$(\alpha_{22}-\sigma\alpha_{23})^{p^s+1} = 1.$$

Hence $\alpha_{22} = \sigma\alpha_{23} + \tau$, where $\tau^{p^s+1} = 1$. Observing that

$$\alpha - \mu\bar{\alpha} = 2(\alpha-\mu^2) = 2\beta\sigma, \quad \mu\beta^{p^s-1} = \sigma^2,$$

the determinant of S is found to be

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \sigma\alpha_{13} & \alpha_{13} \\ \sigma^{p^s}\alpha_{31} & \sigma\alpha_{23}+\tau & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & -\sigma^2\sigma_{23} & -\sigma\alpha_{23}+\tau \end{vmatrix} \equiv \alpha_{11}\tau^2.$$

Hence must $\alpha_{11} = \tau^{-2}$, whence $\alpha_{11}^{p^s+1} = 1$. Substituting the values of α_{11} and α_{22} in the second and third relations (78), we get

$$(79) \qquad \left(\frac{\sigma}{\tau}\,\alpha_{23}\right) + \left(\frac{\sigma}{\tau}\,\alpha_{23}\right)^{p^s} = \alpha_{31}^{p^s+1}, \quad \alpha_{13} = -\tau^{-1}\alpha_{31}^{p^s}.$$

The number of substitutions Σ commutative with $[\mu, \alpha, \beta]$, $\beta \neq 0$, is $p^{3s}(p^s+1)$. Indeed, α_{31} may be any one of the p^{2s} marks of the $GF[p^{2s}]$ and τ any one of the p^s+1 solutions of $\tau^{p^s+1} = 1$. Then α_{11} and α_{13}

are uniquely determined in the field. Equation (79) has p^s solutions α_{23} in the field, for each of which α_{22} is determined.

There are exactly d non-conjugate substitutions $[\mu, \alpha, \beta]$, $\beta \neq 0$, *whose characteristic equations have triple roots. Within* $H_{3,p,s}$ *each* $[\mu, \alpha, \beta]$ *is conjugate with* $(p^{3s}+1)(p^s-1)$ *substitutions. For* $\beta = 0$, *there are d substitutions each conjugate only with itself.*

31. It remains to consider hyperorthogonal substitutions not conjugate with substitutions multiplying one index by a constant. Set S be a substitution (α_{ij}) in which $\alpha_{13} = \alpha_{14} = \cdots = \alpha_{1m} = 0$, and $\alpha_{12} \neq 0$. If $\alpha_{11} = 0$, then $\alpha_{12}^{p^s+1} = 1$ and S may be transformed into a substitution S_1 which replaces ξ_1 by ξ_2 by means of the hyperorthogonal substitution $O_{1,2}^{\lambda,0}$, λ being a root of $\lambda^{p^s-1} = \alpha_{12}$. For $p^s = 2$, the hypothesis $\alpha_{12} \neq 0$ requires $\alpha_{11} = 0$ since the cube of every mark $\neq 0$ of the $GF[2^2]$ is unity, while

$$\alpha_{11}^{p^s+1} + \alpha_{12}^{p^s+1} = 1. \tag{80}$$

For $p^s > 2$, there remains the case $\alpha_{12} \neq 0$, $\alpha_{11} \neq 0$. To determine when S is conjugate within the group with a substitution S_1 replacing ξ_1 by ξ_2, we introduce new indices

$$X_1 \equiv \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \xi_i, \quad X_2 \equiv \sum_{i=1}^{m} \mu_i \xi_i.$$

The conditions that S shall replace X_1 by X_2 are

$$\mu_i = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ji} \lambda_j \qquad (i = 1, \cdots, m). \tag{81}$$

The transformation of indices may be made hyperorthogonal if (§ 3)

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^{p^s+1} = 1, \quad \sum_{i=1}^{m} \mu_i^{p^s+1} = 1, \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^{p^s} \mu_i = 0. \tag{82}$$

Since relations (81) define a hyperorthogonal substitution [Compare § 7], the second condition (82) is a consequence of the first one. Hence the conditions reduce to the following two:

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^{p^s+1} = 1, \quad \sum_{i,j}^{1,\cdots,m} \lambda_i^{p^s} \lambda_j \alpha_{ji} = 0. \tag{83}$$

We have therefore only two conditions upon the m marks λ_i of the $GF[p^{2s}]$*). Employing the abbreviations

$$\omega \equiv \sum_{j=2}^{m} \lambda_j \alpha_{j1}, \quad \sigma \equiv \sum_{i,j}^{2,\cdots,m} \lambda_i^{p^s} \lambda_j \alpha_{ji},$$

and eliminating $\lambda_1^{p^s+1}$ between equations (83), we get

$$(84) \qquad \lambda_1^{p^s} \omega + \lambda_1 \lambda_2^{p^s} \alpha_{12} + \sigma + \alpha_{11}\left(1 - \sum_{i=2}^{m} \lambda_i^{p^s+1}\right) = 0.$$

Multiplying (84) by τ, determined so that

$$(85) \qquad \tau\omega = \left(\tau \lambda_2^{p^s} \alpha_{12}\right)^{p^s},$$

the condition may be written

$$(86) \qquad y^{p^s} + y + z = 0,$$

where we have set

$$(87) \qquad y \equiv \tau \lambda_1 \lambda_2^{p^s} \alpha_{12}, \quad z \equiv \tau\sigma + \tau\alpha_{11}\left(1 - \sum_{i=2}^{m} \lambda_i^{p^s+1}\right).$$

Using the first equation (83) and (86), we see that y, y^{p^s} must be the roots of the quadratic equation

$$(88) \qquad Y^2 + zY + \left(\tau \lambda_2^{p^s} \alpha_{12}\right)^{p^s+1}\left(1 - \sum_{i=2}^{m} \lambda_i^{p^s+1}\right) = 0.$$

Inversely, if it be possible to determine marks $\tau, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ of the $GF[p^{2s}]$, $\lambda_2 \neq 0$, so that (85) is satisfied, so that z belongs to the $GF[p^s]$ and, lastly, so that (88) is irreducible in the $GF[p^s]$, then the roots of the latter may be taken to be y, y^{p^s} and the corresponding vatue of λ_1 will belong to the $GF[p^{2s}]$ and with $\lambda_2, \cdots, \lambda_m$ will satisfy (83).

The condition (85) may be written

$$(89) \qquad \alpha_{12}^{p^s} \tau^{p^s-1} = \alpha_{21} + \sum_{j=3}^{m} \alpha_{j1} \lambda_j \lambda_2^{-1} \equiv w.$$

Since τ must be a mark $\neq 0$ of the $GF[p^{2s}]$, the condition on $\lambda_2, \cdots, \lambda_m$ is

$$(90) \qquad \alpha_{12}^{p^s+1} = w^{p^s+1}.$$

*) If we define the $GF[p^{2s}]$ by means of a quadratic $\Theta^2 + \gamma\Theta + \delta = 0$ belonging to and irreducible in the $GF[p^s]$ and set $\lambda_i \equiv l_i + \Theta L_i$, $\alpha_{ij} \equiv a_{ij} = \Theta A_{ij}$, we obtain only three conditions of the second degree upon $2m$ variables l_j, L_i.

Eliminating τ^{p^s-1} from the condition given by $z^{p^s}=z$, we find

$$w\left[\sigma^{p^s}+\alpha_{11}^{p^s}\left(1-\sum_{i=2}^{m}\lambda_i^{p^s+1}\right)\right]=\alpha_{12}^{p^s}\left[\sigma+\alpha_{11}\left(1-\sum_{i=2}^{m}\lambda_i^{p^s+1}\right)\right].$$

Dividing by $\lambda_2^{p^s+1}$ and setting

$$v\equiv\sigma\lambda_2^{-p^s-1}-\alpha_{11}\sum_{i=2}^{m}(\lambda_i/\lambda_2)^{p^s+1}\equiv\sum_{i,j}^{2,\cdots,m}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_2}\right)^{p^s}\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_2}\right)\alpha_{ji}-\alpha_{11}\sum_{i=2}^{m}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_2}\right)^{p^s+1},$$

we obtain the condition for $z^{p^s}=z$ in the form

$$\lambda_2^{-p^s-1}=\frac{v\alpha_{12}^{p^s}-wv^{p^s}}{w\alpha_{11}^{p^s}-\alpha_{11}\alpha_{12}^{p^s}}. \tag{91}$$

We exclude the case in which the denominator vanishes. Raising the fraction to the power p^s and multiplying numerator and denominator by w, and afterwards applying (90), we get

$$\frac{wv^{p^s}\alpha_{12}-w^{p^s+1}v}{w^{p^s+1}\alpha_{11}-w\alpha_{11}^{p^s}\alpha_{12}}\equiv\frac{-\alpha_{12}\left(v\alpha_{12}^{p^s}-wv^{p^s}\right)}{-\alpha_{12}\left(w\alpha_{11}^{p^s}-\alpha_{11}\alpha_{12}^{p^s}\right)}.$$

Hence the condition that z shall belong to the $GF[p^s]$ merely determines $\lambda_2^{-p^s-1}$ as a function of $\lambda_3/\lambda_2,\cdots,\lambda_m/\lambda_2$ belonging to that field.

If $m>3$, the determination of the ratios $\lambda_3/\lambda_2,\cdots,\lambda_m/\lambda_2$ so that (90) is satisfied and (88) irreducible offers little difficulty.

For $m=3$, we have, as in § 26,

$$\alpha_{21}=-\bar{\alpha}_{12}\bar{\alpha}_{33},\quad \alpha_{31}=\bar{\alpha}_{12}\bar{\alpha}_{23}.$$

Setting $\varrho\equiv\lambda_3/\lambda_2$, we have $w=\bar{\alpha}_{12}(\varrho\bar{\alpha}_{23}-\bar{\alpha}_{33})$, so that (90) becomes

$$\varrho^{p^s+1}-\varrho^{p^s}\frac{\bar{\alpha}_{33}}{\bar{\alpha}_{23}}-\varrho\frac{\alpha_{33}}{\alpha_{23}}-1=0. \tag{92}$$

Raising it to the power p^s and substracting the result from (92), we find that either $\varrho^{p^{2s}}=\varrho$ or else $\varrho^{p^s}=\alpha_{33}/\alpha_{23}$. But, in the latter case, (92) requires $\alpha_{23}^{p^s+1}+\alpha_{33}^{p^s+1}=0$, in contradiction with (43). *Hence equation* (91) *has* p^s+1 *roots in the* $GF[p^{2s}]$. One root is seen to be*)

$$\varrho_1\equiv(\alpha_{11}+\bar{\alpha}_{11}\bar{\alpha}_{33})/\bar{\alpha}_{11}\bar{\alpha}_{23}.$$

The remaining p^s roots are given by the formula

$$\varrho=\varrho_1+\frac{\alpha_{11}}{R+\bar{\alpha}_{11}\bar{\alpha}_{23}},\quad R^{p^s}+R+1=0.$$

*) It is for this value of ϱ that the denominator of (91) vanishes.

For $m = 3$, we have

$$z = \tau(\alpha_{11} + v\lambda_2^{p^s+1}), \quad v \equiv \alpha_{22} - \alpha_{11} + \varrho^{p^s+1}(\alpha_{33} - \alpha_{11}) + \varrho\alpha_{32} + \varrho^{p^s}\alpha_{23}.$$

Setting $Z = Y/z$, (88) becomes $Z^2 + Z + f(R) = 0$. In general, the latter is not irreducible for all the p^s possible values of R. As in § 15, the cases $p = 2$ and $p \neq 2$ require separate treatment. If $\Delta(x) = 0$ has a triple root when $p = 2$, the substitutions replacing ξ_1 by ξ_2 leave ξ_3 fixed; this exceptional case is treated in § 36. Aside from this case, a substitution of $H_{3,p,s}$, not conjugate with a substitution multiplying one index by a constant, is conjugate with a substitution which replaces ξ_1 by ξ_2*).

32. A substitution of $H_{3,p,s}$ which replaces ξ_1 by ξ_2 has the form

$$[\alpha, \beta] \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\bar{\alpha} & 0 & \beta \\ \bar{\beta} & 0 & \alpha \end{pmatrix} \qquad (\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} = 1).$$

It is transformed into $[\alpha, \mu\lambda^{-1}\beta]$ by the substitution

$$M\colon \quad \xi_1' = \mu\xi_1, \quad \xi_2' = \mu\xi_2, \quad \xi_3' = \lambda\xi_3,$$

of determinant $\lambda\mu^2$. Taking $\lambda = \mu^{-2}$, we see that $[\alpha, \beta]$ is conjugate with $[\alpha, \mu^3\beta]$ within the group, μ being any root of

$$x^{p^s+1} = 1. \tag{94}$$

If $p^s + 1$ is prime to 3, we may choose μ so that μ^3 equals any given root of (94). Thus, if $p^s = 3l + 1$, then $\mu = x^{l+1}$ makes $\mu^3 = x^{p^s+2} = x$; if $p^s = 3l$, $\mu = x^{-l}$ makes $\mu^3 = x^{-p^s} = x$. But, if $p^s + 1$ be divisible by 3, μ^3 is a root of $x^{(p^s+1)/3} = 1$. Denoting the roots of the latter by τ_i, where $i = 1, 2, \cdots, (p^s+1)/3$, and a primitive root of (94) by ϱ, we see that every root of (94) has one of the forms τ_i, $\varrho\tau_i$, $\varrho^2\tau_i$. *If α be a fixed mark of the $GF[p^{2s}]$ such that***) $\alpha^{p^s+1} \neq 1$, *the $p^s + 1$ substitutions $[\alpha, \beta]$ are all conjugate under $H_{3,p,s}$ if $p^s + 1$ be prime to 3, but give rise to three sets of conjugates represented by $[\alpha, \beta_1]$, $[\alpha, \varrho\beta_1]$, $[\alpha, \varrho^2\beta_1]$ if $p^s + 1$ be divisible by 3.*

The case $p^s + 1 = 3l$ requires further study. For later application, we let p^s be general. If τ be any root of (94), every ternary substitution which transforms $[\alpha, \beta]$ into $[\alpha, \tau\beta]$, $\beta \neq 0$, has the form:

---

*) An indirect proof is furnished by the results of § 37.

**) The case $\alpha^{p^s+1} = 1$, whence $\beta = 0$, needs no investigation. As shown by their characteristic equations, $[\alpha, 0]$ and $[\alpha', 0]$ are conjugate if, and only if, $\alpha' = \alpha$.

$$S_\tau \equiv \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ -\alpha_{12}\bar{\alpha}+\alpha_{13}\bar{\beta} & \alpha_{11} & \alpha_{12}\beta+\alpha_{13}\alpha \\ \alpha_{12}\bar{\tau}\bar{\beta}+\alpha_{13}\bar{\tau}\alpha\bar{\beta}\beta^{-1} & \alpha_{13}\bar{\tau}\bar{\beta}\beta^{-1} & \bar{\tau}\{\alpha_{11}+\alpha_{12}\alpha+\alpha_{13}\beta^{-1}(\alpha^2+\bar{\alpha})\} \end{pmatrix}.$$

The hyperorthogonal conditions (3), for $j=1$, and (4), for $j=1, k=2$, give

$$\alpha_{11}\bar{\alpha}_{11}+\alpha_{12}\bar{\alpha}_{12}+\alpha_{13}\bar{\alpha}_{13}=1, \tag{95}$$

$$R\equiv -\bar{\alpha}_{11}\alpha_{12}\bar{\alpha}+\bar{\alpha}_{11}\alpha_{13}\bar{\beta}+\alpha_{11}\bar{\alpha}_{12}+\alpha_{12}\bar{\alpha}_{13}\beta+\alpha_{13}\bar{\alpha}_{13}\alpha=0. \tag{96}$$

The four remaining conditions (3) and (4) reduce to identities upon applying (95) and (96). The determinant of S_τ equals

$$\begin{aligned} D\equiv\bar{\tau}\{&\alpha_{11}^3+\alpha\alpha_{11}^2\alpha_{12}+\beta^{-1}(\alpha^2+\bar{\alpha})\alpha_{11}^2\alpha_{13}+\bar{\alpha}\alpha_{11}\alpha_{12}^2-2\alpha\bar{\beta}\beta^{-1}\alpha_{11}\alpha_{13}^2 \\ &-3\bar{\beta}\alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13}+\alpha_{12}^3+\beta^{-1}(\alpha+\bar{\alpha}^2)\alpha_{12}^2\alpha_{13}-2\bar{\alpha}\bar{\beta}\beta^{-1}\alpha_{12}\alpha_{13}^2 \\ &+\bar{\beta}^2\beta^{-1}\alpha_{13}^3\}. \end{aligned}$$

33. Theorem. *If the characteristic equation of the substitution* $[\alpha, \beta]$ *is irreducible in the* $GF[p^{2s}]$, $[\alpha, \beta]$ *is conjugate with every* $[\alpha, \tau\beta]$, $\tau^{p^s+1}=1$, *within the group* $H_{3,p,s}$.

Taking $\mu=\lambda\tau$, where λ is a root of (94), the substitution M of determinant a root of (94) will transform $[\alpha, \beta]$ into $[\alpha, \tau\beta]$. It remains to prove that $[\alpha, \beta]$ can be transformed into itself by hyperorthogonal substitutions of determinant Δ, where Δ is an arbitrary root of (94).

To reduce $[\alpha, \beta]$ to its ultimate canonical form, we proceed as in §§ 14 and 16, where now

$$A_1=x\beta, \quad A_2=\bar{\beta}, \quad A_3=x^2+\bar{\alpha}.$$

Introducing as new indices*) $X_1\equiv A_1\xi_1+A_2\xi_2+A_3\xi_3$ and the functions X_2, X_3 obtained from X_1 upon replacing x by $x^{p^{2s}}$, x^{-p^s}, respectively, we obtain the following canonical form for $[\alpha, \beta]$:

$$X_1'=xX_1, \quad X_2'=x^{p^{2s}}X_2, \quad X_3'=x^{-p^s}X_3. \tag{97}$$

The substitution S_τ, for $\tau=1$, is seen to replace X_1 by AX_1, where

$$A\equiv\alpha_{11}+x\alpha_{12}+\alpha_{13}\beta^{-1}(x^2+\bar{\alpha}).$$

Hence S_1 takes at the same time the canonical form

$$X_1'=AX_1, \quad X_2'=A^{p^{2s}}X_2, \quad X_3'=A^{p^{4s}}X_3. \tag{98}$$

Since x is a root of $\Delta(x)=0$, which may be given the forms

$$x^3-x^2\alpha+x\bar{\alpha}-1=0, \quad x^2+\bar{\alpha}=x\alpha+x^{-1}, \tag{99}$$

---

*) The determinant of transformation is $\neq 0$ since the product of the differences of the roots of (99) does not vanish.

we may give to $A^{p^{3s}+1}$ the form

$$\alpha_{11}\bar{\alpha}_{11} + \alpha_{12}\bar{\alpha}_{12} + \alpha_{13}\bar{\alpha}_{13} + \left(xB + x^{-1}B^{p^s}\right)\bar{\beta}^{-1}\beta^{-1},$$

where B denotes the expression

$$\bar{\alpha}_{11}\alpha_{12}\beta\bar{\beta} + \bar{\alpha}_{11}\alpha_{13}\alpha\bar{\beta} + \alpha_{11}\bar{\alpha}_{13}\beta + \alpha_{12}\bar{\alpha}_{13}\alpha\beta + \bar{\alpha}_{12}\alpha_{13}\bar{\beta} + \alpha_{13}\bar{\alpha}_{13}(\alpha^2+\bar{\alpha}).$$

If S_1 be hyperorthogonal, (95) and (96) are satisfied, so that

$$B \equiv \alpha R + R^{p^s} = 0, \quad A^{p^{3s}+1} = 1.$$

Inversely, if (99) be irreducible and if $A^{p^{3s}+1} = 1$, then (95) is satisfied and $B = 0$. From the latter, $R = 0$, since $\alpha\bar{\alpha} \neq 1$. Hence S_1 is hyperorthogonal.

The determinant of (98) is therefore $\Delta \equiv A^{p^{2s}-p^s+1}$. By a suitable choice of A we can make Δ equal to any root of $\Delta^{p^s+1} = 1$. Indeed, (99) is irreducible in the $GF[p^{2s}]$ by assumption and may therefore be used to define the $GF[p^{6s}]$. In the latter field, $C^{p^{3s}+1} = 1$ has a primitive root of the form $C \equiv y_0 + y_1 x + y_2 x^2$. By a suitable choice of $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}$, we can make $A = C$.

To illustrate a more direct method of proof of the theorem, consider the example $p^s = 5$, $\beta = 2$, $\alpha^2 + \alpha + 2 \equiv 0$ (mod. 5). Then (99) is irreducible*) in the $GF[5^2]$. The values

$$\alpha_{11}^3 = \pm 2, \quad \alpha_{12} = -\alpha\alpha_{11}, \quad \alpha_{13} = \alpha_{11}$$

satisfy (95) and (96) and make $D = \pm 2\bar{\tau}(1-\alpha)$. Hence $[\alpha, 2]$ is conjugate with $[\alpha, \alpha-1]$ and with $[\alpha, -\alpha+1]$. It follows that $[\alpha, 2]$ may be transformed into itself by a hyperorthogonal substitution of determinant $\pm 2(1-\alpha)$ and therefore by its square of determinant $3\alpha+1$. Hence $[\alpha, 2]$ is conjugate with $[\alpha, 2(3\alpha+1)]$. Hence the substitutions $[\alpha, \beta]$, $\beta = \pm 2, \pm(\alpha-1), \pm(\alpha+2)$ are conjugate, and each may be transformed into itself by a hyperorthogonal substitution whose determinant is any one of the roots $\pm 1, \pm 2(1-\alpha), \pm 2(\alpha+2)$ of $\Delta^6 = 1$.

34. We have shown that two substitutions are conjugate within $H_{3,p,s}$ if they have the same characteristic equation which is is irreducible in the $GF[p^{2s}]$. The canonical form of either is (97). Here x may be any root of $x^{p^{2s}-p^s+1} = 1$ such that $x^{p^s+1} \neq 1$. But if $x^{p^s+1} = 1$, then $x^3 = 1$ and therefore $x^d = 1$, so that exactly d of the $p^{2s} - p^s + 1$ roots are excluded. The replacement of x by $x^{p^{2s}}$ or by x^{-p^s} leads to a conjugate

*) Employing the irreducible congruence

$$x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \equiv 0 \text{ (mod. 5)}$$

and setting $\alpha \equiv x + x^2 + x^4$, the roots of (99) are x, $x^{25} \equiv x^4$, $x^{-5} \equiv x^2$. Hence $\Delta(x)$ is irreducible by § 17.

substitution, so that there are exactly $\frac{1}{3}(p^{2s}-p^s+1-d)$ distinct canonical forms.

The commutative substitutions have the form (98) where $A^{p^{3s}+1}=1$. The determinant being unity, (98) is a power of the substitution in which ϱ_1 belongs to the exponent $p^{2s}-p^s+1$:

$$X_1'=\varrho_1 X_1,\quad X_2'=\varrho_1^{p^{2s}} X_2,\quad X_3'=\varrho_1^{-p^s} X_3\quad (\varrho_1^{p^{2s}-p^s+1}=1).$$

Hence each substitution (97) is commutative with exactly $p^{2s}-p^s+1$ substitutions (98) which arise from substitutions of the group.

Within $H_{3,p,s}$ there are $\frac{1}{3}(p^{2s}-p^s+1-d)$ non-conjugate sets of substitutions having irreducible characteristic equations. Each set contains $(p^{2s}-1)(p^s+1)p^{3s}$ conjugate substitutions.

35. It remains to consider the substitutions $[\alpha, \beta]$ of § 32 whose characteristic equations (99) possess triple roots.

For $p=3$, we must have $\alpha=0$. The p^s+1 substitutions $[0, \beta]$, $\beta^{p^s+1}=1$, are conjugate by § 32. As type we may take $(\xi_1\,\xi_2\,\xi_3)$.

For $p \neq 3$, equation (99) has a triple root, necessarily $x=\frac{\alpha}{3}$, if, and only if, $\alpha^2=3\bar{\alpha}$, $\alpha^3=27$. We therefore assume that

$$(100)\qquad \alpha^2=3\bar{\alpha},\quad \bar{\alpha}^2=3\alpha,\quad \alpha\bar{\alpha}=9,\quad \beta\bar{\beta}=-8,\quad \alpha^3=27.$$

If $p=2$, we have $\beta=0$, whence $[\alpha, \beta]$ multiplies ξ_3 by α and is therefore conjugate with $[\alpha, 0, -\bar{\alpha}]$, a case treated in § 30.

We proceed to study the substitutions $[\alpha, \beta]$ when $p \neq 2$, $p \neq 3$. If $p^s=3l+1$, we must have $\alpha=3$ since

$$9=\alpha^{3l+2}=\alpha^2\cdot 3^{3l}=\alpha^2\cdot 3^{p^s-1}=\alpha^2,\quad 27=\alpha^3.$$

If $p^s=3l-1$, α may have any one of three values 3ω, where $\omega^3=1$.

In view of relations (100), D of § 32 may be given the form

$$D=\bar{\tau}\left(\alpha_{11}+\frac{\alpha}{3}\,\alpha_{12}-\frac{\bar{\alpha}\bar{\beta}}{6}\,\alpha_{13}\right)^3.$$

Hence $[\alpha, \beta]$ is conjugate with $[\alpha, \tau\beta]$ only when τ is a cube, so that there are d non-conjugate substitutions $[\alpha, \beta]$ with α fixed and therefore in all d^2 non-conjugate substitutions $[\alpha, \beta]$.

Another proof follows by introducing the new indices

$$X_1 \equiv \frac{1}{3}\,\alpha\bar{\beta}\xi_1+\bar{\beta}\xi_2+\frac{4}{3}\,\bar{\alpha}\xi_3,\quad X_2 \equiv -\bar{\beta}\xi_2-\frac{2}{3}\,\bar{\alpha}\xi_3,\quad X_3=\frac{1}{3}\,\bar{\alpha}\xi_3.$$

Then $[\alpha, \beta]$, assumed to satisfy (100), takes the form

$$X_1'=xX,\quad X_2'=x(X_2+X_1),\quad X_3'=x(X_3+X_2+X_1)\qquad (x=\alpha/3)$$

and is therefore commutative only with the substitutions

$$X_1' = aX_1, \quad X_2' = aX_2 + bX_1, \quad X_3' = aX_3 + bX_2 + cX_1,$$

of determinant a^3.

Every substitution commutative with $[\alpha, \beta]$, $\beta \neq 0$, has the form S_1 (given in § 32). If it be of determinant unity,

$$(101) \qquad \alpha_{11} + \frac{\alpha}{3}\alpha_{12} - \frac{\bar{\alpha}\bar{\beta}}{6}\alpha_{13} = \omega, \qquad (\omega^d = 1).$$

Since $\omega^3 = 1$ and $\omega^{p^s+1} = 1$, we have $\omega \equiv \omega^{p^s} = \omega^2$. Raising the members of (101) to the power $p^s + 1$, we get

$$\alpha_{11}\bar{\alpha}_{11} + \alpha_{12}\bar{\alpha}_{12} + \alpha_{13}\bar{\alpha}_{13} - \frac{\bar{\alpha}}{6}R - \frac{\alpha}{6}R^{p^s} = 1.$$

Hence relation (95) follows from (96) and (101). Eliminating α_{11} between (101) and (96), we get

$$(102) \quad \omega^2\bar{\beta}\alpha_{13} - \omega^2\bar{\alpha}\alpha_{12} + \omega\bar{\alpha}_{12} - \frac{\bar{\alpha}\bar{\beta}}{6}\bar{\alpha}_{12}\alpha_{13} + \frac{2\alpha}{3}\alpha_{12}\bar{\alpha}_{12} - \frac{\alpha}{3}\alpha_{13}\bar{\alpha}_{13}$$
$$- \frac{\beta}{2}\alpha_{12}\bar{\alpha}_{13} = 0.$$

Raising (102) to the power p^s and multiplying by $-\frac{\bar{\alpha}}{3}$ and adding the resulting equation to (102), we find that

$$\omega\left(\bar{\beta}\alpha_{13} - \frac{4}{3}\bar{\alpha}\alpha_{12}\right) - \frac{1}{3}\bar{\alpha}\beta\bar{\alpha}_{13} + 4\bar{\alpha}_{12} = 0.$$

This equation may be written in the form

$$(103) \qquad \omega X = \frac{\bar{\alpha}}{3}X^{p^s}, \quad X \equiv \bar{\beta}\alpha_{13} - \frac{4}{3}\bar{\alpha}\alpha_{12}.$$

Raising (103) to the power p^s and multiplying by $\omega\frac{\bar{\alpha}}{3}$, we find that $X^{p^{2s}} = X$, so that (103) has p^s roots in the $GF[p^{2s}]$. Substituting

$$\bar{\beta}\alpha_{13} = X + \frac{4}{3}\bar{\alpha}\alpha_{12}, \quad \beta\bar{\alpha}_{13} = \frac{\alpha\omega}{3}X + \frac{4}{3}\alpha\bar{\alpha}_{12}$$

in equation (102), we get

$$(104) \qquad \alpha_{12}^{p^s} + \frac{1}{3}\omega\bar{\alpha}\alpha_{12} + \omega x + \frac{\bar{\alpha}}{24}x^2 = 0.$$

Raising (104) to the power p^s, multiplying the resulting equation by $-\frac{1}{3}\omega^2\alpha$, and adding to (104), we find that $\alpha_{12}^{p^{2s}} = \alpha_{12}$. Hence, for each value of x, equation (104) has p^s roots α_{12} in the $GF[p^{2s}]$. There are exactly dp^{2s} commutative substitutions S_1, since ω has d values and x, α_{12} each have p^s values.

For $p = 3$, a substitution commutative with $[0, 1] \equiv (\xi_1\xi_2\xi_3)$ has the form

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{13} & \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{11} \end{pmatrix}.$$

It has the determinant $\alpha_{11}^3 + \alpha_{12}^3 + \alpha_{13}^3 - 3\alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13}$. Hence

$$\alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{13} \equiv 1 \pmod{3}.$$

The condition (95) then follows from (96), which becomes

$$\bar{\alpha}_{11}\alpha_{13} + \alpha_{11}\bar{\alpha}_{12} + \alpha_{12}\bar{\alpha}_{13} = 0.$$

Eliminating α_{13}, we get

$$(105) \qquad \bar{\alpha}_{11} - \alpha_{11}\bar{\alpha}_{11} + \bar{\alpha}_{11}\alpha_{12} + \alpha_{11}\bar{\alpha}_{12} + \alpha_{12} - \alpha_{12}\bar{\alpha}_{12} = 0.$$

Raising to the power p^s and subtracting the result from (105), we get

$$x^{p^s} = x, \quad x \equiv \alpha_{12} - \alpha_{11}.$$

Substituting $\alpha_{12} = x + \alpha_{11}$ in (105), it becomes

$$\alpha_{11}^{p^s} + \alpha_{11} + x - x^2 = 0.$$

Raising to the power p^s, we find that $\alpha_{11}^{p^{2s}} = \alpha_{11}$. *Hence* $(\xi_1\,\xi_2\,\xi_3)$ *is commutative with exactly* p^{2s} *substitutions of the group.*

36. We have finally to consider, for $p = 2$, the substitutions S of § 26, not conjugate with a substitution multiplying one index by a constant, but having a perfect cube as characteristic determinant. In particular α_{11}, α_{12}, α_{23}, α_{33} are all different from zero. If (44) has a triple root, necessarily $x = \sigma$, we have

$$\sigma^3 = 1, \quad \sigma^2 = \bar{\sigma}, \quad \sigma\bar{\sigma} = 1, \quad \sigma \equiv \alpha_{11} + \bar{\alpha}_{11}\bar{\alpha}_{33} + \alpha_{33}.$$

Then

$$\bar{\alpha}_{11}\bar{\sigma} = \bar{\alpha}_{11}^2 + \alpha_{11}\bar{\alpha}_{11}\alpha_{33} + \bar{\alpha}_{11}\bar{\alpha}_{33} = \bar{\alpha}_{11}^2 + \alpha_{11}\bar{\alpha}_{11}\alpha_{33} + \sigma - \alpha_{11} - \alpha_{33},$$

$$\alpha_{33} = \frac{\sigma - \alpha_{11} - \bar{\sigma}\bar{\alpha}_{11} + \bar{\alpha}_{11}^2}{1 - \alpha_{11}\bar{\alpha}_{11}} \qquad (1 - \alpha_{11}\bar{\alpha}_{11} \neq 0).$$

It may be shown that S is conjugate with a substitution of like form in which α_{11} has a particular value. Then the d values of σ give as many values to α_{33}. By an evident transformation in the group (see § 25), we may give α_{12} a particular value, without altering α_{11}, α_{33}. Then the transform S' of S by $O_{1,3}^{\tau,0}\,O_{2,3}^{\tau,0}$ is of the form S but has (§ 25)

$$\alpha'_{11} = \alpha_{11}, \quad \alpha'_{12} = \alpha_{12}, \quad \alpha'_{22} = \alpha_{22}, \quad \alpha'_{33} = \alpha_{33}, \quad \alpha'_{23} = \tau^3\alpha_{23}.$$

When τ runs through the series of roots of $\tau^{p^s+1} = 1$, τ^3 takes $(p^s+1)d$ values. Hence α'_{23} assumes one of d distinct values. Hence there are exactly d^2 non-conjugate substitutions S. The proof that each S is commutative with exactly $d2^{2s}$ substitutions of $H_{3,2,s}$ will be illustrated by the example $s = 2$.

For $p^s = 4$, $d = 1$ and $\sigma = 1$. Since $\alpha_{11} \neq 0$, $\alpha_{12} \neq 0$, we have $\alpha_{11}^{15} = 1$, $\alpha_{11}^5 \neq 1$. Hence $\alpha_{11}^5 = i$, where $i^2 \equiv i + 1 \pmod 2$. As above,

$$\alpha_{33} = \frac{1 - \alpha_{11} - \alpha_{11}^4 + \alpha_{11}^8}{1 + \alpha_{11}^5} = i(1 + \alpha_{11} + \alpha_{11}^4 + i\alpha_{11}^3).$$

Now α_{33} vanishes only when $\alpha_{11}^2 + i\alpha_{11} + 1 = 0$, giving $\alpha_{11}^5 = 1$, a case already excluded. Since $\alpha_{33}^5 = 1 + \alpha_{11} + i\alpha_{11}^2 + i^2\alpha_{11}^3 + \alpha_{11}^4$, the case $\alpha_{33}^5 = 1$ gives $\alpha_{11} = i^2$. Hence $\alpha_{33} \neq 0$, $\alpha_{23} \neq 0$, if α_{11} be any root of $\alpha_{11}^5 = i$ except $\alpha_{11} = i^2$. Hence α_{11} is a root of one of the equations irreducible in the $GF[4]$:

$$\alpha_{11}^2 + \alpha_{11} + i = 0, \quad \alpha_{11}^2 + \alpha_{11} i + i = 0.$$

Taking α_{11} to be a root α of $\alpha^2 + \alpha + i = 0$, we may (as shown above) take $\alpha_{12} = i$, $\alpha_{23} = i$, since $\alpha_{12}^5 = i$, $\alpha_{23}^5 = i^2$. Hence the substitution becomes

$$S \equiv \begin{pmatrix} \alpha & i & 0 \\ i^2\alpha + 1 & i^2\alpha & i \\ i^2 & i\alpha + i & i\alpha + 1 \end{pmatrix} \qquad (\alpha^2+\alpha+i=0).$$

The period of S is been to be 4.

Every ternary substitution commutative with S has the form

$$\Sigma \equiv \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ (i\alpha+i^2)\alpha_{12}+i\alpha_{13} & \alpha_{11}+\alpha\alpha_{12}+(\alpha+1)\alpha_{13} & \alpha_{12}+(i\alpha+i^2)\alpha_{13} \\ i\alpha_{12}+(i\alpha+1)\alpha_{13} & (\alpha+1)\alpha_{12}+(i^2\alpha+i)\alpha_{13} & \alpha_{11}+(i\alpha+i^2)\alpha_{12}+(\alpha+i)\alpha_{13} \end{pmatrix}.$$

Forming the minors of α_{31} and α_{21}, we have, by § 1,

(106) $\alpha_{11}\alpha_{13} = \alpha_{12}^2 + (\alpha+1)\alpha_{13}^2 + (i^2\alpha+i^2)\alpha_{12}\alpha_{13} + i\alpha_{12}^4 + (i\alpha+i^2)\alpha_{13}^4$,

(107) $\alpha_{11}\alpha_{12} = (i\alpha+i^2)\alpha_{12}^2 + (i^2\alpha+i)\alpha_{13}^2 + i^2\alpha_{12}\alpha_{13} + (i\alpha+1)\alpha_{12}^4 + i\alpha_{13}^4$.

Equating the two resulting values for $\alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13}$, and setting $\alpha_{12} = \alpha\alpha_{13} + x$, we obtain the congruence (mod. 2):

(108) $$x(x^2 + ix^4 + x^3\alpha_{13} + \alpha_{13}^4) \equiv 0.$$

For $x = 0$, $\alpha_{12} = \alpha\alpha_{13}$. If $\alpha_{13} = 0$, Σ is the identity. If $\alpha_{13} \neq 0$, (106) gives $\alpha_{11} = \alpha_{13}^3 + i\alpha_{11}$. Then the hyperorthogonal condition on the first row of Σ gives

$$\alpha_{13}^5(\alpha_{13}^{10} + i\alpha_{13}^8 + i\alpha_{13}^2) = 1, \quad i\alpha_{13}^7(\alpha_{13}^6 + 1) = 0.$$

Hence $\alpha_{13}^3 = 1$, when Σ takes the form, belonging to $H_{3,2,2}$,

$$\begin{pmatrix} 1+i\alpha_{13} & \alpha\alpha_{13} & \alpha_{13} \\ (\alpha+1)\alpha_{13} & 1 + \alpha_{13} & (i^2\alpha+i^2)\alpha_{13} \\ \alpha_{13} & i^2\alpha\alpha_{13} & 1 + i^2\alpha_{13} \end{pmatrix}.$$

Raising (108) to the fourth power and adding to (108), we find

that $x^{12}=x^3$. For $x \neq 0$, $x^{15}=1$, so that $x^3=1$. Taking $x=1, i, i^2$, (108) gives respectively

$$\alpha_{13}^4+\alpha_{13}=i^2, \quad \alpha_{13}^4+\alpha_{13}=0, \quad \alpha_{13}^4+\alpha_{13}=i^2.$$

Upon raising each equation to the fourth power, we find that $\alpha_{13}^{16}=\alpha_{13}$, so that each has four roots in the $GF[16]$. According as $x=1$, i or i^2, we have, by (106) or (107),

$$\alpha_{11}=i\alpha_{13}+i^2\alpha+i, \quad \alpha_{11}=i\alpha_{13}+\alpha, \quad \alpha_{11}=i\alpha_{13}+i\alpha+i^2.$$

In each case the four resulting substitutions are seen to belong to the group. Hence S is commutative with exactly 16 substitutions of $H_{3,2,2}$.

Table of the substitutions of $H_{3,p,s}$, $p^s \neq 2$.

37. To give a summary of the preceding results, the following table gives in the first column the non-conjugate types of substitutions of the group, the second column gives the number of such types and the third column gives the number of substitutions of the group conjugate with each type. Forming the sum of the products of the corresponding numbers in the second and third columns, we obtain the order of the group,

$$(p^{3s}+1)(p^{2s}-1)p^{3s}.$$

The classification is based upon the character of the roots in the $GF[p^{2s}]$ of the characteristic equation $\Delta(x)=0$, when the latter is reducible. The substitution $[\mu, \alpha, \beta]$ is exhibited in § 27, $[\alpha, \beta]$ in § 32.

Type of substitution.	Number of types.	Number of conjugates to each type.
$\Delta(x)=0$ irreducible	$\frac{1}{3}(p^{2s}-p^s+1-d)$	$p^{3s}(p^{2s}-1)(p^s+1)$
Distinct roots, satisfying $x^{p^s+1}=1$	$\frac{1}{6}(p^s+1)(p^s-2)+\frac{d}{3}$	$p^{3s}(p^{2s}-p^s+1)(p^s-1)$
not all satisfying $x^{p^s+1}=1$	$\frac{1}{2}(p^s+1)(p^s-2)$	$p^{3s}(p^{3s}+1)$
Double root, type (68)	p^s+1-d	$p^{2s}(p^{2s}-p^s+1)$
type (69)	p^s+1-d	$p^{2s}(p^{3s}+1)(p^s-1)$
Triple root, $[\mu, \alpha, \beta]$, $\beta \neq 0$	d	$(p^{3s}+1)(p^s-1)$
$[\mu, \alpha, \beta]$, $\beta=0$	d	1
$\left.\begin{array}{r}[\alpha, \beta],\ p>2 \\ S \text{ of § 36},\ p=2\end{array}\right\}$	d^2	$\frac{1}{d}p^s(p^{3s}+1)(p^{2s}-1)$

38. For $p^s = 3$, we have the following distribution into conjugate sets of the substitutions of the simple group $H_{3,3,1}$, of order 6048:

Substitution.	Roots of $\Delta(x) = 0$.	Period.	Number of conjugates.
$[-i+1, i+1]$	irreducible	7	864
$[-i-1, i+1]$	in the $GF[9]$	7	864
$[1, 0, 1]$	$1, i, -i$	4	378
$[-i, 0, 1]$	$i, -i+1, i-1$	8	756
$[i, 0, 1]$	$-i, i+1, -i-1$	8	756
$[1, -1, 0]$	$1, -1, -1$	2	63
$[-1, i, 0]$	$-1, i, i$	4	63
$[-1, -i, 0]$	$-1, -i, -i$	4	63
$[1, -i-1, -i+1]$	$1, -1, -1$	6	504
$[-1, i+1, i+1]$	$-1, i, i$	12	504
$[-1, -i+1, i+1]$	$-1, -i, -i$	12	504
$[1, i+1, i-1]$	$1, 1, 1$	3	56
identity	$1, 1, 1$	1	1
$[0, 1]$	$1, 1, 1$	3	672

The substitutions $[-1, i+1, i+1]$ and $[-1, -i+1, i+1]$ are inverse to each other. The last substitution $[0, 1]$ is $(\xi_1 \xi_2 \xi_3)$. The results for $p^s = 3$ were first obtained without the use of the above general investigation.

The University of Chicago, March, 1901.

Sul moto di un corpo rigido in uno spazio di curvatura costante.

Sunto di alcune Note di

Domenico De Francesco in Napoli.

Il primo ad occuparsi del moto di un corpo rigido in uno spazio di curvatura costante fu il Clifford. Questi nel 1874 ne stabilì l'equazioni differenziali, senza occuparsi della loro integrazione*); due anni dopo considerò il caso di un solido, non sollecitato da forze, in uno spazio di $n-1$ dimensioni, e ne tentò l'integrazione generale per mezzo di funzioni ϑ di $n-2=s$ argomenti, uno dei quali, funzione lineare del tempo**).

Nel 1884 il Sig. Heath trattò lo stesso problema***), limitandosi al caso di uno spazio ellittico a tre dimensioni, ed anch' egli ne integrò le equazioni per mezzo di funzioni ϑ, e la sua soluzione coincide con quella di Clifford ($n=4$, $s=2$); ma, come notò egli stesso, la soluzione non è generale per difetto di numero delle costanti arbitrarie, che sono 4 invece di 6. Se ne può concludere che è incompleta per la stessa ragione anche la soluzione di Clifford, sebbene l'Heath non ne parli. Lo notò bensí nello stesso anno il Killing, il quale, trovate per altra via le equazioni differenziali di Clifford aggiunge†): „Wenn Clifford aber behauptet, diese Gleichungen könnten durch einfache ϑ-Quotienten integrirt werden, so hat er zu bemerken vergessen, dass dieser Lösung, welche nur bei bestimmten Anfangsbedingungen möglich ist, der Charakter der Allgemeinheit fehlt". Il Killing non trattò il problema della integrazione††).

---

*) Motion of a Solid in Elliptic Space. Math. Papers, n. 41 (Cfr. Klein, Nicht-Euklidische Geometrie, 1893, v. II, p. 220).

**) On the free Motion under no Forces of a Rigid Sistem in an n-fold Homaloid. Proceedings of the London Math. Society, vol. VII, 1876.

***) On the Dynamics of a Rigid Body in Elliptic Space-Philos. Transactions of the Royal Society of London, Vol. 175, 1884. —

†) Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 98, 1885, p. 48.

††) Il Sig^r^. Klein e Stäckel si compiace farmi conoscere una Memoria di Cayley «*Sur quelques propriétés des determinants gauches*» (Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 32, 1846) ed una del Sig^r^. Frahm del 1873 «*Ueber gewisse Differentialgleichungen*» (Math. Annalen, VIII, 1875).

Nella prima il Cayley pone il problema della rotazione in uno spazio di più dimensioni, ma dice: «je n'ai encore rien trouvé sur ce sujet»; nell' altra il Sig^r^. Frahm

Il Prof. Volterra non si è occupato esplicitamente di moti in spazi non euclidei, ma ha trattato di una classe di moti che egli ha chiamato *moti spontanei a caratteristiche indipendenti*, ed a questa classe si può appunto riportare il moto di un corpo rigido, non sollecitato da forze in spazi non euclidei. I moti spontanei a caratteristiche indipendenti sono caratterizzati dal fatto che le loro equazioni si dividono in due gruppi, il primo dei quali è un sistema di equazioni differenziali del 1^0 ordine rispetto a certi parametri o *caratteristiche*, che soli compariscono in esso come elementi variabili. Queste caratteristiche sono, nel caso nostro, le sei componenti della rotazione e della traslazione del corpo. Il secondo gruppo comprende altrettante equazioni differenziali che legano le caratteristiche con altri parametri che determinano la posizione del corpo.

Il problema delle caratteristiche, o velocità, può dunque esser trattato indipendentemente dalla completa questione dinamica, e il Prof. Volterra l'ha risoluto per qualunque numero di caratteristiche, ottenendole espresse mediante serie di funzioni del tempo, i cui coefficienti si ricavano mediante operazioni razionali dalle costanti note delle equazioni differenziali, e dai valori iniziali delle caratteristiche.

Della seconda parte del problema, cioè del problema di posizione, nè gli autori citati, nè altri, ch'io sappia, si è occupato, almeno per quanto riguarda corpi rigidi di forma qualunque.

Per quanto riguarda corpi di forma speciale l'unico caso completamente risoluto che io conosca, è quello dovuto al Sg^r. Klein, il quale nelle sue «*lectures*» sulla "*Mathematical Theory of the Top*" *) ha mostrato come dall' equazioni differenziali (e quindi anche dalle integrali) del moto di una trottola sferica (top) nello spazio euclideo, si passi a quelle del moto in uno spazio iperbolico di un corpo analogo sotto forze analoghe con sei gradi di libertà, mediante la semplice sostituzione di variabili complesse al posto delle variabili reali.

Esporrò ora brevemente i risultati a cui son giunto in alcuni lavori sul moto di un corpo rigido di forma qualunque in spazi non euclidei, sia in riguardo al problema di posizione, sia anche per quanto si riferisce a quello delle velocità, giacchè sebbene questo sia implicitamente e completamente risoluto nella serie di Volterra, non è inutile, stante l'importanza e la difficoltà del problema, indicare altre vie che conducano ad altre soluzioni.

---

stabilisce l'equazioni differenziali del problema (dunque prime del Clifford) e ne indica anche parecchi integrali; e per il caso di $n = 4$ afferma potersi dimostrare che basterebbe una sola relazione tra le costanti note dell' equazioni differenziali per ridurre il problema alle quadrature (p. 42).

*) New-York, Scribner's Sons, 1897. (Vorlesungen gehalten beim 150jährigen Jubiläum der Universität Princeton, 1896).

I.

Una prima mia Nota*) ha per oggetto il solo problema della velocità. Le equazioni differenziali, usando le notazioni dell' Heath, sono:

$$
(1)\quad \begin{cases}
A\dfrac{d\omega_1}{dt} - (B-H)\omega_2\omega_6 - (G-C)\omega_5\omega_3 = 0, \\
B\dfrac{d\omega_2}{dt} - (H-A)\omega_6\omega_1 - (C-F)\omega_3\omega_4 = 0, \\
C\dfrac{d\omega_3}{dt} - (A-G)\omega_1\omega_5 - (F-B)\omega_4\omega_2 = 0, \\
F\dfrac{d\omega_4}{dt} - (B-C)\omega_2\omega_3 - (G-H)\omega_5\omega_6 = 0, \\
G\dfrac{d\omega_5}{dt} - (C-A)\omega_3\omega_1 - (H-F)\omega_6\omega_4 = 0, \\
H\dfrac{d\omega_6}{dt} - (A-B)\omega_1\omega_2 - (F-G)\omega_4\omega_5 = 0,
\end{cases}
$$

nelle quali le ω sono le sei velocità angolari del corpo rispetto ai sei spigoli di un tetraedro, legato invariabilmente al corpo, ed A, B, C, F, G, H coefficienti costanti, dipendenti dalla massa del corpo, tra cui sussistono le relazioni: $A+F=B+G=C+H=M$.

L'Heath ne trovò i tre seguenti integrali:

$$(2)\quad A\omega_1^2+B\omega_2^2+C\omega_3^2+F\omega_4^2+G\omega_5^2+H\omega_6^2=2T=\text{cost.},$$

$$(3)\quad A^2\omega_1^2+B^2\omega_2^2+C^2\omega_3^2+F^2\omega_4^2+G^2\omega_5^2+H^2\omega_6^2=K^2=\text{cost.},$$

$$(4)\quad \frac{A\omega_1^2}{B-H}+\frac{B\omega_2^2}{C-F}+\frac{C\omega_3^2}{A-G}=g=\text{cost.},$$

Noi ne abbiamo aggiunto un quarto, cioè:

$$(5)\quad AF\omega_1\omega_4+BG\omega_2\omega_5+CH\omega_3\omega_6=S=\text{cost.},$$

e con questo si ha un' altra soluzione del problema, par quanto riguarda le caratteristiche, o velocità angolari, mediante un teorema, dovuto anche esso al Prof. Volterra**), che si enuncia così: *Se oltre all' integrale delle forze vive si conoscono* $\nu-3$ *integrali indipendenti dal tempo delle equazioni d'un moto spontaneo a caratteristiche indipendenti d'ordine* ν, *ed uno di essi è un integrale di* 2° *grado (la cui equazione determinante abbia radici diseguali), la determinazione delle caratteristiche si riduce alle quadrature.*

In questo teorema il numero ν rappresenta il numero delle caratteristiche, che nel nostro caso è 6, mentre si hanno oltre l'integrale delle forze vive

*) *Sul moto spontaneo di un corpo rigido in uno spazio di curvatura costante.* Nota 1ª. Atti delle R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. 35°, 1899.

**) *Sopra una classe di equazioni dinamiche.* Atti delle R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. 33°, 1897—98.

(2) gli altri tre integrali (3), (4) e (5). Affinchè però il teorema sia applicabile occorre che i prodotti AF, BG, CH siano diseguali. Se due di essi sono eguali (cioè se $A = B$ e quindi $F = G$; oppure se $A = G$; e quindi $B = F$) le (1) danno un altro integrale ($\omega_6 =$ cost., oppure $\omega_3 =$ cost.), onde avendosi 5 integrali indipendenti dal tempo, l'equazione del tempo si otterrà con una quadratura.

II.

Una seconda Nota*) concerne il problema di posizione. Conosciute le ω in funzione del tempo, occorre integrare sei equazioni differenziali che legano le ω coi sei parametri di posizione. Esprimendo che le quantità di moto di tutti i punti del sistema rigido formano in ogni istante una Diname, le cui componenti rispetto a un tetraedro fisso sono quantità costanti, si trova che queste costanti non sono independenti; ma legate colle costanti arbitrarie degl' integrali (3) e (5). A risolvere il problema di posizione occorrono quindi altri due integrali. A questi son giunto per una via che si riduce essenzialmente a quel che segue. Ponendo:

$$\begin{cases} L = F\omega_4 \pm A\omega_1, & M = G\omega_5 \pm B\omega_2, & N = H\omega_6 \pm C\omega_3, \\ p = \omega_4 \pm \omega_1, & q = \omega_5 \pm \omega_2, & r = \omega_6 \pm \omega_3, \end{cases}$$

le (1) si riducono a due terne della forma:

$$\frac{dL}{dt} - Mr + Nq = 0, \quad \frac{dM}{dt} - Np + Lr = 0, \quad \frac{dN}{dt} - Lq + Mp = 0,$$

e le sei equazioni che legano le ω coi coefficienti di posizione del corpo si riducono a due terne della forma:

$$pdt = \gamma d\beta + \gamma' d\beta' + \gamma'' d\beta'', \qquad qdt = \alpha d\gamma + \alpha' d\gamma' + \alpha'' d\gamma'',$$
$$rdt = \beta d\alpha + \beta' d\alpha' + \beta'' d\alpha'',$$

ove i coefficienti $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \cdots$ formano un determinante ortogonale.

Con tali riduzioni il problema di posizione nello spazio non euclideo si scinde in due problemi che si possono trattare e risolvere, come si tratta e si risolve il problema di posizione di un corpo non sollecitato da forze con un punto fisso, nello spazio euclideo.

Questa specie di sdoppiamento del problema trae alla considerazione di due *piani invariabili*, cioè di due piani che godono proprietà analoghe a quelle del piano invariabile nello spazio euclideo, considerazione che facilita l'integrazione. I due piani invariabili però non sussistono sempre. Nello spazio ellitico ne può svanire uno, nello spazio iperbolico possono

---

*) *Sul modo spontaneo* ecc. Nota II. Atti delle R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. 35°, 1899—1900.

svanire entrambi (quando sono nulle le costanti arbitrarie degl'integrali (3) e (5)), e ciò perchè ω_1, ω_2, ω_3 nello spazio iperbolico sono immaginarie pure. Le integrazioni però si effettuano anche senza la considerazione dei piani invariabili. Osserveremo anche come lo sdoppiamento indicato trova riscontro in uno sdoppiamento analogo, quantunque in senso inverso, adoperato dal Sig[r]. Klein nella citata sua '*Mathematical Theory of the Top*', là dove ottiene le equazioni differenziali per il moto di un certo corpo rigido in uno spazio non euclideo, perfettamente analoghe alle equazioni per il moto della trottola sferica (top) nello spazio ordinario, col dare valori complessi al tempo ed ai tre parametri che determinano la posizione del corpo*).

III.

In una terza Nota**) ho trattato il problema senza suddividerlo nei due, di velocità e di posizione; e la soluzione completa deriva da una funzione caratteristica Jacobiana. Questa a sua volta si ottiene da una equazione differenziale, che soddisfa alle condizioni d'integrabilità, e include radicali di 2^0 e 3^0 grado.

Si parte dalle equazioni differenziali (1) e dai quattro integrali quadratici scritti sotto la forma:

$$(8)\quad \begin{cases} \frac{d}{dt}(F\omega_4 \pm A\omega_1) - (G\omega_5 \pm B\omega_2)(\omega_6 \pm \omega_3) + (H\omega_6 \pm C\omega_3)(\omega_5 \pm \omega_2) = 0, \\ \frac{d}{dt}(G\omega_5 \pm B\omega_2) - (H\omega_6 \pm C\omega_3)(\omega_4 \pm \omega_1) + (F\omega_4 \pm A\omega_1)(\omega_6 \pm \omega_3) = 0, \\ \frac{d}{dt}(H\omega_6 \pm C\omega_3) - (F\omega_4 - A\omega_1)(\omega_5 \pm \omega_2) + (G\omega_5 \pm B\omega_2)(\omega_4 \pm \omega_1) = 0, \end{cases}$$

$$(9)\quad \begin{cases} (F\omega_4 + A\omega_1)(\omega_4 + \omega_1) + (G\omega_5 + B\omega_2)(\omega_5 + \omega_2) + (H\omega_6 + C\omega_3)(\omega_6 + \omega_3) \\ + (F\omega_4 - A\omega_1)(\omega_4 - \omega_1) + (G\omega_5 - B\omega_2)(\omega_5 - \omega_2) \\ \qquad\qquad + (H\omega_6 - C\omega_3)(\omega_6 - \omega_3) = 4h, \\ \qquad \frac{A\omega_1^2}{B-H} + \frac{B\omega_2^2}{C-F} + \frac{C\omega_3^2}{A-G} = g, \end{cases}$$

$$(10)\quad \begin{cases} (F\omega_4 + A\omega_1)^2 + (G\omega_5 + B\omega_2)^2 + (H\omega_6 + C\omega_3)^2 = K_1^2, \\ (F\omega_4 - A\omega_1)^2 + (G\omega_5 - B\omega_2)^2 + (H\omega_6 - C\omega_3)^2 = K_2^2. \end{cases}$$

*) Lectures, p. 54. — Solo da pochi giorni sono venuto a cognizione di queste importanti *lectures*. Mi sembra che, seguendo questi concetti del Sig[r]. Klein, si potrebbe trovar la via per integrare anche le equazioni del moto della trottola non sferica in spazi non-euclidei.

**) *Sull' integrazione delle equazioni differenziali del moto spontaneo di un corpo rigido in uno spazio di curvatura costante* — Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, vol. IX, serie V, 1900.

Il primo integrale è quello delle forze vive, la cui somma T è $= h$. Supponiamo K_1 e K_2 entrambe diverse da zero, e poniamo:

$$(11)\begin{cases} F\omega_4 + A_1\omega_1 = -K_1 \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\varphi_1, & F\omega_4 - A\omega_1 = -K_1 \operatorname{sen}\theta_2 \operatorname{sen}\varphi_2, \\ F\omega_5 + B\omega_2 = -K_1 \operatorname{sen}\theta_1 \cos\varphi_1, & F\omega_5 - B\omega_2 = -K_2 \sin\theta_2 \cos\varphi_2, \\ H\omega_6 + C\omega_3 = \ \ K_1 \cos\theta_1 \quad, & G\omega_6 - C\omega_3 = \ \ K_2\cos\theta_2 \quad . \end{cases}$$

Queste equazioni equivalgono alle (10). Tra le ω ed i sei parametri $\theta_1, \varphi_1, \psi_1, \theta_2, \varphi_2, \psi_2$ che determinano ad ogni istante la posizione del mobile, sussistono*) altre sei equazioni di cui scriviamo solo le prime tre:

$$(11')\qquad\begin{cases} (\omega_4+\omega_1)dt = \operatorname{sen}\varphi_1 \operatorname{sen}\theta_1\, d\psi_1 - \cos\varphi_1\, d\theta_1, \\ (\omega_5+\omega_2)dt = \cos\varphi_1 \operatorname{sen}\theta_1\, d\psi_1 + \operatorname{sen}\varphi_1\, \theta_1, \\ (\omega_6+\omega_3)dt = d\varphi_1 - \cos\theta_1\, d\psi_1, \end{cases}$$

le altre si deducono da queste cambiando le somme dei primi membri nelle differenze, e nei secondi membri l'indice 1 nell' indice 2. Queste sei equazioni d'altronde, insieme alle sei precedenti, soddisfano identicamente le equazioni differenziali (8).

Con queste sostituzioni l'integrale (9) delle forze vive diviene:

$$(12)\qquad K_1 \cos\theta_1\, d\varphi_1 + K_2 \cos\theta_2\, d\varphi_2 - K_1\, d\psi_1 - K_2\, d\psi_2 = 4h\, dt;$$

e si può dimostrare che il primo membro di queste equazioni è un differenziale esatto; cioè che se si esprimono $K_1 \cos\theta_1$ e $K_2\cos\theta_2$ in funzione di φ_1 e φ_2 per mezzo degli integrali (9), si ha:

$$\frac{\partial(K_1\cos\theta_1)}{\partial\varphi_2} = \frac{\partial(K_2\cos\theta_2)}{\partial\varphi_1}.$$

Ponendo adunque:

$$\int (K_1 \cos\theta_1\, d\varphi_1 + K_2 \cos\theta_2\, d\varphi_2) = 2V,$$

l'equazione (12) dà:

$$2V - K_1\psi_1 - K_2\psi_2 = 4ht + \text{cost.}$$

Ponendo poi:

$$V - \frac{1}{2}K_1\psi_1 - \frac{1}{2}K_2\psi_2 - ht = W,$$

W è la funzione caratteristica del problema, poichè soddisfa alle condizioni:

$$(13)\qquad \frac{dW}{dt} = T + U, \quad \frac{\partial W}{\partial t} = -T + U,$$

essendo T la forza viva $(=h)$ ed U la funzione delle forze $(=0)$, e contiene tante costanti arbitrarie (h, g, K_1, K_2) quante sono le variabili $(\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2)$. Si avrà dunque:

*) Sul moto spontaneo ecc. Nota II citata.

$$(14)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial h} = h', \\ \dfrac{\partial W}{\partial g} = g', \end{cases} \qquad (15)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial K_1} = K_1', \\ \dfrac{\partial W}{\partial K_2} = K_2', \end{cases}$$

essendo h', g', K_1', K_2' quattro nuove costanti arbitrarie. Questi integrali insieme cogl' integrali (9) e (10) danno la risoluzione completa del problema. Infatti le (14) danno φ_1 e φ_2 in funzione del tempo e delle 6 arbitrarie K_1, K_2, h, g, h', g': le (3) per mezzo delle (11) danno θ_1 e θ_2 in funzione di φ_1 e φ_2 e quindi in funzione del tempo e delle stesse 6 costanti, e le (11) danno le sei velocità ω. Finalmente le (15) daranno ψ_1 e ψ_2 di cui le ω non sono funzioni, ma che servono insieme alle altre quattro variabili φ_1, φ_2, θ_1, θ_2 a determinare la posizione del corpo.

La soluzione del problema di posizione non contiene che otto costanti arbitrarie, ma essa è generale, poichè quattro costanti sono nulle per la posizione degli assi, ciò che non implica alcuna restrizione nelle condizioni iniziali del moto.

Quanto alla funzione V, osserviamo che per ottenerla bisogna esprimere per mezzo delle (9) $K_1 \cos\theta_1$ e $K_2 \cos\theta_2$ in funzione di φ_1 e φ_2. Ora queste equazioni, eliminando θ_2, danno una risultante di 4^0 grado rispetto a $\text{sen}^2\,\theta_1$. Quindi $\cos\theta_1$ e $\cos\theta_2$ possono ottenersi esplicitamente in funzione di φ_1 e φ_2 per mezzo di radicali di secondo e terzo grado.

La soluzione data non regge quando una delle K, o entrambe siano nulle. Il primo caso non può verificarsi che nello spazio ellittico, il secondo non può verificarsi che nello spazio iperbolico.

Nel primo caso (p. es. quando $K_2 = 0$) si ha:

$$F\omega_4 - A\omega_1 = G\omega_5 - B\omega_2 = H\omega_6 - C\omega_3 = 0,$$

e ridotte le ω a tre, le (8) si riducono a tre equazioni euleriane che esprimono la rotazione intorno a un punto, di un corpo avente per momenti principali d'inerzia $\dfrac{AF}{A+F}$, $\dfrac{BG}{B+G}$, $\dfrac{CH}{C+H}$.

Nel secondo caso ω_1, ω_2, ω_3 essendo immaginarie, si porrà:

$$(16)\quad \begin{cases} F\omega_4 + A\omega_1 = K(i\cos\theta_1 \,\text{sen}\,\varphi_1 + \cos\varphi_1)e^{-i\psi_1}, \\ G\omega_5 + B\omega_2 = K(i\cos\theta_1 \cos\varphi_1 - \text{sen}\,\varphi_1)e^{-i\psi_1}, \\ H\omega_6 + C\omega_3 = Ki\,\text{sen}\,\theta_1 e^{-i\psi_1}, \\ F\omega_4 - A\omega_1 = K'(-i\cos\theta_2 \,\text{sen}\,\varphi_2 + \cos\varphi_2)e^{i\psi_2}, \\ G\omega_5 - B\omega_2 = K'(-i\cos\theta_2 \cos\varphi_2 - \text{sen}\,\varphi_2)e^{i\psi_2}, \\ H\omega_6 - C\omega_3 = -K'i\,\text{sen}\,\theta_2 e^{i\psi_2}, \end{cases}$$

essendo K e K' due costanti immaginarie coniugate come θ_1 e θ_2, φ_1 e φ_2.

L'integrale delle forze vive diviene:

$$Ke^{-i\psi_1}[i \operatorname{sen} \theta_1 \, d\varphi_1 - d\theta_1] - K' e^{i\psi_2}[i \operatorname{sen} \theta_2 \, d\varphi_2 + d\theta_2] = 4h \, dt,$$

onde ponendo:

$$K \, ie^{-i\psi_1} \operatorname{sen} \theta_1 = \varrho_1, \quad \varphi_1 + i \int \frac{d\theta_1}{\operatorname{sen} \theta_1} = u_1,$$

$$-K' ie^{i\psi_2} \operatorname{sen} \theta_2 = \varrho_2, \quad \varphi_2 - i \int \frac{d\theta_2}{\operatorname{sen} \theta_2} = u_2,$$

si ha:

$$\varrho_1 \, du_1 + \varrho_2 \, du_2 = 4h \, dt,$$

ed

$$(17) \quad \begin{cases} F\omega_4 + A\omega_1 = -\varrho_1 \, i \cos u_1, & F\omega_4 - A\omega_1 = \varrho_2 \, i \cos u_2, \\ G\omega_5 + B\omega_2 = \varrho_1 \, i \operatorname{sen} u_1, & G\omega_5 - B\omega_2 = -\varrho_2 \, i \operatorname{sen} u_2, \\ H\omega_6 + C\omega_3 = \varrho_1, & H\omega_6 - C\omega_3 = \varrho_2, \end{cases}$$

e per mezzo di queste sostituzioni sulle (9), ϱ_1 e ϱ_2 divengono funzioni di u_1 ed u_2, e si trova $\frac{\partial \varrho_1}{\partial u_2} = \frac{\partial \varrho_2}{\partial u_1}$. Ponendo adunque:

$$\int (\varrho_1 \, du_1 + \varrho_2 \, du_2) = 2V,$$

si ha:

$$V = 2ht + \text{cost.},$$

e la funzione caratteristica sarà:

$$W = V - ht,$$

Essa infatti soddisfa alle condizioni (13) e contiene tante costanti arbitrarie (h, g), quante sono le variabili (u_1, u_2). Si avrà dunque:

$$(18) \qquad \frac{\partial W}{\partial h} = h', \quad \frac{\partial W}{\partial g} = g',$$

essendo h' e g' due nuove costanti arbitrarie.

Le (18) danno u_1 ed u_2 in funzione del tempo e di quattro costanti arbitrarie h, g, h', g': gl'integrali (9) daranno ϱ_1 e ϱ_2 in funzione di t e delle stesse costanti: finalmente le equazioni (17) forniranno le sei ω in funzione sempre di t, h, g, h', g'.

Per avere V bisogna esprimere per mezzo delle (9) e delle (17) ϱ_1 e ϱ_2 in funzione di u_1 ed u_2. L'equazione risultante, che si ottiene, eliminando ϱ_2, è di secondo grado rispetto a ϱ_1^2. Quindi ϱ_1 e ϱ_2 possono ottenersi esplicitamente per mezzo di radicali di secondo grado.

La posizione del corpo in questo caso si determina nel modo indicato nella Nota II.

IV.

Del moto di corpi rigidi e di altre questioni di Meccanica in spazi non euclidei ho anche discorso in alcune Memorie o Note, presentate alla R. Accademia delle Scienze di Napoli, delle quali mi permetterò anche di dar conto brevemente ai lettori dei Math. Annalen*).

Nelle prime due ho cercato di esporre in modo sistematico un metodo elementare di trattazione di Meccanica non euclidea, metodo, del resto, non diverso da quello che si segue nei corsi ordinari di Meccanica.

La prima Memoria è dedicata ad alcuni problemi di Statica. Rappresentando la forza col seno iperbolico di un segmento, preso sulla linea d'azione della forza stessa, si stabilisce facilmente l'equazione dei lavori virtuali. Applicando questa equazione ad un sistema rigido, ne scaturiscono col metodo dei moltiplicatori, e nel modo più semplice, le sei caratteristiche, e quindi gl'invarianti e l'asse centrale. Coll' introduzione poi di un nuovo ente meccanico, il *comomento* di una forza, il problema delle Dinami divien suscettibile di trattazione geometrica alla maniera di Poinsot, trasportando cioè tutte le forze ad un punto. Gl'invarianti sono due. Questi nello spazio ellittico non possono essere nulli entrambi, che nel caso di equilibrio; ma nello spazio iperbolico la nullità di entrambi non implica l'equilibrio. Questo caso singolare, dà luogo a particolarità geometriche che non hanno riscontro nella Meccanica ordinaria.

Quanto ai sistemi non rigidi mi sono limitato alle curve funicolari, determinandone l'equazioni differenziali, ed integrandole nel caso di forze centrali e di forze parallele. Il problema delle funicolari in spazi non euclidei non era stato, ch'io sappia, ancora trattato da altri.

La seconda Memoria è dedicata alla Dinamica. Nella prima parte, premesse le espressioni della velocità e dell' accelerazione di un punto, e dei relativi momenti e comomenti rispetto agli assi, e quindi le equazioni differenziali del moto di un punto libero, le ho integrate in alcuni casi, tra cui quello in cui la forza è costantemente parallela ad una retta, e quello in cui la forza è perpendicolare ad un piano: casi che non mi consta siano stati ancora trattati.

La seconda parte è dedicata esclusivamente al moto dei corpi rigidi. Decomposto il moto istantaneo in tre velocità di scorrimento secondo tre

---

*) I. *Alcuni problemi di Meccanica in uno spazio a tre dimensioni di curvatura costante.* Mem. I. Atti della R. Acc. delle Scienze di Napoli, vol. X, 1899.

II. *Alcuni problemi di Meccanica in uno spazio a tre dimensioni di curvatnra costante.* Mem. II. Atti R. Acc. delle Scienze di Napoli, vol. X, 1900.

III. *Su alcuni problemi di Meccanica in uno spazio pseudosferico analiticamente equivalenti a problemi nello spazio ordinario.* — Rendiconti R. Acc. delle Scienze di Napoli, 1901.

assi, ed in tre velocità di rotazione intorno agli assi stessi, si trova una diname che, come nella Meccanica ordinaria, si può ridurre in generale ad uno scorrimento e ad una rotazione secondo un asse centrale, il quale però non esiste sempre; non esiste quando il moto risulta da uno scorrimento e da una rotazione, rappresentate da vettori uscenti dallo stesso punto, eguali e perpendicolari tra loro. Questo caso è analogo a quello rilevato nella Memoria I, in cui la diname si riduce ad una forza e ad una coppia, eguali e perpendicolari tra loro.

Considerando le quantità di moto, se ne presentano i momenti e i comomenti rispetto a tre assi d'inerzia, espressi dalle tre velocità di rotazione, e dalle tre velocità di scorrimento, rispettivamente moltiplicate per quantità costanti (momenti e comomenti d'inerzia), dipendenti dalla distribuzione delle masse.

Le sei equazioni dinamiche si stabiliscono facilmente, per mezzo del principio di Hamilton, usando il metodo dei moltiplicatori. I moltiplicatori si possono eliminare in due modi. In un modo, i secondi membri delle sei equazioni differenziali rappresentano i momenti e i comomenti delle forze applicate, rispetto agli assi d'inerzia; nel secondo modo, li rappresentano rispetto ad assi fissi.

Quando le forze direttamente applicate siano tutte nulle, i sei integrali che risolvono il problema delle velocità, e gli altri sei che risolvono quello della posizione del corpo, si possono trovare coi due metodi che abbiamo più innanzi indicato.

Ma, se il problema può ritenersi così risoluto per quanto riguarda le integrazioni, dal punto di vista geometrico si è ancora ben lontani da una soluzione che abbia la perspicuità propria ai teoremi di Poinsot. Ciò che rende negli spazi di curvatura costante singolarmente complicato il problema è la inseparabilità del moto di rotazione da quello di traslazione. Questa inseparabilità s'incontra anche nei casi più semplici com' è quello, a cui in questa Memoria mi sono limitato, il caso cioè di un corpo rigido che ha inizialmente una velocità di rotazione intorno ad un asse principale d'inerzia, e nel suo centro d'inerzia una velocità di scorrimento perpendicolare all' asse di rotazione. Questo problema, che nella Meccanica ordinaria è risoluto appena sia enunciato, in uno spazio iperbolico dà luogo ad una traiettoria del centro d'inerzia bensì piana, ma curvilinea, mentre l'asse di rotazione si mantiene bensì, qual' era al principio, perpendicolare al suddetto piano, ma la rotazione ha valore variabile, e può divenire una semplice oscillazione. Le equazioni differenziali si riducono a tre, che hanno la stessa forma di quelle che governano il moto di un corpo intorno ad un punto nello spazio ordinario. S'integrano nello stesso modo, ma per il segno negativo che porta un momento d'inerzia,

e per una costante d'integrazione (la costante delle quantità di moto), la quale può essere positiva, negativa o nulla, mentre è sempre positiva nel caso della rotazione di un corpo intorno ad un punto nello spazio euclideo, danno luogo ad una varietà di casi che non si trovano nell' equazioni euleriane e che si rispecchiano in singolari proprietà tanto della rotazione quanto della traslazione.

Finalmente nella Nota «*Su alcuni problemi in uno spazio pseudosferico analiticamente equivalenti**) *a problemi nello spazio ordinario*» mi sono proposto di ricercare quali moti di un corpo rigido e libero, in uno spazio iperbolico, siano rappresentati dalle stesse equazioni differenziali, che rappresentano nello spazio euclideo il moto di un corpo rigido, legato a un punto fisso, e sollecitato da forze qualunque; ed in particolare quali siano le forze che riproducono il caso di Lagrange e della Kowalewski; ed ho dimostrato che se un corpo rigido, in uno spazio iperbolico, ha inizialmente una rotazione intorno ad uno dei tre assi principali d' inerzia, ed uno scorrimento del centro d'inerzia nel piano degli altri due assi, e le forze che lo sollecitano trovansi sempre su questo piano, questo piano scorre sopra un piano fisso, e la rotazione continua intorno al medesimo asse. Il moto in tal caso è retto dalle tre equazioni euleriane. Questo risultato può del resto prevedersi osservando, che in questo moto il polo (ideale) del piano, contenente le forze e lo scorrimento iniziale è un punto fisso, onde il moto stesso può considerarsi come una rotazione intorno a tale punto.

Quando le forze sul piano si riducono ad una, applicata ad un punto fisso del corpo, diretta ad un punto fisso del piano, e proporzionale al seno iperbolico della distanza tra questi due punti, le equazioni del moto libero sono quelle stesse del moto di un corpo pesante, legato ad un punto fisso.

Nel caso particolare in cui la forza è applicata al centro d'inerzia del corpo, e l'ellissoide centrale d'inerzia è di rivoluzione intorno all' asse della rotazione iniziale, si ha il caso d'integrabilità di Lagrange.

Le condizioni analitiche che producono il caso d'integrabilità della Kowaleski, tornano a queste condizioni meccaniche: l'ellissoide centrale d'inerzia è di rivoluzione ed ha gli assi condizionati come quelli della Kowaleski; la forza è perpendicolare ad uno dei piani principali passanti per l'asse di rivoluzione, ed è proporzionale al coseno iperbolico della distanza. Ho considerato anche altri due casi particolari, cioè quando la forza, applicata al centro d'inerzia del corpo, è perpendicolare ad un piano

---

*) Sull' equivalenza analitica di problemi dinamici veggasi Stäckel, Ueber die Differentialgleichungen der Dynamik und der Begriff der analytischen Aequivalenz dynamischer Probleme, Journal für die reine und angewandte Mathematik Bd. 107, 1891.

fisso, e proporzionale al coseno iperbolico della distanza del centro d'inerzia da esso; e quando la forza è parallela ad una retta fissa e funzione della distanza del centro d'inerzia da un' orisfera qualunque avente il centro sulla retta fissa.

Il primo di questi casi, con un semplicissimo cambiamento di variabili, si riporta immediatamente al caso d'integrabilità di Lagrange. Il secondo non mi pare abbia riscontro nei casi d'integrabilità conosciuti dello spazio euclideo; è, se non erro, un nuovo caso d'integrabilità delle formole euleriane, che trova una rappresentazione solo nella Geometria iperbolica.

Napoli, Maggio 1901.

Ueber Bewegungen und complexe Zahlen.

Von

K. Th. Vahlen in Königsberg i./Pr.

Um die *Drehungen* in einem n-dimensionalen Raume darzustellen, hat Lipschitz complexe Zahlen eingeführt, die den Quaternionen analog sind*). Dass man vermittelst derselben Zahlen auch die *Bewegungen* und zwar in einem elliptischen, parabolischen oder hyperbolischen Raume durch Anwendung linearer gebrochener Substitutionen darstellen kann, soll im Folgenden gezeigt werden. Nur für den parabolischen Fall der Ebene**) und des Raumes***) ist das Resultat bisher bekannt†).

1) Es sei $n = p + 1$; die p Primitiv-Einheiten i_α genügen den Relationen

$$i_\alpha^2 + 1 = 0, \quad i_\alpha i_\beta + i_\beta i_\alpha = 0. \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \cdots, p;\ \alpha \neq \beta)$$

Die beiden 2^p-gliedrigen Zahlen

$$a = a_0 + a_1 i_1 + \cdots + a_{12} i_1 i_2 + \cdots + a_{12\ldots p} i_1 i_2 \cdots i_p,$$
$$a' = a_0 - a_1 i_1 - \cdots + a_{12} i_1 i_2 + \cdots + (-1)^p a_{12\ldots p} i_1 i_2 \cdots i_p$$

heissen „conjugirt". Eine $(p+1)$-gliedrige Zahl $x = x_0 + x_1 i_1 + \cdots + x_p i_p$

---

*) Lipschitz, Comptes Rendus XCI (1880) p. 619, 660; Untersuchungen über die Summen von Quadraten, Bonn, 1886. Unabhängig von Lipschitz und zum Theil anders habe ich die Hauptsätze hierüber bewiesen in den „Schriften der physikalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg i. Pr.", Jahrgang 38 (1897) p. [72]. Die Zahlen selbst ohne die Darstellung der Bewegungen durch dieselben finden sich schon bei Clifford, Math. pap. 26, 30, 43.

**) Study, Complexe Zahlen und Transformationsgruppen, Leipz. Ber., Math.-phys. Cl. 41 (1889) p. 177. Wiener Monatshefte I (1890) p. 283.

***) Study, Von den Bewegungen und Umlegungen, Math. Ann. 39 (1891) p. 441—566 spec. p. 526. Math. pap. from the Chicago Congress, New York 1896, pag. 376.

†) Vgl. die weitere Litteratur hierzu bei Study, Theorie der gemeinen und höheren complexen Zahlen. Enc. d. Math. I, p. 147, speciell p. 177 ff.

heisst ein „Vector“. Es giebt Zahlen (z. B. Vectoren, s. u.) a, so dass die 2^p aus

$$ax = ya'$$

durch Vergleichung der Coefficienten von $1, i_1, \cdots, i_p, i_1 i_2, \cdots, i_1 i_2 \cdots i_p$ folgenden Gleichungen bei variablen $x_0, x_1, \cdots, x_p$ und davon linear abhängigen $y_0, y_1, \cdots, y_p$ coexistiren können. Alsdann gehen die y aus den x durch eine allgemeine orthogonale Substitution hervor; denn das Entfernungsquadrat $(x_0 - \xi_0)^2 + \cdots + (x_p - \xi_p)^2 = (x - \xi)(x' - \xi')$ der Punkte

$$(x_0, x_1, \cdots, x_p) \quad \text{und} \quad (\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_p)$$

wird transformirt in

$$a(x-\xi)a'^{-1} \cdot a'(x'-\xi')a^{-1} = a(x-\xi)(x'-\xi')a^{-1},$$

bleibt also unverändert, da sich a gegen a^{-1} wegen der Realität von $(x-\xi)(x'-\xi')$ forthebt. Da die Substitution schon durch die $p+1$ ersten der 2^p Gleichungen gegeben ist, in denen nur die Coefficienten $a_0, a_1, \cdots, a_p, a_{12}, \cdots a_{p-1,p}$ vorkommen, so sind die übrigen Coefficienten der Zahl a von diesen $1 + p + \frac{p(p-1)}{2}$ ersten (rational) abhängig. Eine solche Zahl a heisse ein „Transformator“, $r = (a_0^2 + a_1^2 + \cdots + a_{12\cdots p}^2)^{\frac{1}{2}}$ ihr „Tensor“ und $\frac{a}{r}$ ihr „Versor“. Der zu a „reciproke“ Transformator $\frac{1}{a} = a^{-1}$ ist gleich

$$\frac{1}{r}\left\{a_0 - a_1 i_1 - \cdots - a_{12} i_1 i_2 + \cdots + a_{123} i_1 i_2 i_3 + \cdots + (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} a_{12\cdots p} i_1 i_2 \cdots i_p\right\}.$$

Jeder Vector, also auch jedes Vectoren-Product*) ist ein Transformator, denn in $\sum_0^n a_h i_h \cdot \sum_0^n x_h i_h \cdot \sum_0^n a_h i_h$, $(i_0 = 1)$, hat $i_h i_k i_l$ $(h < k < l)$ den Coefficienten $\begin{vmatrix} a_h & a_k & a_l \\ x_h & x_k & x_l \\ a_h & a_k & a_l \end{vmatrix}$. Die Producte ab und ba, und die Quotienten $\frac{a}{b} = ab^{-1}$, $\frac{b}{a} = ba^{-1}$, $a^{-1}b$, $b^{-1}a$ der Transformatoren a, b sind Transformatoren; und es ist $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$. Der Zusammensetzung orthogonaler Substitutionen entspricht die Multiplication ihrer Transformatoren.

2) Dies vorausgeschickt suchen wir die Bedingungen unter denen $y = \frac{ax + b'}{j^2 bx + a'}$ ein Vector ist. Hier ist x ein variabler Vector, a und a', b und b' conjugirte Transformatoren, j^2 eine vorläufig beliebige reelle Zahl

*) Dass es keine andern Transformatoren giebt, wird in (10) bewiesen.

einschliesslich der Null. Für $x = 0$ ergiebt sich als nothwendig, dass $\frac{b'}{a'}$ ein Vector v ist. Dies ist hinreichend, denn es folgt daraus durch Transformation mit a^{-1}, dass auch $a^{-1}b' \cdot a'^{-1}a' = a^{-1}b' = u$ ein Vector ist.

Setzt man also
$$b' = au, \quad b = a'u',$$
so wird
$$y = a(x+u)\,(a'(1+j^2u'x))^{-1} = a(x+u)\,(1+j^2u'x)^{-1}a'^{-1};$$
es müsste also auch $(x+u)\,(1+j^2u'x)^{-1}$, demnach der reciproke Werth
$$\frac{(1+j^2u'x)\,(x'+u')}{(x+u)\,(x'+u')},$$
also, nach Weglassung von Vectoren und reellen Factoren:
$$u'xu' = u'xu^{-1}\cdot uu'$$
ein Vector sein, was offenbar der Fall ist.

Eine solche Transformation $y = \frac{ax+b'}{j^2bx+a'}$ soll eine „Vector-Transformation" heissen.

3) Die Vector-Transformationen bilden eine Gruppe. Denn
$$z = \frac{cy+d'}{j^2dy+c'} \quad \text{und} \quad y = \frac{ax+b'}{j^2bx+a'}$$
zusammengesetzt ergiebt:
$$\begin{aligned} z &= \{c(ax+b') + d'(j^2bx+a')\}(j^2bx+a')^{-1} \\ &\quad \cdot \{[j^2d(ax+b') + c'(j^2bx+a')]\,(j^2bx+a')^{-1}\}^{-1} \\ &= (Ax'+B')\,(j^2bx+a')^{-1}(j^2bx+a')\,(j^2Bx+A')^{-1} \\ &= \frac{Ax+B'}{j^2Bx+A'}; \end{aligned}$$
wo
$$\begin{aligned} A &= ca + j^2d'b, \qquad & A' &= c'a' + j^2db', \\ B &= da + c'b, \qquad & B' &= d'a' + cb' \end{aligned}$$
gesetzt ist. Dies ist natürlich eine Vector-Transformation, wie auch daraus folgt, dass A und A', ebenso B und B' conjugirt, dass
$$A = c(ab^{-1}+j^2c^{-1}d')b, \qquad B = d(ab^{-1}+d^{-1}c')b$$
Transformatoren, und
$$\frac{B'}{A'} = \frac{c\,\frac{b'}{a'} + d'}{j^2d\,\frac{b'}{a'} + c'}$$
ein Vector ist.

4) Nunmehr sei j eine neue Primitiv-Einheit, deren Quadrat reell ist, und die den Gleichungen
$$i_\alpha j + j i_\alpha = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots p)$$

also

$$aj = ja'$$

genügt.

Alsdann componiren sich die Vector-Transformationen

$$z = \frac{cy + d'}{j^2 dy + c'}, \quad y = \frac{ax + b'}{j^2 bx + a'}$$

wie die „Bi-Transformatoren" $c + d'j$, $a + b'j$. Denn es wird

$$(c + d'j)(a + b'j) = ca + j^2 d'b + cb'j + d'a'j = A + B'j.$$

5) Für $j^2 = 0$ repräsentirt die Transformation

$$x \parallel x + v$$

eine Verschiebung, die Transformation

$$x \parallel a x \frac{1}{a'}$$

eine Drehung, also die aus beiden zusammengesetzte:

$$x \left\| \frac{ax + b'}{a'} \right.$$

eine Bewegung im parabolischen Raum. Für $p = 2$ werden die Bewegungen abhängig von den parabolischen Bi-Quaternionen*)

$$a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_{12} i_1 i_2 + j(b_0 + b_1 i_1 + b_2 i_2 + b_{12} i_1 i_2),$$

mit den Relationen

$$i_1^2 + 1 = i_2^2 + 1 = j^2 = 0; \quad i_1 j = -j i_1, \quad i_2 j = -j i_2, \quad i_1 i_2 = -i_2 i_1.$$

Die acht Parameter $a_0 \cdots b_{12}$ müssen aber der Relation

$$a b^{-1}$$

gleich einem Vector, also

$$a_0 b_{12} + a_1 b_2 - a_2 b_1 + a_{12} b_0 = 0$$

genügen.

6) Für $j^2 = \pm 1$ beweisen wir zunächst, dass eine Vector-Transformation die Gleichung

$$x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_p^2 = j^2$$

oder

$$x = \frac{j^2}{x'}$$

in sich transformirt. Setzt man nämlich $x = \frac{j^2}{x'}$ in $y = \frac{ax + b'}{j^2 bx + a'}$ ein, so erhält man

*) Mit den drei Arten von Biquaternionen haben sich Clifford (Math. pap. Nr. 20, 41, 42) und Buchheim (Amer. J. 7 (1885) p. 293) beschäftigt, ohne die Darstellung der Bewegungen durch dieselben zu finden; vgl. Study, Math. Ann. 39 (1891) p. 520 Anm. **).

$$a\left(\frac{j^2}{x'}+u\right)\left(1+\frac{u'}{x'}\right)^{-1}a'^{-1}=j^2a(1+j^2ux')x'^{-1}\cdot x'(x'+u')^{-1}a'^{-1}$$
$$=j^2\{a'(x'+u')\,(1+j^2ux')^{-1}a^{-1}\}^{-1}=j^2y'^{-1}. \qquad \text{q. e. d.}$$

7) Untersuchen wir die Veränderung, die das Doppelverhältniss von vier Vectoren x, y, z, t:

$$(x-z)\,(x-t)^{-1}:(y-z)\,(y-t)^{-1}=(x-z)\,(x-t)^{-1}(y-t)\,(y-z)^{-1}$$

bei einer Vector-Transformation erleidet. Es geht x über in:

$$a\,\frac{x+u}{1+j^2u'x}\,a'^{-1}=a\cdot\frac{\frac{1}{j^2u'}(1+j^2u'x)+u-\frac{1}{j^2u'}}{1+j^2u'x}\cdot a'^{-1}=a\left(\frac{1}{j^2u'}+\xi\right)a'^{-1},$$

wenn zur Abkürzung $\left(u-\frac{1}{j^2u'}\right)(1+j^2u'x)^{-1}=\xi$ gesetzt wird. Führt man entsprechend η, ζ, τ ein, so wird:

$$x-z\parallel a(\xi-\zeta)a'^{-1},$$
$$x-t\parallel a(\xi-\tau)a'^{-1}$$

also

$$(x-z)\,(x-t)^{-1}\parallel a(\xi-\zeta)a'^{-1}\cdot a'(\xi-\tau)^{-1}a^{-1}=a(\xi-\zeta)\,(\xi-\tau)^{-1}a^{-1}.$$

Ebenso

$$(y-z)\,(y-t)^{-1}\parallel a(\eta-\zeta)\,(\eta-\tau)^{-1}a^{-1},$$

also

$$(x-z)\,(x-t)^{-1}(y-t)\,(y-z)^{-1}\parallel a(\xi-\zeta)\,(\xi-\tau)^{-1}(\eta-\tau)\,(\eta-\zeta)^{-1}a^{-1}.$$

Ferner wird:

$$\xi-\zeta=\left(u-\frac{1}{j^2u'}\right)\left(\frac{1}{1+j^2u'x}-\frac{1}{1+j^2u'z}\right)$$
$$=\left(u-\frac{1}{j^2u'}\right)\cdot(1+j^2u'z)^{-1}((1+j^2u'z)-(1+j^2u'x))\cdot(1+j^2u'x)^{-1}$$
$$=v\cdot Zj^2u'(z-x)X,$$

wenn $v=u-\frac{1}{j^2u'}$, $X=(1+j^2u'x)^{-1}$ u. s. w. gesetzt wird. Also wird:

$$(\xi-\zeta)\,(\xi-\tau)^{-1}=vZj^2u'(z-x)\,X\,X^{-1}(t-x)^{-1}\frac{1}{j^2u'}Z^{-1}v^{-1}$$
$$=vZj^2u'(x-z)\,(x-t)^{-1}(vZj^2u')^{-1}$$
$$=U(x-z)\,(x-t)^{-1}U^{-1},$$

also

$$(\xi-\zeta)\,(\xi-\tau)^{-1}(\eta-\tau)\,(\eta-\zeta)^{-1}=U(x-z)\,(x-t)^{-1}(y-t)\,(y-z)^{-1}\,U^{-1},$$

und schliesslich:

$$\frac{x-z}{x-t}:\frac{y-z}{y-t}\,\Big\|\,a\,U\frac{x-z}{x-t}:\frac{y-z}{y-t}\,(a\,U)^{-1}.$$

Das Doppelverhältniss bleibt demnach im Allgemeinen dann und nur dann ungeändert, wenn es reell ist; dann hebt sich nämlich $a\,U$ gegen $(a\,U)^{-1}$

fort. Sind P, Q, R, S die Endpunkte der Vectoren x, y, z, t, so liegen P, Q, R, S in einem dreidimensionalen Raume; demnach ist $\frac{x-z}{x-t}:\frac{y-z}{y-t}$ das Verhältniss von zwei Quaternionen, deren Versoren die Winkel SPR und SQR haben; diese müssen also gleich sein und in derselben Ebene liegen. Also: Bei einer beliebigen Vector-Transformation bleibt das Doppelverhältniss von vier Vectoren dann und nur dann ungeändert, wenn die vier Endpunkte derselben auf einem Kreise (oder einer Geraden) liegen.

8) Definirt man also als Entfernung zweier Punkte P, Q den Logarithmus des Doppelverhältnisses der zu P, Q, R, S gehörigen Vectoren, wo R, S die Schnittpunkte der Geraden PQ mit $x_0^2 + \cdots + x_p^2 = j^2$ sind, so bleiben bei einer Vector-Transformation die Entfernungen ungeändert; dieselbe repräsentirt daher die Bewegung für $j^2 = -1$ im elliptischen, für $j^2 = +1$ im hyperbolischen Raum*).

9) Ein beliebiger Punkt $\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_{p+1}$ der „sphärischen Mannigfaltigkeit“ $\xi_0^2 + \xi_1^2 + \cdots + \xi_{p+1}^2 = 1$ liegt mit dem „Pole“

$$\xi_0 = \xi_1 = \cdots = \xi_p = 0, \ \xi_{p+1} = 1$$

und dem Punkte

$$\xi_0 = x_0, \ \xi_1 = x_1, \cdots, \xi_p = x_p, \ \xi_{p+1} = 0$$

in einer Geraden, wenn sich verhält:

$$x_0 + i_1 x_1 + \cdots + i_p x_p : 1 \quad \text{wie} \quad \xi_0 + i_1 \xi_1 + \cdots + i_p \xi_p : 1 - \xi_{p+1},$$

wie man aus einem ebenen Schnitt durch die ξ_{p+1}-Axe und die beiden Punkte erkennt. Hierdurch wird die ebene Mannigfaltigkeit $\xi_{p+1} = 0$ auf die sphärische ein-eindeutig stereographisch abgebildet. Demnach ergiebt eine elliptische ($j^2 = -1$) Bewegung $y = \frac{ax + b'}{-bx + a'}$ der ersteren für die letztere die Transformation:

$$\frac{\eta}{1 - \eta_{p+1}} = \frac{a\xi + b'(1 - \xi_{p+1})}{-b\xi + a'(1 - \xi_{p+1})}. \tag{1}$$

Setzt man

$$\frac{\eta}{1 - \eta_{p+1}} = \frac{1 + \eta_{p+1}}{\eta'}, \quad \frac{\xi}{1 - \xi_{p+1}} = \frac{1 + \xi_{p+1}}{\xi'}$$

ein, und geht dann zur conjugirten und reciproken Gleichung über, so kommt:

---

*) Legt man, allgemeiner, i_α^2 einen der drei Werthe $+1$, 0, -1 bei, so sind die Vector-Transformationen die automorphen Transformationen von

$$x_0^2 - i_1^2 x_1^2 - \cdots - i_p^2 x_p^2 = j^2;$$

z. B. im Raume die Bewegungen mit festem Kreiscylinder.

$$(2)\qquad \frac{\eta}{1+\eta_{p+1}} = \frac{a\xi - b'(1+\xi_{p+1})}{b\xi + a'(1+\xi_{p+1})}.$$

Setzt man in (1) und (2) $\eta = \frac{1-\eta_{p+1}^2}{\eta'}$ und geht zu den reciproken Gleichungen über, so erhält man:

$$(3)\qquad \frac{\eta'}{1+\eta_{p+1}} = \frac{-b\xi + a'(1-\xi_{p+1})}{a\xi + b'(1-\xi_{p+1})},$$

$$(4)\qquad \frac{\eta'}{1-\eta_{p+1}} = \frac{a'(1+\xi_{p+1}) + b\xi}{-b'(1+\xi_{p+1}) + a\xi}.$$

Beseitigt man in (1), (2), (3), (4) die Nenner, was wegen der Realität von η_{p+1} keine Schwierigkeiten hat, so ergiebt die Differenz der aus (1) und (2) folgenden Gleichungen:

$$(5)\qquad a\xi - b'\xi_{p+1} = \eta a' + \eta_{p+1} b',$$

und die Differenz der aus (3) und (4) folgenden

$$(6)\qquad b\xi + a'\xi_{p+1} = -\eta' b' + \eta_{p+1} a'.$$

(5) und (6) kann man zusammenfassen in:

$$(7)\qquad (a+b'j)(\xi + j\xi_{p+1}) = (\eta + j\eta_{p+1})(a' - bj).$$

Diese Transformation der sphärischen Mannigfaltigkeit repräsentirt (nach 1)) eine Drehung derselben, um den Nullpunkt

$$\xi_0 = 0,\ \xi_1 = 0, \cdots \xi_{p+1} = 0.^{*)}$$

16) Die elliptischen Bewegungen des $(p+1)$-dimensionalen Raumes sind also auf die Drehungen des $(p+2)$-dimensionalen abgebildet; $a + b'j$ muss ein Transformator für $p+2$ Dimensionen sein. Da aber $\frac{1}{b'}a$ ein Vector ist, so wird $a+b'j$ das Product aus einem Vector

$$v_{p+1} = v_{p+1,0} + v_{p+1,1} i_1 + \cdots + v_{p+1,p} i_p + v_{p+1,p+1} j,$$

den man als Einheits-Vector $(v_{p+1} v'_{p+1} = 1)$ annehmen kann, und einem Transformator für $p+1$ Dimensionen. Recursiv folgt daraus unschwer die Darstellung eines Transformators für $p+1$ Dimensionen als Product des Tensors r und der Einheitsvectoren:

$$v_\alpha = v_{\alpha 0} + v_{\alpha 1} i_1 + \cdots + v_{\alpha\alpha} i_\alpha$$

nämlich als

$$r \cdot v_{h_1} v_{h_2} \cdots v_{h_p},$$

wo $h_1, h_2, \cdots, h_p$ eine beliebige Permutation von $1, 2, \cdots, p$ ist.

---

*) Für $p=1$ ergiebt sich die Cayley'sche Darstellung der Drehung einer Kugel durch eine linear-gebrochene Substitution; s. Cayley, On the correspondence of Homographies and Rotations, Math. Ann. 15 (1879) p. 238. Aus diesem Resultat hätte die Darstellung der Bewegung in der elliptischen Ebene abgeleitet werden können.

Diese Darstellung eines Transformators ist nach Festsetzung der Reihenfolge der $i_1 \cdots i_p$ und Wahl einer Indexfolge $h_1 \cdots h_p$ eine völlig bestimmte*).

11) Wir wollen insbesondere an die Darstellung des Transformators als

$$r \cdot v_1 v_2 \cdots v_{p-1} v_p = r \cdots \frac{v_{p-3}}{v'_{p-2}} \cdot \frac{v_{p-1}}{v'_p}$$

anknüpfen und eine andere Darstellung desselben daraus herleiten.

Eine Quaternion mit dem Tensor r, dem Drehungswinkel 2φ, den Stellungscosinussen der Ebene desselben c_1, c_2, c_{12}, ist bekanntlich gleich

$$r(\cos\varphi + (i_1 c_1 + i_2 c_2 + i_1 i_2 c_{12}) \sin\varphi),$$

oder wenn man $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ durch ihre Potenzreihen ersetzt und beachtet, dass $(i_1 c_1 + i_2 c_2 + i_1 i_2 c_{12})^2 = -1$ ist, gleich:

$$r\left(1 + \frac{(i_1\varphi_1 + i_2\varphi_2 + i_1 i_2 \varphi_{12})}{1!} + \frac{(i_1\varphi_1 + i_2\varphi_2 + i_1 i_2 \varphi_{12})^2}{2!} + \cdots\right),$$

wo $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_{12}$ die Componenten ($\varphi_1 = c_1\varphi$ u. s. w.) von φ in den Coordinatenebenen sind; diese Darstellung ist analog der Darstellung einer gewöhnlichen complexen Zahl als $re^{i\varphi}$.

Für mehr als drei Dimensionen stellt der entsprechende Ausdruck zwar einen Transformator, aber, wie schon die Parameter-Abzählung erkennen lässt, nicht einen allgemeinen Transformator dar.

Es seien a und b zwei vom Nullpunkt ausgehende Gerade, deren letztere in $x_p = 0$ liege; $ab = \varphi$ der Winkel derselben,

$$a_\alpha = \cos a x_\alpha, \quad b_\alpha = \cos b x_\alpha \qquad (\alpha = 0, 1, \cdots, p)$$

ihre Richtungscosinusse; also

$$a_0^2 + \cdots + a_p^2 = 1, \quad b_0^2 + \cdots + b_{p-1}^2 = 1, \quad b_p = 0,$$
$$a_0 b_0 + a_1 b_1 + \cdots + a_p b_p = \cos\varphi,$$

ferner, nach einer bekannten Formel für vier Punkte einer Kugel:

$$a_\alpha b_\beta - a_\beta b_\alpha = \sin x_\alpha x_\beta \cdot \sin ab \cdot \cos ab \,|\, x_\alpha x_\beta = c_{\alpha\beta} \sin\varphi,$$

wenn mit $c_{\alpha\beta} = \cos ab \,|\, x_\alpha x_\beta$ der Cosinus des Winkels bezeichnet wird, den die Ebene von φ mit der Ebene $x_\alpha x_\beta$ bildet. Nunmehr sei

$$v_{p-1} = b_0 + b_1 i_1 + \cdots + b_{p-1} i_{p-1}, \quad v'_p = a_0 + a_1 i_1 + \cdots + a_p i_p.$$

Dann wird:

$$\frac{v_{p-1}}{v'_p} = v_{p-1} v_p = (b_0 + b_1 i_1 + \cdots + b_{p-1} i_{p-1})(a_0 - a_1 i_1 - \cdots - a_p i_p)$$

*) Die Darstellung einer Quaternion als Product (oder Quotient) von $p = 2$ Vectoren findet sich bekanntlich schon bei Hamilton, Elements of Quaternions, II. art. 108.

gleich

$$\cos\varphi + (i_1 c_1 + \cdots + i_p c_p + i_1 i_2 c_{12} + \cdots + i_{p-1} i_p c_{p-1,p}) \sin\varphi;$$

wo $c_{0\alpha} = c_\alpha$ gesetzt ist. Ersetzt man $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ durch ihre Potenzreihen und beachtet, dass

$$(i_1 c_1 + i_2 c_2 + \cdots + i_p c_p + \cdots + i_{p-1} i_p c_{p-1,p})^2$$

zufolge der Relationen

$$c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_{p-1,p}^2 = 1,$$

$$c_{\alpha\beta} c_{\gamma\delta} - c_{\alpha\gamma} c_{\beta\delta} + c_{\alpha\delta} c_{\beta\gamma} = 0$$

gleich -1 ist, so erhält man den Versor $v_{p-1} v_p = V_p$ in der Form

$$V_p = 1 + \frac{(i_1\varphi_1 + \cdots + i_{p-1} i_p \varphi_{p-1,p})}{1!} + \frac{(i_1\varphi_1 + \cdots + i_{p-1} i_p \varphi_{p-1,p})^2}{2!} + \cdots,$$

wo $\varphi_{\alpha\beta}$ die Componente von φ in der $x_\alpha x_\beta$-Ebene ist.

Dieses ist aber kein allgemeiner Versor; ein allgemeiner stellt sich vielmehr nach Obigem als ein Product von solchen speciellen, etwa als $\cdots V_{p-4} V_{p-2} V_p$ dar.

Es ist beachtenswerth, dass sich die beiden Darstellungen eines allgemeinen Transformators oder Versors ergeben haben ohne Benutzung der zwischen den Coefficienten desselben bestehenden Relationen, allein auf Grund der Eingangs (s. o.) festgesetzten Definition.

Königsberg i. Pr., April 1901.

Zur geometrischen Deutung der Invarianten ebener Collineationen.

Von

P. Muth in Osthofen (Rheinhessen).

Im Folgenden will ich zeigen, wie mittelst einer gewissen quadratisch-reciproken Verwandtschaft, die eine ebene, nicht perspective Collineation in sich selbst transformirt, aus jeder *bekannten* Deutung ihrer Invarianten eine im Allgemeinen *neue* Deutung, bei welcher (im Allgemeinen) der Begriff des Netzes*) der betreffenden Collineation auftritt, auf durchaus rationalem Wege abgeleitet werden kann.

1. Wir betrachten eine ebene, nicht perspective Collineation K. Durch zwei beliebig in der Ebene liegende Punkte a, b geht im Allgemeinen *ein* Kegelschnitt des Netzes von K, den wir mit $\widehat{ab}$ bezeichnen wollen. Zwei Kegelschnitte α, β des Netzes von K haben im Allgemeinen *einen* Punkt, ausser den Doppelpunkten gemein; wir bezeichnen ihn mit $\alpha\beta$. Ferner bezeichnen wir die zu den Punkten $a, a', a'', \cdots$ homologen Punkte allgemein mit $a', a'', a''', \cdots$; Analoges gilt für die Geraden.

Wir ordnen nun jeder Geraden u der Ebene bez. denjenigen Punkt x von u zu, für welchen die Gerade xx' mit u zusammenfällt; dann sind u und x homologe Elemente einer *quadratisch-reciproken Verwandtschaft* R unserer Ebene. Beschreibt u ein Strahlenbüschel mit dem Centrum p, so bewegt sich x auf einem Kegelschnitt π des Netzes der Collineation. So entspricht vermöge R jedem Punkt p der Ebene ein Kegelschnitt π des Netzes von K. Durchläuft p eine Gerade u, so bilden die zugeordneten Kegelschnitte π ein Büschel. Ausser den Doppelpunkten von K haben diese Kegelschnitte im Allgemeinen *einen* Punkt x gemein, der auf u liegt, und zwar sind u, x homologe Elemente von R.

*) Vergl. meine Note: Ueber Covarianten ebener Collineationen, diese Annalen (1892) Bd. 40, S. 89 ff. § 1, Art. 1.

Ist $xx' = u$, so ist $x'x'' = u'$, d. h., sind u und x homologe Elemente von R, so sind es auch u' und x'. *Die Beziehung R wird durch die Collineationen K in sich selbst transformirt, und umgekehrt.*

2. Die Collineation K sei durch die Gleichung

$$\sum a_{ik} x_i u_k = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3),$$

die zu ihr inverse durch die Gleichung

$$\sum a_{ik} x_k u_i = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

algebraisch gegeben. Befindet sich die Collineation K in umschriebener Dreieckslage, verschwindet also die Invariante

$$i_\varphi = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

derselben*), so giebt es, wenn $ABCD$, $A'B'C'D'$ homologe Vierseite der Collineation bedeuten, ein und im Allgemeinen nur ein Viereck $\mathfrak{abcd}$, welches dem Vierseit $ABCD$ verkehrt umschrieben, dem Vierseit $A'B'C'D'$ aber eingeschrieben ist**). Nun seien vermöge der Beziehung R den Geraden A, B, C, D bez. die Punkte a, b, c, d zugeordnet, dann entsprechen den Geraden A', B', C', D' vermöge R bez. die Punkte a', b', c', d' (**1**). Den vier Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ entsprechen vermöge R vier Kegelschnitte $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ des Netzes von K. Da die Gerade A' durch den Punkt $\mathfrak{a}$ geht, so ist a' ein Punkt des Kegelschnitts α; ebenso liegt b' auf β, c' auf γ, d' auf δ. Der Geraden $\mathfrak{cd}$ entspricht in R der Punkt $\gamma\delta$; die Geraden $A, B, \mathfrak{cd}$ gehen durch einen Punkt, also liegen die Punkte $a, b, \gamma\delta$ auf einem Netzkegelschnitt. Analog ergiebt sich, dass a, c und $\beta\delta$, a, d und $\beta\gamma$ u. s. w. auf je einem Kegelschnitt des Netzes von K liegen. Wir wollen unter Zugrundelegung des Netzes der Collineation sagen, dass das Kegelschnittquadrupel $\alpha\beta\gamma\delta$ des Netzes dem Viereck $\overset{\frown}{abcd}$ verkehrt eingeschrieben sei, wenn $\alpha\beta$ auf $\overset{\frown}{cd}$, $\alpha\gamma$ auf $\overset{\frown}{bd}$ u. s. w. liegt. Berücksichtigen wir dann, dass $abcd$ und $a'b'c'd'$ zwei beliebige homologe (eigentliche) Vierecke von K vorstellen, so können wir unserem Resultate die einfache Fassung geben:

Sind $abcd$ und $a'b'c'd'$ zwei homologe Vierecke einer in umschriebener Dreieckslage befindlichen, nicht perspectiven Collineation, so giebt es im Netze der Collineation ein Kegelschnittquadrupel $\alpha\beta\gamma\delta$, welches dem Viereck $\overset{\frown}{abcd}$ verkehrt eingeschrieben und gleichzeitig dem Viereck $a'b'c'd'$ umschrieben ist.

---

*) M. Pasch, Math. Ann. (1884) Bd. 23, S. 426ff.

**) M. Pasch, Math. Ann. (1886) Bd. 26, S. 211ff., § 4.

Analog folgert man mittelst der Entwickelungen in **1** aus jeder irgendwie bekannten Deutung eine (im Allgemeinen) neue Deutung. Bei $i = a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$ gehen bekanntlich allemal die Geraden $\alpha, \alpha'', \alpha'''$ durch einen Punkt*); *daher liegen bei* $i = 0$ *allemal die Punkte* a, a'', a''' *auf einem Netzkegelschnitt*, während, wie bekannt, die Punkte a, a', a''' in gerader Linie liegen. Ferner ergiebt sich aus der bekannten Thatsache, dass bei $i_\varphi = 0$ eine Quadrupelserie von Dreiseiten ABC in der Ebene der Collineation auftritt, welche ihren homologen $A'B'C'$ eingeschrieben sind*), sofort die neue Thatsache, dass alsdann auch eine Quadrupelserie von Dreiecken abc existirt, für welche c' auf dem Netzkegelschnitt $\widehat{ab}$, a' auf $\widehat{bc}$, b' auf $\widehat{ca}$ liegt, sodass man das Dreieck $\widehat{abc}$ als seinem homologen $\widehat{a'b'c'}$ umschrieben bezeichnen darf. Man kann diesem Resultate aber auch die Fassung geben (siehe meine oben citirte Note a. a. O.):

Befindet sich eine ebene, nicht perspective Collineation in umschriebener Dreieckslage, so giebt es eine Quadrupelserie von Dreiecken abc derart, dass die Dreiecke abc' *und* $a'b'c''$, bca' *und* $b'c'a''$, cab' *und* $c'a'b''$ *perspectiv liegen; die drei Centren der Perspectivität bilden jedesmal ein Dreieck, das seinem homologen eingeschrieben ist.*

Osthofen (Rheinhessen), Januar 1900.

---

*) M. Pasch, a. zuerst c. O.

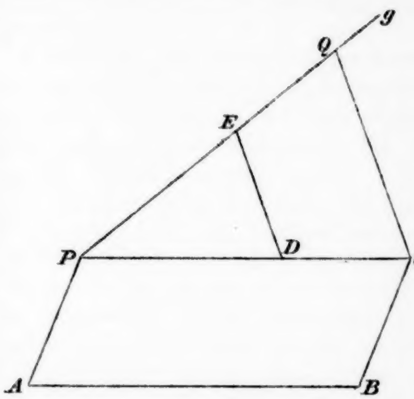
Das Streckenabtragen.

Von

Josef Kürschák in Budapest.

Herr D. Hilbert hat in seiner Festschrift „*Grundlagen der Geometrie*" bewiesen, dass diejenigen ebenen Constructionsaufgaben, die unter ausschliesslicher Benutzung seiner fünf Axiomgruppen lösbar sind, sich *mittels Lineals und Streckenübertragers* ausführen lassen. (Kap. VII, Satz 40.)

Es soll nun gezeigt werden, dass — bei Benützung des Lineals — der Streckenübertrager sich durch ein *Aichmass* ersetzen lässt, welches nur das Abtragen *einer* gewissen, durch jenes Aichmass bestimmten, Strecke a ermöglicht.



Von einer Aufgabe, dem Parallelenziehen, ist es allgemein bekannt, wie sie mit Lineal und Aichmasse zu lösen ist. Soll man nämlich durch einen gegebenen Punkt zu einer Geraden eine Parallele ziehen, so wird man auf der gegebenen Geraden aus einem ihrer Punkte nach beiden Seiten hin mit Hilfe des Aichmasses die Strecke a abtragen, und dann die Aufgabe mittels Lineals lösen*).

Dies benützend, können wir eine beliebige Strecke AB in folgender Weise auf g von P aus abtragen. Wir verbinden P mit A durch eine Gerade, und ziehen durch B eine Parallele zu AP, wie auch durch P eine Parallele zu AB. Schneiden sich letztere in C, so ist $PC = AB$.

*) Siehe z. B. Steiner, die geometrischen Constructionen, Seite 15.

Nun werden wir auf PC und g mittels des Aichmasses die Strecken

$$PD = PE = a$$

abtragen, und durch C eine Parallele zu DE ziehen. Schneidet diese die Gerade g im Punkte Q, so ist

$$PQ = PC = AB.$$

Liegt zufällig AB auf g, oder ist AB parallel zu g, so kann AB vorerst auf eine zu AB nicht parallele Gerade abgetragen werden, und von hieraus auf g. Man kann aber natürlich in diesen Fällen auch einfacher zum Ziele gelangen.

Budapest.

Bemerkung zu meinem Aufsatz „Ueber partielle Integration" (Band 55, Heft 2 dieser Zeitschrift).

Von

Martin Brendel in Göttingen.

Herr E. Lampe war so freundlich, mich darauf aufmerksam zu machen, dass bereits Worpitzky in einem in der Zeitschrift für Mathematik und Physik (Band 23, 1878) abgedruckten Brief an Schlömilch und in seinem Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung (Berlin 1880) von der „Verallgemeinerung der partiellen Integration" handelt. In der That ist die von Worpitzky in seinem Lehrbuch, Seite 73, gegebene Formel mit der ersten von mir gegebenen identisch, wenn er auch den Gegenstand nicht ganz so ausführlich behandelt und namentlich die von mir in Nr. 7 eingeführte willkürliche Function nicht hat.

Ebenso schreibt mir Herr W. Scheibner, dass er schon in den Jahren 1856—1857 (vgl. Berichte über die Verhandlungen der K. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, Bd. 7, Seite 45—46 und 192) gewisse Ausdehnungen des Principes der partiellen Integration angewandt hat, die ebenfalls den von mir erwähnten zum Theil analog sind.

Es ist wohl nicht zweifelhaft, dass Mancher bei Ausführung der einen oder anderen Integration darauf gekommen sein mag, Verfahren anzuwenden, die im Grunde nichts anderes als die genannte allgemeine Methode der partiellen Integration sind. Es möchte sich aber doch wohl empfehlen, dem Gegenstande, speciell in den Lehrbüchern, die ihm gebührende Aufmerksamkeit zuzuwenden und namentlich ein Zeichen für die partielle Integration einzuführen, dessen Fehlen auch Worpitzky bemerkt und das ein Analogon zu dem Zeichen der partiellen Differentiation wäre.

Göttingen 1901, November.